

华中科技大学微积分 (B) 考试合集

那，边。

Last Updated: June 28, 2026

写在前面

整理这份《微积分 (B)》考试合集，最初只是出于一时兴起；但随着整理的推进，我愈发觉得，这件事确实有其必要。《微积分 (B)》作为大多数理工科同学本科阶段学分较高、同时又极为基础的一门课程，其重要性不言而喻。遗憾的是，在期末复习阶段，不少同学仍然难以找到质量较高、体系完整的参考试卷资源；现有资料往往散见于老师课堂的局部发放、各类群聊的零散存档之中，缺少一套成体系、一站式、清晰可查的往年试卷合集。也正因如此，一些打着“复习资料”名义、实则内容粗糙低劣的盈利性校外机构，才一度有机可乘。所以，我希望通过这份整理，为大家提供一个相对完整、清晰、可用的参考来源。

本人去年接手了转专业考试试卷合集的整理与修订工作，因此起初以为这项工作不会太难。但真正投入之后才发现，逐题核对答案、保证表述严谨并非易事；对于原本没有答案的试卷，还需要先自行作答，再进行校订和排版，整个过程远比想象中繁琐。自今年一月寒假开始整理，直到赶在劳动节假期才基本完成。尽管我已经尽力保证每一道题目与答案尽可能严谨完整，但难免仍有疏漏，若有错误或补充，欢迎通过邮箱向我提交 issue: 3157668135@qq.com。

本合集的单份试卷、源码以及插图均已开源至 [《华中科技大学微积分 \(B\) 考试合集》](#)，欢迎大家查阅、使用，也欢迎提出修改意见或补充材料。

最后，谨以此合集，祝大家复习顺利，考试如愿。

版权声明：本文件由 @那，边。整理、维护，仅供个人学习与交流使用，严禁用于任何商业用途；未经授权不得转载、修改或以任何形式传播，侵权必究。

CONTENTS

写在前面	III
Contents	V
I 微积分 (B) (上) 期中考试	1
1 2025-2026 学年微积分 (B) (上) 期中考试	3
2 2025-2026 学年微积分 (B) (上) 期中考试参考答案	7
3 2024-2025 学年微积分 (B) (上) 期中考试	13
4 2024-2025 学年微积分 (B) (上) 期中考试参考答案	17
5 2023-2024 学年微积分 (一) (上) 期中考试	21
6 2023-2024 学年微积分 (一) (上) 期中考试参考答案	25
7 2022-2023 学年微积分 (一) (上) 期中考试	31
8 2022-2023 学年微积分 (一) (上) 期中考试参考答案	35
9 2021-2022 学年微积分 (一) (上) 期中考试	39
10 2021-2022 学年微积分 (一) (上) 期中考试参考答案	43
11 2020-2021 学年微积分 (一) (上) 期中考试	49
12 2020-2021 学年微积分 (一) (上) 期中考试参考答案	53
13 2019-2020 学年微积分 (一) (上) 期中考试	59
14 2019-2020 学年微积分 (一) (上) 期中考试参考答案	63
15 2018-2019 学年微积分 (一) (上) 期中考试	67
16 2019-2020 学年微积分 (一) (上) 期中考试参考答案	71
17 2017-2018 学年微积分 (一) (上) 期中考试	75
18 2017-2018 学年微积分 (一) (上) 期中考试参考答案	79
19 2016-2017 学年微积分 (一) (上) 期中考试	83
20 2016-2017 学年微积分 (一) (上) 期中考试参考答案	87
21 2015-2016 学年微积分 (一) (上) 期中考试	91
22 2015-2016 学年微积分 (一) (上) 期中考试参考答案	95

23	2014-2015 学年微积分 (一) (上) 期中考试	101
24	2014-2015 学年微积分 (一) (上) 期中考试参考答案	105
25	2013-2014 学年微积分 (一) (上) 期中考试	109
26	2013-2014 学年微积分 (一) (上) 期中考试参考答案	113
27	2012-2013 学年微积分 (一) (上) 期中考试	117
28	2012-2013 学年微积分 (一) (上) 期中考试参考答案	121
29	2011-2012 学年微积分 (一) (上) 期中考试	125
30	2011-2012 学年微积分 (一) (上) 期中考试参考答案	129
 II 微积分 (B) (上) 期末考试		133
1	2025-2026 学年微积分 (B) (上) 期末考试	135
2	2025-2026 学年微积分 (B) (上) 期末考试参考答案	139
3	2024-2025 学年微积分 (B) (上) 期末考试	145
4	2024-2025 学年微积分 (B) (上) 期末考试参考答案	149
5	2023-2024 学年微积分 (一) (上) 期末考试	155
6	2023-2024 学年微积分 (一) (上) 期末考试参考答案	159
7	2022-2023 学年微积分 (一) (上) 期末考试	165
8	2022-2023 学年微积分 (一) (上) 期末考试参考答案	169
9	2021-2022 学年微积分 (一) (上) 期末考试	175
10	2021-2022 学年微积分 (一) (上) 期末考试参考答案	179
11	2019-2020 学年微积分 (一) (上) 期末考试	185
12	2019-2020 学年微积分 (一) (上) 期末考试参考答案	189
13	2018-2019 学年微积分 (一) (上) 期末考试	193
14	2018-2019 学年微积分 (一) (上) 期末考试参考答案	197
15	2016-2017 学年微积分 (一) (上) 期末考试	203
16	2016-2017 学年微积分 (一) (上) 期末考试参考答案	207
 III 微积分 (B) (下) 期中考试		213
1	2025-2026 学年微积分 (B) (下) 期中考试	215
2	2025-2026 学年微积分 (B) (下) 期中考试参考答案	219
3	2024-2025 学年微积分 (B) (下) 期中考试	225
4	2024-2025 学年微积分 (B) (下) 期中考试参考答案	229
5	2023-2024 学年微积分 (一) (下) 期中考试	233
6	2023-2024 学年微积分 (一) (下) 期中考试参考答案	237
7	2022-2023 学年微积分 (一) (下) 期中考试	243

8	2022-2023 学年微积分 (一) (下) 期中考试参考答案	247
9	2021-2022 学年微积分 (一) (下) 期中考试	253
10	2021-2022 学年微积分 (一) (下) 期中考试参考答案	257
11	2020-2021 学年微积分 (一) (下) 期中考试	263
12	2020-2021 学年微积分 (一) (下) 期中考试参考答案	267
13	2018-2019 学年微积分 (一) (下) 期中考试	273
14	2018-2019 学年微积分 (一) (下) 期中考试参考答案	277
15	2017-2018 学年微积分 (一) (下) 期中考试	283
16	2017-2018 学年微积分 (一) (下) 期中考试参考答案	287
17	2016-2017 学年微积分 (一) (下) 期中考试	293
18	2016-2017 学年微积分 (一) (下) 期中考试参考答案	297
 IV 微积分 (B) (下) 期末考试		303
1	2024-2025 学年微积分 (B) (下) 期末考试	305
2	2024-2025 学年微积分 (B) (下) 期末考试参考答案	309
3	2023-2024 学年微积分 (一) (下) 期末考试	317
4	2023-2024 学年微积分 (一) (下) 期末考试参考答案	321
5	2022-2023 学年微积分 (一) (下) 期末考试	327
6	2022-2023 学年微积分 (一) (下) 期末考试参考答案	331
7	2021-2022 学年微积分 (一) (下) 期末考试	339
8	2021-2022 学年微积分 (一) (下) 期末考试参考答案	343
9	2020-2021 学年微积分 (一) (下) 期末考试	351
10	2020-2021 学年微积分 (一) (下) 期末考试参考答案	355
11	2018-2019 学年微积分 (一) (下) 期末考试	361
12	2018-2019 学年微积分 (一) (下) 期末考试参考答案	365
13	2017-2018 学年微积分 (一) (下) 期末考试	371
14	2017-2018 学年微积分 (一) (下) 期末考试参考答案	375
15	2016-2017 学年微积分 (一) (下) 期末考试	381
16	2016-2017 学年微积分 (一) (下) 期末考试参考答案	385
17	2015-2016 学年微积分 (一) (下) 期末考试	391
18	2015-2016 学年微积分 (一) (下) 期末考试参考答案	395

Change Logs

- Updated (2026.6.28): 更正了 2023-2024 学年微积分 (一) (下) 期末考试证明题第 19 题题面上界的错误.

- Updated (2026.5.5): 更新了 Chapter 写在前面.

Part I

微积分 (B) (上) 期中考试

CHAPTER 1

2025-2026 学年微积分 (B) (上) 期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 求极限 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{2}{n^2 + \sqrt{2}} + \cdots + \frac{n}{n^2 + \sqrt{n}} \right)$.

2. 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\tan x}}{\ln(1 + \sin^3 x)}$.

3. 设 $y = \arctan e^x - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}}$, 求 $dy|_{x=1}$.

4. 已知曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3}, \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3}, \end{cases}$, 求该曲线在对应 $t = 1$ 的点 P 处的切线方程.

5. 求当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小量 $u = \sqrt{1+x \arcsin x} - \sqrt{\cos x}$ 的主部和阶数.

6. 讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + e^{nx}}{1 + e^{nx}}$ 的连续性, 若有间断点, 指出其类型.

7. 试确定常数 a, b , 使得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1+x)^4 + 3} - (a + bx)}{x} = 0$.

