本题得分	

三、确定以下求积公式中的求积系数，使其代数精度尽量高，并指明所构造的求积公式所具有的代数精度：

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h)+A_0 f(0)+A_1 f(h)$$

取 $f(x)=1,\ x,\ x^2$ 代入得

$\int_{-2h}^{2h} 1dx = 4h = A_{-1}+A_0+A_1$

$\int_{-2h}^{2h} x\,dx = 0 = A_{-1}(-h)+A_1 h$ 　　得 $A_{-1}=A_1=\frac{8}{3}h$

$\int_{-2h}^{2h} x^2dx = \frac{16}{3}h^3 = A_{-1}(-h)^2+A_1h^2$ 　　$A_0=-\frac{4}{3}h.$

求积公式为 $\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx \frac{8}{3}hf(-h)-\frac{4}{3}hf(0)+\frac{8}{3}hf(h)$

取 $f(x)=x^3$ 代入

左边 $=\int_{-2h}^{2h} x^3dx=0$，右边 $=\frac{8}{3}h(-h)^3+\frac{8}{3}h\cdot h^3=0$

取 $f(x)=x^4$ 代入

左边 $=\int_{-2h}^{2h} x^4dx=\frac{64}{5}h^5$，右边 $=\frac{8}{3}h(-h)^4+\frac{8}{3}h\cdot h^4=\frac{16}{3}h^5$

左边 $\neq$ 右边

所以求积公式代数精度3

本题得分	

四、用 Romberg 求积公式计算 $\int_1^3 \frac{dx}{x}$，要求误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$

$T_1=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]=\frac{2}{2}[\frac{1}{1}+\frac{1}{3}]=\frac{4}{3}\approx 1.33333$

$T_2=\frac{T_1}{2}+\frac{b-a}{2}f(x_1)=\frac{T_1}{2}+f(2)\approx 1.16667$

$T_4=\frac{T_2}{2}+\frac{b-a}{4}(f(x_1)+f(x_3))=\frac{T_2}{2}+\frac{2}{4}(f(\frac{3}{2})+f(\frac{5}{2}))$

$=\frac{67}{60}\approx 1.11667$

$T_8=\frac{T_4}{2}+\frac{b-a}{8}[f(x_1)+f(x_3)+f(x_5)+f(x_7)]$

$=\frac{T_4}{2}+\frac{2}{8}(f(\frac{5}{4})+f(\frac{7}{4})+f(\frac{9}{4})+f(\frac{11}{4}))=\frac{1193}{1080}$

≈ 1.10463

列表Romberg求积

1.33333			
1.16667	1.11112		
1.11667	1.10000	1.09926	
1.10463	1.10062	1.10066	1.10068