本题得分	

五、用梯形公式求初值问题

$$\begin{cases} y' = -y \\ y(0) = 1 \end{cases}, 0 \le x \le 1$$

证明其近似解为$y_k = (\frac{2-h}{2+h})^k$，并且当h → 0时，收敛于该初值问题的精确解 y(x) = e^{-x}。

梯形公式

$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})]$

$= y_k + \frac{h}{2}(-y_k - y_{k+1})$

得 $(1+\frac{h}{2})y_{k+1} = (1-\frac{h}{2})y_k$, $y_{k+1} = \frac{2-h}{2+h}y_k$

则 $y_k = (\frac{2-h}{2+h})^k y_0 = (\frac{2-h}{2+h})^k$

因为 $x_k = kh$，则

$\lim\limits_{h\to0} y_k = \lim\limits_{h\to0} (\frac{2-h}{2+h})^{\frac{x_k}{h}} = \lim\limits_{h\to0}(1-\frac{2h}{2+h})^{(-\frac{2+h}{2h})(-\frac{2x_k}{2+h})}$

$= \lim\limits_{h\to0} e^{-x_k}$

本题得分	

六、证明解 $f(x) = (x^3 - a)^2 = 0$ Newton 迭代公式是线性收敛的。

Newton迭代公式 $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{(x_k^3-a)^2}{6(x_k^3-a)x_k^2}$

$= x_k - \frac{x_k^3 - a}{6x_k^2}$

则 $\varphi(x) = x - \frac{x^3-a}{6x^2} = \frac{5}{6}x + \frac{a}{6x^2}$，不动点 $x^* = \sqrt[3]{a}$

(1) $a \ne 0$ 时

$\varphi'(x) = \frac{5}{6} + \frac{a}{6}(-\frac{2}{x^3}) = \frac{5}{6} - \frac{a}{3x^3}$

$\varphi'(x^*) = \frac{5}{6} - \frac{a}{3a} = \frac{1}{2} \ne 0$，则 $0<|\varphi'(x^*)|<1$ 线性收敛

(2) $a=0$ 时，$\varphi(x) = \frac{5}{6}x$，$\varphi'(x) = \frac{5}{6}$，则 $0<|\varphi'(x^*)|<1$ 线性收敛。

本题得分	

七、求改进 Euler 法的绝对稳定区间。

模型方程 $y' = \lambda y$, $\lambda < 0$

改进Euler法 $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))]$

$= y_k + \frac{h}{2}[\lambda y_k + \lambda(y_k + hf(x_k, y_k))]$

$= y_k + \frac{h}{2}[\lambda y_k + \lambda(y_k + \lambda h y_k)]$

$= y_k + \lambda h y_k + \frac{(\lambda h)^2}{2} y_k$

$= (1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2}) y_k$

$= E(\lambda h) y_k$

令 $|E(\lambda h)| \le 1$ 即 $|1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2}| \le 1$，得

$-2 \le \lambda h \le 0$