8. 已知函数 $y = f(\sin^2 x)$, 其中 $f(u)$ 二阶可导, 求 y'' .

9. 设 $f(x) = \begin{cases} x^n \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$, 要使 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 求正整数 n 的取值范围.

10. 设 $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$, 求 $f^{(6)}(0)$.

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. 设 $y = y(x)$ 由方程 $x = 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^3}{6}$ 与 $e^y \sin t - y + 1 = 0$ 确定, 求 $\left. \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=1}$.

12. 设 $f(x)$ 定义于 $(-\infty, +\infty)$, 且 $f(x) \neq 0$. 若任给 x, y 总有 $f(x+y) = f(x)f(y)$, 且 $f'(0) = \lambda$, 讨论 $f(x)$ 的可导性, 并求 $f(x)$.

13. 设 $f(x)$ 二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, $f''(0) = 2$, 求 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

14. 设函数 $f(u)$ 二阶可导且 $f'(u) \neq 0$, 若 $x = \varphi(y)$ 为 $y = f(\ln x)$ 的反函数, 求 $\frac{d^2x}{dy^2}$.

15. 利用不等式 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$, 研究数列 $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ 的收敛性.

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. 设常数 $\alpha > 1$, 证明方程 $\alpha x = \tan x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个实根.

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 并且 $f(0) = f(1) = 0, f(\theta) = 1, \theta \in (0, 1)$, 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) - f(\xi) + \xi = 1$.

CHAPTER 2

2025-2026 学年微积分 (B) (上) 期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 记和式 $\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{n}{n^2+\sqrt{n}}$ 为 A_n , 因为

$$\frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{n^2+\sqrt{n}} < A_n < \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{n^2+1},$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{n^2+\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{n^2+1} = \frac{1}{2}$, 由夹逼准则得

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{1}{2}.$$

2. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= - \lim_{x \rightarrow 0} e^x \frac{e^{\tan x - x} - 1}{\sin^3 x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{3x^2} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

3. **Solution.** 由题意

$$y = \arctan e^x - x + \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x}),$$

故

$$dy = \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + e^{2x}} e^{2x} \cdot 2 dx = \frac{e^x - 1}{1 + e^{2x}} dx,$$

因而

$$dy|_{x=1} = \frac{e-1}{1+e^2} dx.$$

4. **Solution.** 对应 $t=1$ 的点 P 为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

因此

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{6t(1+t^3)-9t^4}{(1+t^3)^2}}{\frac{3(1+t^3)-9t^3}{(1+t^3)^2}} = \frac{2t-t^4}{1-2t^3}.$$

曲线在点 P 的切线斜率为 $k = \frac{dy}{dx} \Big|_{t=1} = -1$, 故切线方程为

$$y - \frac{3}{2} = -\left(x - \frac{3}{2}\right) \quad \text{或} \quad x + y = 3.$$

5. Solution.

法一. 设 u 的主部为 $cx^k (c \neq 0, k > 0)$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \arcsin x} - \sqrt{\cos x}}{cx^k} = 1.$$

而

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \arcsin x} - \sqrt{\cos x}}{cx^k} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + x \arcsin x}{cx^k(\sqrt{1+x \arcsin x} + \sqrt{\cos x})} \\ &= \frac{1}{2c} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + x \arcsin x}{x^k} \\ &= \frac{1}{2c} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + x^2}{x^k} = \frac{3}{4c} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^k}, \end{aligned}$$

要使 $\frac{3}{4c} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^k} = 1$, 必有 $k = 2, c = \frac{3}{4}$.

因此, 无穷小量 $u = \sqrt{1+x \arcsin x} - \sqrt{\cos x}$ 的主部为 $\frac{3}{4}x^2$, 阶数为 2.

法二. 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{1+x \arcsin x} - \sqrt{\cos x} \\ &= \frac{1 - \cos x + x \arcsin x}{\sqrt{1+x \arcsin x} + \sqrt{\cos x}} \\ &\sim \frac{1}{2}(1 - \cos x + x \arcsin x) \\ &\sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2 + x^2\right) = \frac{3}{4}x^2. \end{aligned}$$

因此, 无穷小量 $u = \sqrt{1+x \arcsin x} - \sqrt{\cos x}$ 的主部为 $\frac{3}{4}x^2$, 阶数为 2.

6. Solution. 当 $x < 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{nx} = 0$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + e^{nx}}{1 + e^{nx}} = x$;

当 $x = 0$ 时, $f(0) = \frac{1}{2}$;

当 $x > 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nx} = 0$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + e^{nx}}{1 + e^{nx}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{xe^{-nx} + 1}{e^{-nx} + 1} = 1$.

$$\text{因此 } f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \\ x, & x < 0 \end{cases}, \text{ 在区间 } (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \text{ 连续.}$$

因 $f(0^-) = 0$, $f(0^+) = 1$, 故 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

7. Solution. 由题意知 $\sqrt{(1+x)^4 + 3} - (a + bx) = o(x)$, ($x \rightarrow 0$).

首先, $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{(1+x)^4 + 3} - (a + bx)) = 0$, 计算极限可得 $a = 2$.

$$\text{其次, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1+x)^4 + 3} - (2 + bx)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{(1+x)^4 + 3} - 2}{x} - b \right) = 0,$$

$$\text{可得 } b = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1+x)^4 + 3} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^4 - 1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+x)^4 + 3} + 2} = 1.$$

8. **Solution.** $y' = f'(\sin^2 x) \cdot 2 \sin x \cos x = f'(\sin^2 x) \cdot \sin 2x,$

$$y'' = f''(\sin^2 x) \cdot \sin^2 2x + 2 \cos 2x \cdot f'(\sin^2 x).$$

9. **Solution.** 要使 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0).$

要使 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} \cos \frac{1}{x}$ 存在, 必有 $n > 1$, 此时 $f'(0) = 0.$

$x \neq 0$ 时, $f'(x) = nx^{n-1} \cos \frac{1}{x} + x^{n-2} \sin \frac{1}{x}.$ 当 $n > 1$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} \cos \frac{1}{x} + x^{n-2} \sin \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-2} \sin \frac{1}{x},$$

欲使上式极限为 0, 必有正整数 $n > 2.$

综上所述, 当且仅当正整数 $n > 2$ 时, $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

10. **Solution.** 因为 $f(x) = 1 - 2 \cos^2 x \sin^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x,$

所以

$$f^{(6)}(x) = 4^5 \cos \left(4x + \frac{6\pi}{2} \right) = -4^5 \cos 4x,$$

$$f^{(6)}(0) = -1024.$$

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. **Solution.** 当 $t=0$ 时, $x=1, y=1, x'_t = \frac{1}{2} + \frac{t^2}{2} \neq 0.$

对方程 $e^y \sin t - y + 1 = 0$ 两边关于 t 求导得

$$e^y \frac{dy}{dt} \sin t + e^y \cos t - \frac{dy}{dt} = 0,$$

解得

$$\frac{dy}{dt} = \frac{e^y \cos t}{1 - e^y \sin t},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2e^y \cos t}{(1 - e^y \sin t)(1 + t^2)},$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = \left. \frac{2e^y \cos t}{(1 - e^y \sin t)(1 + t^2)} \right|_{t=0} = 2e.$$

12. **Solution.** 由条件 $f(x+y) = f(x)f(y)$ 得 $f(0) = f^2(0), f(x) = f^2\left(\frac{x}{2}\right).$

因 $f(x) \neq 0$, 故 $f(x) > 0, f(0) = 1.$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x)f(y) - f(x)}{y}$$

$$= f(x) \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y) - f(0)}{y} = f(x)f'(0) = \lambda f(x).$$

因此函数 $f(x)$ 处处可导, 且 $f'(x) = \lambda f(x).$

因为 $f'(x) - \lambda f(x) = 0$, 所以

$$(e^{-\lambda x} f(x))' = e^{-\lambda x} f'(x) - \lambda e^{-\lambda x} f(x) = 0,$$

从而 $e^{-\lambda x} f(x) \equiv k$, 由 $f(0) = 1$ 得 $k = 1, f(x) = e^{\lambda x}.$

13. **Solution.** 由题设条件得 $f(0) = 0, f'(0) = 0$.

因为

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \frac{1}{2} f''(0) = 1.\end{aligned}$$

所以

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = e.$$

14. **Solution.**

法一. 因 $\frac{dy}{dx} = f'(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$, 所以 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{x}{f'(\ln x)}$.

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dy^2} &= \frac{d}{dy} \left(\frac{x}{f'(\ln x)} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{f'(\ln x)} \right) \cdot \frac{dx}{dy} \\ &= \frac{f'(\ln x) - x \cdot (f''(\ln x) \cdot \frac{1}{x})}{(f'(\ln x))^2} \cdot \frac{x}{f'(\ln x)} \\ &= \frac{x(f'(\ln x) - f''(\ln x))}{(f'(\ln x))^3}.\end{aligned}$$

法二. 对 $y = f(\ln x)$ 两边关于 y 求导得

$$1 = f'(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dy}, \quad (*)$$

解得 $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{f'(\ln x)}$.

式(*)变形得 $x = f'(\ln x) \cdot \frac{dx}{dy}$, 两边关于 y 再求导得

$$\frac{dx}{dy} = f'(\ln x) \frac{d^2x}{dy^2} + f''(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{dx}{dy} \right)^2,$$

解得

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{\frac{dx}{dy} - \frac{f''(\ln x)}{x} \left(\frac{dx}{dy} \right)^2}{f'(\ln x)} = \frac{x(f'(\ln x) - f''(\ln x))}{(f'(\ln x))^3}.$$

15. **Solution.** $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < 0$,

因此数列 $\{x_n\}$ 单调减少.

$$\begin{aligned}x_n &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln \left(1 + \frac{1}{1} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \cdots + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln n \\ &= \ln(n+1) - \ln n > 0,\end{aligned}$$

即数列 $\{x_n\}$ 有下界 0, 由单调有界收敛准则知数列 $\{x_n\}$ 收敛.

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. **Proof.** 设 $f(x) = \frac{\sin x}{x} - \alpha \cos x$, 则 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上连续.

因为 $f(0^+) = 1 - \alpha < 0$, 所以 $\exists x_1 \in (0, \delta)$ (δ 是足够小的正数), $f(x_1) < 0$.

而 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} > 0$, 显然 $f(x)$ 在 $\left[x_1, \frac{\pi}{2}\right]$ 上连续, 由零点定理知存在 $\xi \in \left(x_1, \frac{\pi}{2}\right)$,

使得 $f(\xi) = 0$ 即 $\alpha\xi = \tan \xi$, 故方程 $\alpha x = \tan x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个实根.

17. **Proof.** 令 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $F(\theta)F(1) = -(1 - \theta) < 0$,

由零点定理可得, 存在 $c \in (\theta, 1)$, 使得 $F(c) = 0$.

再令 $G(x) = e^{-x}F(x)$, 因为 $G(0) = G(c) = 0$, 由 Rolle 定理得存在 $\xi \in (0, c) \subset (0, 1)$, 使得 $G'(\xi) = 0$.

注意到 $G'(x) = e^{-x}(f'(x) - 1 - f(x) + x)$, 因此有 $f'(\xi) - f(\xi) + \xi = 1$.

CHAPTER 3

2024-2025 学年微积分 (B) (上) 期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 设 $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+\sqrt[3]{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt[3]{n}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

2. 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{x \cos x}}{x \ln(1+x^2)}$.

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 求无穷小量 $u = \left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^{x^2} - 1$ 的主部和阶数.

4. 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - \cos 3x}{e^x - 1 - x}$.

5. 设函数 $f(x) = \frac{\sqrt{1 + \sin x + \sin^2 x} - (\alpha + \beta \sin x)}{\sin^2 x}$, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点, 试求常数 α, β 的值.

6. 设 $y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$, 求导数 y' .

7. 设 $y = f(\sin^2 x)$, 求 y' 及 y'' .

8. 设 $f(x) = \begin{cases} (1+x^2)^{\frac{1}{\sin x}}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$.

9. 设函数 $y = y(x)$ 是由方程 $\cos(xy) + \ln y - x - 1 = 0$ 确定的可微函数, 求 $dy|_{x=0}$.

10. 设 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$, 求 $f^{(6)}(0)$.

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. 讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{n(x-1)} + ax + b}{e^{n(x-1)} + 1}$ 的连续性, 其中 a, b 为常数.

12. 设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \arctan \sqrt{t}, \\ y = y(t) \end{cases} \quad (t > 0)$ 确定, 其中 $y = y(t)$ 由方程 $e^y + e^t = 2e$ 确定, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ 处的切线方程.

13. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = 1$, $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{n^2} (n \geq 2)$, 研究极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 的存在性.

14. 在距火箭发射塔 4000 米处安装一台摄像机, 为使摄像机的镜头始终对准火箭, 摄像机的仰角 θ 应随着火箭的上升不断增加. 假设火箭发射后垂直上升到距离地面 3000 米处, 其速度为 600 米/s, 试求在此时刻摄像机仰角 θ 的变化率.

15. 设可微函数 $y = f(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 + xy - 1 = 0$ 确定, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\cos x - 1) - 1}{\ln(1 + x^2)}$.

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. 设正整数 $n > 1$, 证明: $x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + a_2 x^{2n-2} + \cdots + a_{2n-1} x - 1 = 0$ 至少有两个实根.

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 并且 $f(0) = f(1) = 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, 证明存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$.

CHAPTER 4

2024-2025 学年微积分 (B) (上) 期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 注意到 $n+1 \leq n + \sqrt[3]{k} \leq n + \sqrt[3]{n}$, 所以

$$\frac{n}{n + \sqrt[3]{n}} \leq x_n \leq \frac{n}{n+1}.$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n + \sqrt[3]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$, 由夹逼定理得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

2. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= -\lim_{x \rightarrow 0} e^x \frac{e^{x \cos x} - 1}{x^3} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. **Solution.**

$$\begin{aligned} u &= \left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^{x^2} - 1 = \exp \left(x^2 \ln \frac{2 + \cos x}{3} \right) - 1 \\ &\sim x^2 \ln \frac{2 + \cos x}{3} \\ &\sim x^2 \ln \left(1 - \frac{x^2}{6} \right) \\ &\sim x^2 \left(-\frac{x^2}{6} \right) = -\frac{1}{6}x^4. \end{aligned}$$

所以 u 的主部为 $-\frac{1}{6}x^4$, 阶数为 4.

4. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-x^2} - 1) + (1 - \cos 3x)}{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - 1 - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)}{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} \\ &= 8. \end{aligned}$$

5. Solution.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x + \sin^2 x} - (\alpha + \beta \sin x)}{\sin^2 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \sin^2 x - \frac{1}{8} (\sin x + \sin^2 x)^2 + o(\sin x + \sin^2 x)^2 - \alpha - \beta \sin x}{\sin^2 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \sin^2 x - \frac{1}{8} \sin^2 x + o(\sin^2 x) - \alpha - \beta \sin x}{\sin^2 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \alpha) + (\frac{1}{2} - \beta) \sin x + \frac{3}{8} \sin^2 x + o(\sin^2 x)}{\sin^2 x}.
\end{aligned}$$

因为点 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在, 所以 $1 - \alpha = 0$, $\frac{1}{2} - \beta = 0$, 解得 $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}$.

6. Solution. $\ln y = \frac{1}{3} [\ln x + \ln(x^2 + 1) - 2 \ln(x^2 - 1)],$

所以 $\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{4x}{x^2 - 1} \right)$, 即

$$y' = \sqrt[3]{\frac{x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{4x}{x^2 - 1} \right).$$

7. Solution.

$$y' = f'(\sin^2 x) \cdot 2 \sin x \cos x = f'(\sin^2 x) \cdot \sin 2x,$$

$$y'' = f''(\sin^2 x) \cdot \sin^2 2x + 2 \cos 2x \cdot f'(\sin^2 x).$$

8. Solution. $f(x)$ 的定义域为 $x \neq k\pi, k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

当 $x \neq 0$ 时, $\ln f(x) = \frac{\ln(1 + x^2)}{\sin x}$, 所以

$$\begin{aligned}
f'(x) &= f(x) \cdot \left(\frac{\frac{2x}{1+x^2} \sin x - \ln(1+x^2) \cos x}{\sin^2 x} \right) \\
&= (1+x^2)^{\frac{1}{\sin x}} \cdot \left(\frac{\frac{2x}{1+x^2} \sin x - \ln(1+x^2) \cos x}{\sin^2 x} \right) \\
&= (1+x^2)^{\frac{1}{\sin x}} \cdot \left(\frac{2x}{(1+x^2) \sin x} - \frac{\ln(1+x^2) \cos x}{\sin^2 x} \right).
\end{aligned}$$

当 $x = 0$ 时,

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{\sin x}} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{\ln(1+x^2)}{\sin x}} - 1}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x \sin x} = 1.
\end{aligned}$$

综上所述, $f'(x) = \begin{cases} (1+x^2)^{\frac{1}{\sin x}} \cdot \left(\frac{2x}{(1+x^2) \sin x} - \frac{\ln(1+x^2) \cos x}{\sin^2 x} \right), & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

9. Solution. 对方程 $\cos(xy) + \ln y - x - 1 = 0$ 两边求微分得

$$-\sin(xy)(y dx + x dy) + \frac{1}{y} dy - dx = 0.$$

当 $x = 0$ 时, $y = 1$, 代入上式得 $dy|_{x=0} = dx$.

10. **Solution.** 利用 $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, 得

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^5 - \frac{1}{4}x^6 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+2}}{n}.$$

由 Taylor 定理, 将上式与 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ 对照, 得 $f^{(6)}(0) = -\frac{1}{4} \cdot 6! = -180$.

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. **Solution.**

当 $x > 1$ 时, $e^{n(x-1)} \rightarrow +\infty$, 所以

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{n(x-1)} + ax + b}{e^{n(x-1)} + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \frac{ax+b}{e^{n(x-1)}}}{1 + \frac{1}{e^{n(x-1)}}} \\ &= x^2. \end{aligned}$$

当 $x = 1$ 时, $e^{n(x-1)} = 1$, 所以 $f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + ax + b}{2} \Big|_{x=1} = \frac{1+a+b}{2}$.

当 $x < 1$ 时, $e^{n(x-1)} \rightarrow 0$, 所以 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax+b}{1} = ax+b$.

$$\text{综上所述, } f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 1, \\ \frac{1+a+b}{2}, & x = 1, \\ ax+b, & x < 1. \end{cases}$$

$$f(x) \text{ 连续当且仅当 } \begin{cases} 1 = \frac{1+a+b}{2}, \\ a+b = 1 \end{cases}, \text{ 即 } a+b = 1.$$

12. **Solution.** 当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, $t = 1$, 由方程 $e^y + e^t = 2e$ 得 $y(1) = 1$, 所以 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

对方程 $e^y + e^t = 2e$ 两边求微分得 $e^y dy + e^t dt = 0$, 代入 $t = 1, y = 1$ 得 $dy = -dt$, 所以 $y'_t(1) = -1$.

且 $x'_t = \frac{1}{2\sqrt{t}(1+t)}$, 所以 $x'_t(1) = \frac{1}{4}$. 故

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{y'_t(1)}{x'_t(1)} = -4.$$

所以切线方程为

$$y - 1 = -4 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{或} \quad 4x + y - 1 - \pi = 0.$$

13. **Solution.** 由题可得

$$\begin{aligned}x_n - x_{n-1} &= \frac{1}{n^2}, \\x_{n-1} - x_{n-2} &= \frac{1}{(n-1)^2}, \\&\dots\end{aligned}$$

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{2^2}.$$

将上述各式相加得 $x_n = x_1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

显然 $\{x_n\}$ 单调增加, 且 $x_n < 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 2 - \frac{1}{n} < 2$, 所以数列 $\{x_n\}$ 收敛, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

14. **Solution.**

设火箭上升的高度为 h , 则 $\tan \theta = \frac{h}{4000}$, 所以 $\frac{dh}{dt} = 4000 \cdot \sec^2 \theta \cdot \frac{d\theta}{dt}$.

由题设可知此刻 $\frac{dh}{dt} = 600$, $\sec \theta = \frac{\sqrt{4000^2 + 3000^2}}{4000} = \frac{5}{4}$,

所以 $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{dh}{dt}}{4000 \cdot \sec^2 \theta} = \frac{600}{4000 \cdot (\frac{5}{4})^2} = \frac{12}{125}$ (弧度/秒).

15. **Solution.** 当 $x = 0$ 时, 由方程得 $y = f(0) = 1$.

对方程 $x^3 + y^3 + xy - 1 = 0$ 两边求微分得

$$3x^2 dx + 3y^2 dy + y dx + x dy = 0,$$

所以当 $x = 0, y = 1$ 时, $f'(0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{1}{3}$.

因此

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\cos x - 1) - 1}{\ln(1 + x^2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\cos x - 1) - f(0)}{\cos x - 1 - 0} \cdot \frac{\cos x - 1}{\ln(1 + x^2)} \\&= f'(0) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\ln(1 + x^2)} \\&= -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. **Proof.** 令 $F(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + a_2 x^{2n-2} + \dots + a_{2n-1} x - 1$, 则 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

注意到 $F(0) = -1, F(-\infty) = F(\infty) = +\infty$, 由介值定理可知, 存在 $c_1 \in (-\infty, 0), c_2 \in (0, +\infty)$, 使得 $F(c_1) = 0, F(c_2) = 0$, 即方程至少有两个实根.

17. **Proof.** 令 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导.

注意到 $F(0) = f(0) - 0 = 0, F\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, F(1) = f(1) - 1 = -1$.

任取 $\eta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 由介值定理可知存在 $x_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right), x_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使得 $F(x_1) = F(x_2) = \eta$.

所以由 Rolle 定理可知, 存在 $\xi \in (x_1, x_2) \subset (0, 1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) = 1$.

CHAPTER 5

2023-2024 学年微积分（一）（上）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 求极限 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin(\sqrt{n^2 + 1}\pi)$.

2. 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{x - \sin x}$.

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 设 $u = \sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}$ 的主部为 cx^k , 试确定常数 c, k 的值.

4. 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

5. 设函数 $f(x) = \frac{x - x^2}{\sin \pi x}$, 指出 $f(x)$ 的间断点并判断其类型.

6. 设 $y = \sqrt{x \sin x \sqrt{e^x - 1}}$ ($0 < x < \pi$), 求导数 y' .

7. 设 $f(x) = \begin{cases} a + x + \sqrt{1 - x}, & x < 0 \\ 1 + b \arctan x, & x \geq 0 \end{cases}$, 求常数 a, b , 使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

8. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = 2e^y \sin x - 7x$ 确定的可微函数, 求 $dy|_{x=0}$.

9. 设 $y = \frac{1}{2 - 3x - 2x^2}$, 求 $y^{(n)}(0)$.

10. 设 $y = \sin^4 x - \cos^4 x$, 求 y' 及 y'' .

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = 4t - t^2 \end{cases}, t > 0$ 确定, 过点 $(-1, 0)$ 作 $y = y(x)$ 的切线, 求切点 (x_0, y_0) , 并写出该切线的方程.

12. 设 $y = g(x)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数, $f(x) = x + (1 + x)^x$, 求 $y = g(2 + x^2)$ 在 $x = 1$ 处的导数.

13. 设 $b_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n, \dots)$, $x_n = \frac{b_1}{1 + b_1} + \frac{b_2}{(1 + b_1)(1 + b_2)} + \dots + \frac{b_n}{(1 + b_1)(1 + b_2) \cdots (1 + b_n)}$, 研究数列 $\{x_n\}$ 的极限的存在性.

14. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - e^{-x}}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有一阶连续的导数, 且 $g''(0)$ 存在, $g(0) = 1$, $g'(0) = -1$, 求 $f'(x)$, 并讨论 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

15. 一观察者站在地面上用望远镜观察一架飞机, 该飞机的高度为 20km, 正以 16km/min 的速度向观察者水平地飞过来, 试问当飞机离观察者的水平距离为 40km 时, 望远镜视角改变的速率是多少?

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 且 $x_i \in (a, b), i = 1, 2, \dots, n$, 证明至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使

$$f(\xi) = \frac{1}{n} (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)).$$

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 并且 $f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{2}$, 证明存在 $\xi, \eta \in (0, 1)$, 且 $\xi \neq \eta$, 使得 $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi + \eta$.

CHAPTER 6

2023-2024 学年微积分（一）（上）期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. Solution.

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n \sin \left((\sqrt{n^2 + 1} - n)\pi + n\pi \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \left((\sqrt{n^2 + 1} - n)\pi \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \pi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2. Solution.

法一.

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(e^{\tan x - x} - 1)}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{\frac{1}{2}x^2} = 2. \end{aligned}$$

法二.

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\xi} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} \quad (\xi \text{ 介于 } x \text{ 与 } \tan x \text{ 之间}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{\frac{1}{2}x^2} = 2. \end{aligned}$$

3. Solution.

法一.

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x}} (\tan x - \sin x) \\ &\sim \frac{1}{2} (\tan x - \sin x) = \frac{1}{2} \tan x (1 - \cos x) \sim \frac{1}{4} x^3, \end{aligned}$$

即 $k = 3, c = \frac{1}{4}$.

法二. 由题意得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u}{cx^k} = 1$. 而

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u}{cx^k} &= \frac{\tan x - \sin x}{cx^k(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{2cx^k} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{2cx^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{3-k}}{4c},\end{aligned}$$

故 $3-k=0, 4c=1$, 即 $k=3, c=\frac{1}{4}$.

4. **Solution.**

$$\begin{aligned}l &= \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left[\frac{1}{x^2} \ln \left(\frac{\arcsin x}{x} \right) \right] = \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \left(\frac{\arcsin x}{x} \right) \right] \\ &= \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\arcsin x}{x} - 1 \right) \right] = \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{x^3} \right] \\ &= \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{3x^2} \right] = \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{3x^2\sqrt{1-x^2}} \right] \\ &= \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2\sqrt{1-x^2}} \right] = e^{\frac{1}{6}}.\end{aligned}$$

5. **Solution.**

当 $\sin \pi x = 0$ 即 $x = k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 时, $f(x)$ 无定义,

故 $x = k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 是 $f(x)$ 的间断点.

因

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x^2}{\sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi x}{\sin \pi x} \cdot \frac{1 - x}{\pi} = \frac{1}{\pi}; \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi(1-x)}{\sin \pi(1-x)} \cdot \frac{x}{\pi} = \frac{1}{\pi},\end{aligned}$$

所以 $x = 0, 1$ 是可去间断点;

当 $k = -1, \pm 2, \pm 3, \dots$ 时, $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = \infty$, 所以 $x = -1, \pm 2, \pm 3, \dots$ 是无穷间断点.

6. **Solution.** 因

$$\ln y = \frac{1}{2} \left(\ln x + \ln \sin x + \frac{1}{2} \ln(e^x - 1) \right),$$

所以

$$y' = \frac{1}{2} \sqrt{x \sin x \sqrt{e^x - 1}} \left(\frac{1}{x} + \cot x + \frac{e^x}{2(e^x - 1)} \right).$$

7. **Solution.** 要使得 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 必须 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 即

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0).$$

因 $f(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + b \arctan x) = 1 = f(0)$,

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a + x + \sqrt{1-x}) = a + 1$, 所以 $a + 1 = 1$, 即 $a = 0$.

又 $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \sqrt{1-x}) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}(1 - \sqrt{1-x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} \cdot \frac{1}{2}x}{x} = \frac{1}{2}$,

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + b \arctan x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b \arctan x}{x} = b,$$

又必须 $f'_-(0) = f'_+(0)$, 所以 $b = \frac{1}{2}$.

8. Solution.

法一. 当 $x = 0$ 时 $y = 0$.

方程两边求导

$$y' = 2e^y y' \sin x + 2e^y \cos x - 7,$$

即

$$y' = \frac{2e^y \cos x - 7}{1 - 2e^y \sin x},$$

所以

$$y'|_{x=0} = -5, \quad dy|_{x=0} = y'|_{x=0} dx = -5 dx.$$

法二. 当 $x = 0$ 时 $y = 0$.

方程两边求微分, 得

$$dy = 2e^y \sin x dy + 2e^y \cos x dx - 7 dx,$$

从而

$$dy = \frac{2e^y \cos x - 7}{1 - 2e^y \sin x} dx, \quad dy|_{x=0} = \frac{2e^y \cos x - 7}{1 - 2e^y \sin x} \Big|_{x=0} dx = -5 dx.$$

9. **Solution.** $y = \frac{1}{(1-2x)(x+2)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x+2} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2x-1}.$

由公式 $\left(\frac{1}{(1+x)}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$, 得

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) &= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)} - \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2x-1}\right)^{(n)} = \frac{1}{5} \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+2)^{n+1}} - \frac{2}{5} \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot n!}{(2x-1)^{n+1}} \\ &= \frac{n!}{5} \left(\frac{(-1)^n}{(x+2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n 2^{n+1}}{(2x-1)^{n+1}} \right), \end{aligned}$$

所以 $y^{(n)}(0) = \frac{n!}{5} \left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} + 2^{n+1} \right).$

10. Solution.

因为

$$y = \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = -\cos 2x,$$

所以

$$y' = 2 \sin 2x, \quad y'' = 4 \cos 2x.$$

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. **Solution.** 设切点 (x_0, y_0) 对应的参数为 $t = t_0$, 则 $\frac{dy}{dx} \Big|_{t=t_0} = \frac{4-2t}{2t} \Big|_{t=t_0} = \frac{2-t_0}{t_0},$

曲线在 (x_0, y_0) 的切线方程为 $y - y_0 = \frac{2-t_0}{t_0}(x - x_0),$

即 $y - (4t_0 - t_0^2) = \frac{2-t_0}{t_0}(x - t_0^2 - 1)$ 化简得 $y = \frac{2-t_0}{t_0}x + 2t_0 - \frac{2-t_0}{t_0}$,

切线过 $(-1, 0)$, 故代入方程得 $t_0^2 - t_0 - 2 = 0$, 解得: $t_0 = -2$ (不合题意), $t_0 = 1$,

由 $t_0 = 1$ 得 $(x_0, y_0) = (2, 3)$, 故所求切线方程为 $y = x + 1$.

12. **Solution.** 由题意得 $f'(x) = 1 + (1+x)^x \left(\ln(1+x) + \frac{x}{1+x} \right)$,

所以 $f'(1) = 2(\ln 2 + 1)$.

又

$$f(1) = 3, \quad g'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2(\ln 2 + 1)},$$

因此

$$y' = g'(2+x^2) \cdot 2x = 2xg'(2+x^2), \quad y'|_{x=1} = g'(3) \cdot 2 = \frac{1}{\ln 2 + 1}.$$

13. **Solution.**

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{b_1}{1+b_1} + \frac{b_2}{(1+b_1)(1+b_2)} + \cdots + \frac{b_n}{(1+b_1)(1+b_2)\cdots(1+b_n)} + \frac{b_{n+1}}{(1+b_1)(1+b_2)\cdots(1+b_{n+1})} \\ &= x_n + \frac{b_{n+1}}{(1+b_1)(1+b_2)\cdots(1+b_{n+1})} \geq x_n, \end{aligned}$$

故数列 $\{x_n\}$ 单调递增. 因

$$\frac{b_k}{(1+b_1)(1+b_2)\cdots(1+b_k)} = \frac{1}{(1+b_1)(1+b_2)\cdots(1+b_{k-1})} - \frac{1}{(1+b_1)(1+b_2)\cdots(1+b_k)},$$

所以

$$\begin{aligned} x_n &= 1 - \frac{1}{1+b_1} + \left(\frac{1}{1+b_1} - \frac{1}{(1+b_1)(1+b_2)} \right) + \cdots \\ &\quad + \left(\frac{1}{(1+b_1)(1+b_2)\cdots(1+b_{n-1})} - \frac{1}{(1+b_1)(1+b_2)\cdots(1+b_n)} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{(1+b_1)(1+b_2)\cdots(1+b_n)} < 1. \end{aligned}$$

从而数列 $\{x_n\}$ 有上界, 由单调有界准则知数列得极限存在.

14. **Solution.**

$$\text{当 } x \neq 0 \text{ 时, } f'(x) = \frac{x(g'(x) + e^{-x}) - g(x) + e^{-x}}{x^2} = \frac{xg'(x) + (x+1)e^{-x} - g(x)}{x^2}.$$

当 $x = 0$ 时,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{g(x) - e^{-x}}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - e^{-x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) + e^{-x}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) + 1 + e^{-x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(0) + e^{-x} - 1}{2x} = \frac{1}{2}(g''(0) - 1), \end{aligned}$$

因

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(g'(x) + e^{-x})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{g'(x) + e^{-x}}{x} - \frac{g(x) - e^{-x}}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) + e^{-x}}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - e^{-x}}{x^2} \\ &= g''(0) - 1 - \frac{1}{2}(g''(0) - 1) = \frac{1}{2}(g''(0) - 1) = f'(0), \end{aligned}$$

故 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

15. **Solution.** 设时刻 t 飞机离观察者的水平距离为 x km, 望远镜视角为 θ 弧度, 则有

$$\frac{dx}{dt} = -16 \text{ km/min}, \quad x = 20 \tan \theta,$$

$$\text{故 } \theta = \arctan \frac{x}{20}, \text{ 于是 } \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{20 + \frac{x^2}{20}} \frac{dx}{dt}.$$

$$\text{当 } x = 40 \text{ km}, \frac{dx}{dt} = -16 \text{ (km/min)} \text{ 时, } \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{20 + \frac{40^2}{20}} (-16) = -\frac{4}{25} \text{ rad/min}.$$

$$\text{即望远镜视角改变的速率是 } -\frac{4}{25} \text{ rad/min}.$$

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. **Proof.** 不妨设 $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$, 显然 $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 上连续.

故 $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 上必取得最大值 M 和最小值 m , 即 $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [x_1, x_n]$,

从而有 $m \leq f(x_i) \leq M, i = 1, 2, \cdots, n$, 故

$$m \leq \frac{1}{n} (f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)) \leq M.$$

由介值定理知至少存在一点 $\xi \in [x_1, x_n] \subset (a, b)$ 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{n} (f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)).$$

17. **Proof.**

法一. 令 $F(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$, 则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导,

$$\text{且 } F(0) = f(0) = 0, \quad F(1) = f(1) - \frac{1}{2} = 0.$$

函数 $F(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上分别应用 Lagrange 中值定理,

$$\exists \eta \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \text{ 使得}$$

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) &= F'(\eta) \frac{1}{2}, & \text{即 } 2F\left(\frac{1}{2}\right) &= f'(\eta) - \eta, \\ F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) &= F'(\xi) \frac{1}{2}, & \text{即 } -2F\left(\frac{1}{2}\right) &= f'(\xi) - \xi, \end{aligned}$$

两式相加得 $f'(\eta) - \eta + f'(\xi) - \xi = 0$, 即 $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi + \eta$.

法二. 令 $G(x) = f(x) - f(1-x)$, 则

$$G'(x) = f'(x) + f'(1-x), \quad G(0) = f(0) - f(1) = -\frac{1}{2}, \quad G\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

应用 Lagrange 中值定理得, $\exists \xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 使

$$G\left(\frac{1}{2}\right) - G(0) = G'(\xi) \left(\frac{1}{2} - 0\right) \quad \text{即} \quad f'(\xi) + f'(1-\xi) = 1.$$

令 $\eta = 1 - \xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 即得 $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi + \eta$.

CHAPTER 7

2022-2023 学年微积分（一）（上）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 求极限 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} + \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}} \right).$

2. 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x)} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right).$

3. 求当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小量 $x - \arctan x$ 的主部和阶数.

4. 设 $b = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + a \cos x - 2}{\tan x}$ 为常数, 求 a, b .

5. 设函数 $f(x) = \frac{\ln |x|}{|x-1|} \sin x$, 求 $f(x)$ 的间断点并判断类型.

6. 设 $y(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} (x \neq 0, x \neq \pm 1)$, 求 $y'(x)$.

7. 设二阶可导函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = 1 + xe^y$ 确定, 求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$.

8. 设 $y = (1 + x^2)^{\sin x}$, 求 dy .

9. 已知 $f(x) = x^3 \ln(1+x)$, 求 $f^{(10)}(0)$.

10. 求曲线 $r = 1 - \cos \theta$ 在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程.

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. 研究函数 $f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}$ 的连续性.

12. 设 $y = g(x)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数, $f(x)$ 可导, $f(1) = 2, f'(1) = -4$, 求 $y = g(1+x^2)$ 在 $x = 1$ 处的导数.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处二阶可导, 且 $f'(1) = 0, f''(1) = 0, y = f^2(x)$, 求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=1}$.

14. 设函数 $g(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 函数 $f(x)$ 可导, 求 $F(x) = f(g(x))$ 的导数.

15. 将水以 $4\text{m}^3/\text{min}$ 的速率注入一个圆锥形容器中, 容器顶朝下倒立, 它的高度为 8m , 底面半径为 4m , 当容器内的水深达 5m 时, 水面升高的速率是多少?

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. 设 $x_n > 0$, $x_{n+1} + \frac{4}{x_n} < 4 (n = 1, 2, \dots)$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在并求其值.

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, b]$ 上具有二阶导数, 且 $|f''(x)| \leq M$, $f(x)$ 在 $(0, b)$ 内取得最大值, 试证: $|f'(0)| + |f'(b)| \leq Mb$.

CHAPTER 8

2022-2023 学年微积分 (一) (上) 期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 设 $x_n = \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} + \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}$, 则

$$n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}} \leq x_n \leq n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}, \quad n > 1.$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} = \pi$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}} = \pi$,
所以 $l = \pi$.

2. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin x - x}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

3. **Solution.**

法一. 设 $f(x) = \arctan x$, 则 $f(0) = 0$, $f'(0) = \frac{1}{1+x^2} \Big|_{x=0} = 1$,

$$f''(0) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad f'''(0) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} \Big|_{x=0} = -2,$$

所以 $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$, 于是

$$x - \arctan x = \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \sim \frac{1}{3}x^3.$$

即主部为 $\frac{1}{3}x^3$, 阶数为 3.

法二. 设 $x \rightarrow 0$, $x - \arctan x$ 的主部为 cx^r , 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{cx^r} = 1$.

因

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \arctan x)'}{(cx^r)'} &= \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{crx^{r-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{crx^{r-3}}, \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{c^r x^{r-3}} = 1$, 从而 $r = 3, c = \frac{1}{3}$, 即主部为 $\frac{1}{3}x^3$, 阶数为 3.

4. **Solution.** 由 b 是常数, $\lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0$ 知, $\lim_{x \rightarrow 0} (x + a \cos x - 2) = 0$, 于是 $a = 2$.

进而 $b = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2(\cos x - 1)}{x} = 1$, 即 $a = 2, b = 1$.

5. **Solution.** 当 $x = 0, x = 1$ 时, $f(x)$ 无定义, 故 $x = 0, x = 1$ 是 $f(x)$ 的间断点.

因

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\csc x} \cdot \frac{1}{|x-1|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \cot x} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x \cos x} = 0.\end{aligned}$$

类似可得 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, 所以 $x = 0$ 是可去间断点.

$$(\text{或 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln |x| \cdot \frac{1}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln |x| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln |x|}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0)$$

又

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} \sin x = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} \sin x = \sin 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\ln x}{x-1} \sin x = -\sin 1,\end{aligned}$$

所以 $x = 1$ 是跳跃间断点.

6. **Solution.** 化简得 $y(x) = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}$.

所以

$$y'(x) = \frac{-\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot x - (1 - \sqrt{1-x^2})}{x^2} = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2 \sqrt{1-x^2}}.$$

7. **Solution.** 由题设有 $x = 0, y = 1$, 方程两边关于 x 求导得

$$(1 - xe^y)y' = e^y, \quad (*)$$

$$y'(0) = e.$$

方程 (*) 两边再关于 x 求导得

$$(1 - xe^y)y'' = 2y'e^y + x \cdot (y')^2 \cdot e^y,$$

所以

$$y''(0) = 2e^2, \quad \text{即 } \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = 2e^2.$$

8. **Solution.** 因 $\ln y = \sin x \ln(1+x^2)$, 所以

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \ln(1+x^2) + \sin x \cdot \frac{2x}{1+x^2},$$

即

$$y' = \left(\cos x \ln(1+x^2) + \frac{2x \sin x}{1+x^2} \right) y = (1+x^2)^{\sin x} \left(\cos x \ln(1+x^2) + \frac{2x \sin x}{1+x^2} \right),$$

因此

$$dy = (1+x^2)^{\sin x} \left(\cos x \ln(1+x^2) + \frac{2x \sin x}{1+x^2} \right) dx.$$

9. **Solution.** 取 $v(x) = x^3$, 它的四阶以上的导数为 0,

$$u^{(k)}(x) = (\ln(1+x))^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, k = 1, 2, \dots,$$

由 Leibniz 公式 $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$, 得

$$f^{(10)}(x) = x^3 \frac{(-1)^9 9!}{(1+x)^{10}} + 30x^2 \frac{(-1)^8 8!}{(1+x)^9} + 3 \times 10 \times 9x \frac{(-1)^7 7!}{(1+x)^8} + 10 \times 9 \times 8 \frac{(-1)^6 6!}{(1+x)^7}.$$

$$\text{所以 } f^{(10)}(0) = \frac{10!}{7}.$$

10. **Solution.** 曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = (1 - \cos \theta) \cos \theta, \\ y = (1 - \cos \theta) \sin \theta \end{cases}$. 于是得到

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\sin^2 \theta + (1 - \cos \theta) \cos \theta}{2 \sin \theta \cos \theta - \sin \theta}.$$

代入 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 得到 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -1$, $x = 0, y = 1$, 因此切线方程为 $y = -x + 1$.

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. **Solution.** 当 $x > 0$ 时, $e^{nx} \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}} = x^2$;

当 $x < 0$ 时, $e^{nx} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}} = x$;

当 $x = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}} = 0$,

综上所述, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ x, & x \leq 0. \end{cases}$

当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = x^2$ 及 $f(x) = x$ 均为幂函数, 连续;

当 $x = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, 且 $f(0) = 0$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

因此 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处连续.

12. **Solution.** 由题意得 $g'(2) = \frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{4}$.

所以

$$y'(1) = [2xg'(2)]|_{x=1} = -\frac{1}{2}.$$

13. **Solution.** $y'(x) = 2f(x)f'(x)$,

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{y'(x) - y'(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)f'(x)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)(f'(x) - f'(1))}{x - 1} \\ &= 2f(1)f''(1) = 0.\end{aligned}$$

14. **Solution.** $F(x) = \begin{cases} f\left(x^3 \sin \frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ f(0), & x = 0. \end{cases}$

当 $x \neq 0$ 时, $F'(x) = f'\left(x^3 \sin \frac{1}{x}\right) \left(3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}\right)$,

当 $x = 0$ 时,

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = 0,$$

$$F'(0) = f'(g(0)) \cdot g'(0) = f'(0) \cdot 0 = 0.$$

15. **Solution.** 设时刻 t 容器中水的体积为 $V\text{m}^3$, 水的高度为 $h\text{m}$, 水面半径为 $r\text{m}$, 则

$$\frac{r}{4} = \frac{h}{8}, \quad \text{即 } r = \frac{h}{2}, \quad \text{因而 } V = \frac{1}{12}\pi h^3,$$

于是 $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4}\pi h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$.

当 $h = 5\text{m}$ 时, $\frac{dV}{dt} = 4\text{m}^3/\text{min}$ 时, $\frac{dh}{dt} = \frac{16}{25\pi}\text{m}/\text{min}$. 即水面升高的速率是 $\frac{16}{25\pi}\text{m}/\text{min}$.

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. **Proof.** 由 $x_{n+1} - x_n < 4 - \frac{4}{x_n} - x_n = -\left(\sqrt{x_n} - \frac{2}{\sqrt{x_n}}\right)^2 \leq 0$ 得到 $\{x_n\}$ 单调递减.

(或由均值不等式 $\sqrt{x_{n+1} \cdot \frac{4}{x_n}} \leq \frac{x_{n+1} + \frac{4}{x_n}}{2}$ 及 $x_{n+1} + \frac{4}{x_n} < 4$ 得

$$\sqrt{x_{n+1} \cdot \frac{4}{x_n}} < 2, \quad \text{即 } \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1, \quad \text{从而 } \{x_n\} \text{ 单调递减.})$$

又 $x_n > 0$, 由单调有界准则可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则 $A > 0$. 由 $x_{n+1} + \frac{4}{x_n} < 4$ 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_{n+1} + \frac{4}{x_n}\right) \leq 4$, 即 $A + \frac{4}{A} \leq 4$, 解得 $A = 2$.

17. **Proof.** 设 $f(x)$ 在 $x_0 \in (0, b)$ 处取得最大值, 则 $f'(x_0) = 0$.

对函数 $f'(x)$ 在 $[0, x_0], [x_0, b]$ 上分别应用 Lagrange 中值定理, 得

$$f'(x_0) - f'(0) = f''(\eta)x_0, \quad \exists \eta \in (0, x_0)$$

$$f'(b) - f'(x_0) = f''(\xi)(b - x_0), \quad \exists \xi \in (x_0, b)$$

$$|f'(0)| + |f'(b)| = |f''(\eta)|x_0 + |f''(\xi)|(b - x_0) \leq Mx_0 + M(b - x_0) = Mb.$$

CHAPTER 9

2021-2022 学年微积分（一）（上）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^n + b^n + c^n}{3} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (a, b, c > 0).$

2. 求当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 无穷小量 $\sqrt{1+x\sqrt{x}} - e^{2x}$ 的主部和阶数.

3. 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{3 + \cos x}{4} \right)^x - 1 \right].$

4. 已知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2 + 4x - 1} - ax - b) = 0$, 求 a, b .

5. 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x - 1}}$.

6. 确定 $f(x) = e^{\frac{|x|}{\tan x}}$ 的间断点及其类型.

7. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t + e^t, \\ y = \sin t \end{cases}$ 确定, 求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0}$.

8. 设 $y = x^{x^x}$, 求 y' .

9. 求 $y = x^2 \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数.

10. 设 $y = \frac{\cos x}{x^2}$, 求 $\frac{dy}{d(\cos x)}, \frac{dy}{d(x^3)}$.

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. 设 $x = \varphi(y)$ 是 $f(x) = \ln x + \arctan x$ 的反函数, 求 $\varphi'(\frac{\pi}{4})$.

12. 设曲线 $y = y(x)$ 由方程 $e^{xy} + \ln \frac{y}{x+1} = 2$ 确定, 求曲线在 $x=0$ 处的切线方程.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$, $f'(0)=2$, 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3}$.

14. 有一长度为 5m 的梯子贴靠在铅直的墙上, 假设其下端沿地板离开墙角而滑动. 当梯子下端离开墙角 3m 时, 已知梯子的下端离开墙角滑动速率为 2.2m/s, 问此时梯子的上端向下滑的速率为多少?

15. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$, 并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. 设 $x_1 > 0$, $x_{n+1} = 3 + \frac{4}{x_n}$ ($n = 1, 2, \dots$), 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在并求其值.

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $(0, 1)$ 内可导, $c \in (0, 1)$. 证明: $\exists \xi, \eta \in [0, 1]$, 使得

$$2\eta f(1) + (c^2 - 1)f'(\eta) = f(\xi).$$

CHAPTER 10

2021-2022 学年微积分 (一) (上) 期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 令 $A = \max\{a, b, c\}$, 则

$$\frac{1}{3}A^n \leq \frac{a^n + b^n + c^n}{3} \leq A^n, \quad \frac{1}{\sqrt[n]{3}}A \leq \left(\frac{a^n + b^n + c^n}{3}\right)^{\frac{1}{n}} \leq A.$$

由夹逼准则知, 原式 $= A = \max\{a, b, c\}$.

2. **Solution.**

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+x\sqrt{x}} - e^{2x} = \left(\sqrt{1+x\sqrt{x}} - 1\right) - (e^{2x} - 1) \quad (x \rightarrow 0^+) \\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{x} + o(x) - (2x + o(x)) \\ &= -2x + o(x) \sim -2x \quad (x \rightarrow 0^+). \end{aligned}$$

故主部为 $-2x$, 阶数为 1.

3. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln \frac{3+\cos x}{4}} - 1}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln \frac{3+\cos x}{4}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3+\cos x}{4} - 1}{x^2} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

4. **Solution.** 要使 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2 + 4x - 1} - ax - b) = 0$ 成立, 必须

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2x^2 + 4x - 1}}{x} - a - \frac{b}{x} \right) = 0,$$

从而得

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 4x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}} = \sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2x^2 + 4x - 1} - ax \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2x^2 + 4x - 1} - \sqrt{2}x \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2}x \left[\sqrt{1 + \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} \right)} - 1 \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2}x \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} \right) = \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

5. **Solution.** $l = \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left[\frac{1}{e^x - 1} \ln \frac{\ln(1+x)}{x} \right] = \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x - 1} \ln \frac{\ln(1+x)}{x} \right].$

而

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x - 1} \ln \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x - 1} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1-1-x}{2x} = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

所以 $l = e^{-\frac{1}{2}}$.

6. **Solution.** $f(x)$ 的间断点为 $x = k\pi$, $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 理由如下:

$x = 0$ 是跳跃间断点. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \exp \left(\frac{|x|}{\tan x} \right) = \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\tan x} \right) = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \exp \left(\frac{|x|}{\tan x} \right) = \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{\tan x} \right) = e^{-1}.$$

$x = k\pi (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 是无穷间断点. 因为

$$\lim_{x \rightarrow k\pi^+} \exp \left(\frac{|x|}{\tan x} \right) = e^{+\infty} = +\infty.$$

$x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 是可去间断点. 因为

$$\lim_{x \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2}} \exp \left(\frac{|x|}{\tan x} \right) = e^0 = 1.$$

7. **Solution.** 因为

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t}{1 + e^t}, \\
 \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\frac{-\sin t(1+e^t) - \cos t \cdot e^t}{(1+e^t)^2}}{1 + e^t} = \frac{-\sin t(1+e^t) - \cos t \cdot e^t}{(1+e^t)^3},
 \end{aligned}$$

所以

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0} = -\frac{1}{8}.$$

8. **Solution.** 因 $(x^x)' = (e^{x \ln x})' = x^x(1 + \ln x)$, 又

$$\ln y = x^x \ln x,$$

所以 $\frac{1}{y}y' = (x^x \ln x)' = x^x(1 + \ln x) \ln x + x^{x-1}$, 即

$$y' = x^{x^x} x^x \left(\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right).$$

9. **Solution.** 取 $v(x) = x^2$, 它的三阶以上的导数为 0,

$$u^{(k)}(x) = [\ln(1+x)]^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, k = 1, 2, \dots,$$

由 Leibniz 公式 $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$, 得

$$y^{(n)} = x^2 \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} + 2nx \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}} + n(n-1) \frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}.$$

所以

$$y^{(n)}(0) = (-1)^{n-3} n(n-1)(n-3)! = \frac{(-1)^n n!}{n-2} (n > 2).$$

而 $y'(0) = y''(0) = 0$.

10. **Solution.** 因为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^2 \sin x - 2x \cos x}{x^4} = -\frac{x \sin x + 2 \cos x}{x^3}.$$

所以

$$\frac{dy}{d(\cos x)} = \frac{-\frac{x \sin x + 2 \cos x}{x^3} dx}{-\sin x dx} = \frac{x + 2 \cot x}{x^3}.$$

$$\frac{dy}{d(x^3)} = \frac{-\frac{x \sin x + 2 \cos x}{x^3} dx}{3x^2 dx} = -\frac{x \sin x + 2 \cos x}{3x^5}.$$

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. **Solution.** 当 $x = 1$ 时, $y = f(1) = \frac{\pi}{4}$.

而

$$f'(x) = (\ln x + \arctan x)' = \frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2},$$

所以 $f'(1) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, 故

$$\varphi' \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{2}{3}.$$

12. **Solution.** 原方程变为

$$e^{xy}(y + xy') + \frac{y'}{y} - \frac{1}{x+1} = 0,$$

将 $x = 0, y = e$ 代入, 得 $e + \frac{y'(0)}{e} = 1$, 故 $y'(0) = e(1 - e)$.

所以切线方程为 $y = e(1 - e)x + e$.

13. **Solution.** $y'(x) = 2f(x)f'(x)$,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x} - 2 \frac{f(x^3) - f(0)}{x^3} \right] \\ &= f'(0) - 2f'(0) = -f'(0) \\ &= -2.\end{aligned}$$

14. **Solution.** 设梯子上端离墙角距离为 $s(m)$, 下端离开墙角的距离为 $x(m)$, 有一长度为

$$s = \sqrt{5^2 - x^2}.$$

于是 $\frac{ds}{dt} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} \frac{dx}{dt}$.

当 $x = 3m$, $\frac{dx}{dt} = 2.2m/s$ 时, $\frac{ds}{dt} = -\frac{3}{4} \cdot 2.2 = -1.65m/s$.

即梯子上端向下滑的速率为 $1.65m/s$.

15. **Solution.** 因 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$,

且 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$, 所以

$$f(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

当 $x \neq 0$ 时, 初等函数 $f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$ 有定义, 所以连续;

而 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \right)$ 不存在, 所以 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续.

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. **Proof.**

法一. 由题设知 $n > 1$ 时, $x_n > 3$; $n > 2$ 时, $x_n < 3 + \frac{4}{3}$, 即 $\{x_n\}$ 有界.

由 $x_{n+1} - x_n = \frac{4}{x_n} - \frac{4}{x_{n-1}} = \frac{4(x_{n-1} - x_n)}{x_n x_{n-1}}$ 知不能确定 $\{x_n\}$ 的单调性, 但由

$$x_{n+1} - x_{n-1} = \frac{4}{x_n} - \frac{4}{x_{n-2}} = \frac{4(x_{n-2} - x_n)}{x_n x_{n-2}} = \frac{16(x_{n-1} - x_{n-3})}{x_n x_{n-1} x_{n-2} x_{n-3}}$$

知奇子列 $\{x_{2k-1}\}$ 与偶子列 $\{x_{2k}\}$ 均分别单调.

由单调有界原理知奇子列 $\{x_{2k-1}\}$ 与偶子列 $\{x_{2k}\}$ 均收敛.

设 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = l_1$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = l_2$,

在

$$x_{2k+1} = 3 + \frac{4}{x_{2k}}, \quad x_{2k} = 3 + \frac{4}{x_{2k-1}}$$

两边取极限, 得 $l_1 = 3 + \frac{4}{l_2}$ 以及 $l_2 = 3 + \frac{4}{l_1}$, 解得 $l_1 = l_2 = 4$.

因此数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 4$.

法二. 常数 $l = 4$ 满足 $l = 3 + \frac{4}{l}$. 下证数列 $\{x_n\}$ 以 l 为极限.

$$\begin{aligned} 0 \leq |x_{n+1} - l| &= \left| \left(3 + \frac{4}{x_n} \right) - 4 \right| = \frac{|x_n - 4|}{x_n} \\ &\leq \frac{1}{3} |x_n - 4| \\ &\leq \cdots \leq \frac{1}{3^{n-1}} |x_2 - 4|. \end{aligned}$$

由迫敛性知 $|x_n - l|$ 收敛到 0, 故数列 $\{x_n\}$ 以 l 为极限.

17. **Proof.** 构造函数 $F(x) = x^2 f(1) + (c^2 - 1)f(x)$, 则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $(0, 1)$ 内可导.

由 Lagrange 中值定理, $\exists \eta \in (0, 1)$, 使得

$$F(1) - F(0) = F'(\eta),$$

$$\text{即 } 2\eta f(1) + (c^2 - 1)f'(\eta) = (1 - c^2)f(0) + c^2 f(1),$$

因 $(1 - c^2)f(0) + c^2 f(1)$ 是 $f(0)$ 与 $f(1)$ 的加权平均值, 由介值定理知, $\exists \xi \in [0, 1]$, 使得

$$f(\xi) = (1 - c^2)f(0) + c^2 f(1),$$

故 $\exists \xi, \eta \in [0, 1]$, 使得

$$2\eta f(1) + (c^2 - 1)f'(\eta) = f(\xi).$$

CHAPTER 11

2020-2021 学年微积分（一）（上）期中考试

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 设数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则 () .

- A. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$
B. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sqrt{|x_n|}) = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$
C. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + x_n^2) = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$
D. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sin x_n) = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

2. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x = ()$.

- A. 1
B. e
C. e^{a-b}
D. e^{b-a}

3. 设 $F(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ f'(0), & x = 0 \end{cases}$, 其中 $f'(0) = 1$, $f(0) = 0$, 则 $x = 0$ 是 $F(x)$ 的 () .

- A. 连续点
B. 可去间断点
C. 无穷间断点
D. 跳跃间断点

4. 函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f(0) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = ()$.

- A. $-2f'(0)$
B. $-f'(0)$
C. $f'(0)$
D. 0

5. 设 $f(x)$ 具有一阶连续导数, $F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$, 则 $f(0) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的 () .

- A. 充分必要条件
B. 充分条件但非必要条件
C. 必要条件但非充分条件
D. 既非充分又非必要条件

6. 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f'(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$, 则 ().

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

C. $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

D. $f'(0)$ 是 $f'(x)$ 的极值

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] =$ _____.

8. 设 $y = \frac{\cos x}{x^2}$, 则 $\frac{dy}{d(\cos x)} =$ _____.

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right) =$ _____.

10. 曲线 $y = x \left(1 + \arcsin \frac{2}{x} \right)$ 的斜渐近线方程为 _____.

3 基本计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 设 $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x$, $g(x) = cx^3$, 在 $x \rightarrow 0$ 时, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小, 求常数 a, b, c 的值.

12. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 讨论 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

13. 设 $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = t \sin t + \cos t \end{cases}$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$, 求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

14. 设 $y = \frac{x^2}{2-x}$, 计算 $y^{(50)}(0)$.

15. 设 $x = \varphi(y)$ 是函数 $y = x \ln x$ 的反函数, 计算 $\varphi(y)$ 在 $x = e$ 处的二阶导数 $\frac{d^2x}{dy^2}$.

16. 求 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值与最小值.

4 应用题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 如果以每秒 50cm^3 的速度匀速给一个气球充气, 假设气球内气压保持常值且形状始终为球形, 问当气球的半径为 5cm 时, 气球半径增加的速率是多少?

18. 设在 $(-\infty, +\infty)$ 内 $f''(x) > 0$, $f(0) < 0$, 讨论 $F(x) = \frac{f(x)}{x} (x \neq 0)$ 的单调性.

5 综合题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 设 $x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}$ (n 个根式, $a > 0$), 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求出极限值.

20. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上具有连续导数, $f(0) = f(2) = 0$, $M = \max_{x \in (0, 2)} \{|f(x)|\}$. 证明: $\exists \xi \in (0, 2)$, 使得 $|f'(\xi)| \geq M$.

CHAPTER 12

2020-2021 学年微积分（一）（上）期中考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. **Solution.** D.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 分别解方程 $\sin A = 0$, $A + \sqrt{|A|} = 0$, $A + A^2 = 0$, $A + \sin A = 0$,

只有 $A + \sin A = 0$ 具有唯一解 $A = 0$.

2. **Solution.** C.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(a-b)x + ab}{(x-a)(x+b)} \right]^x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(a-b)x + ab}{(x-a)(x+b)} \right]^{\frac{(x-a)(x+b)}{(a-b)x + ab} \cdot \frac{(a-b)x + ab}{(x-a)(x+b)} \cdot x} \\ &= e^{\frac{(a-b)x^2 + abx}{x^2 + (b-a)x - ab}} \\ &= e^{a-b}.\end{aligned}$$

3. **Solution.** B.

因

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1,$$

且 $F(0) = 0$, 所以 $x = 0$ 是 $F(x)$ 的可去间断点.

4. **Solution.** B.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x} - 2 \frac{f(x^3) - f(0)}{x^3} \right] \\ &= f'(0) - 2f'(0) = -f'(0).\end{aligned}$$

5. **Solution.** A.

若 $f(0) = 0$, $F(0) = 0$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)(1 + |\sin x|)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} f'(0) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (1 + |\sin x|) \\ &= f'(0),\end{aligned}$$

即 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

若 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x}$ 存在. 又

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)(1 + |\sin x|) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x} \\ &= f'(0) + f(0) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x}.\end{aligned}$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x}$ 不存在, 所以必须 $f(0) = 0$.

因此 $f(0) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的充分必要条件.

6. Solution. B.

因 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$, 由极限的保号性知存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (-\delta, \delta)$ 时, $f''(x) \geq 0$ 恒成立.

利用 Taylor 展开,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2 = f(0) + \frac{f''(\xi)}{2}x^2 \geq f(0), \quad -\delta < x < \delta,$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间. 故 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. Solution. 0.

利用 $\frac{1}{x} \leq \left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x} + 1$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1}{x} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} x \left(\frac{1}{x} + 1\right)$,

由夹逼定理可知 $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x}\right] = 1$.

8. Solution. $\frac{x \sin x + 2 \cos x}{x^3 \sin x}$.

由链式法则知

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d(\cos x)} &= \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{d(\cos x)}{dx}} \\ &= \frac{-x^2 \sin x - 2x \cos x}{(x^2)^2} \\ &= \frac{-\sin x}{x} \\ &= \frac{x \sin x + 2 \cos x}{x^3 \sin x}.\end{aligned}$$

9. **Solution.** -1 .

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (e^x - 1)}{(e^x - 1) \ln(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) - \left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^2} \\ &= -1.\end{aligned}$$

10. **Solution.** $y = x + 2$.

由题意可知

$$\begin{aligned}k &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(1 + \arcsin \frac{2}{x} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \arcsin \frac{2}{x} \right) = 1, \\ b &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \left(1 + \arcsin \frac{2}{x} \right) - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} x \arcsin \frac{2}{x} = 2.\end{aligned}$$

故斜渐近线方程为 $y = x + 2$.

3 基本计算题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. **Solution.** 利用 Taylor 公式,

$$\begin{aligned}f(x) &= x + a \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) + bx \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \\ &= (1+a)x + \left(b - \frac{a}{2} \right) x^2 + \frac{a}{3} x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

因 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时是等价无穷小, 故 $1+a=0$, $b-\frac{a}{2}=0$, $\frac{a}{3}=c$.

解得 $a=-1$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=-\frac{1}{3}$.

12. **Solution.** 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = \arctan \frac{1}{x^2} - \frac{2x^2}{x^4+1}$.

当 $x=0$ 时, $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2}$.

因 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\arctan \frac{1}{x^2} - \frac{2x^2}{x^4+1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2} = f'(0)$, 所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

13. **Solution.** 因为

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{t \cos t}{\cos t} = t, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{\cos t}.\end{aligned}$$

所以当 $t = \frac{\pi}{4}$ 时, $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$.

14. **Solution.** $y = \frac{x^2}{2-x} = \frac{(2-x)^2 - 4(2-x) + 4}{2-x} = \frac{4}{2-x} - 2 - x.$

利用 $\left(\frac{1}{a-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(a-x)^{n+1}}$, 得

$$y^{(50)}(0) = \left(\frac{4}{2-x}\right)^{(50)} \Big|_{x=0} - 0 = \frac{4 \cdot 50!}{2^{51}} = \frac{50!}{2^{49}}.$$

15. **Solution.** 因为

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\ln x + 1}, \quad \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\ln x + 1} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\ln x + 1} \right) \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{x(\ln x + 1)^3}.$$

所以当 $x = e$ 时, $\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{1}{8e}.$

16. **Solution.** 因 $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$, 故 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 内的极值点为 $x = -1$.

计算 $f(-2) = 3$, $f(-1) = 10$, $f(2) = -17$.

故 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上的最大值为 10, 最小值为 -17.

4 应用题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. **Solution.** 设气球的半径为 r , 体积为 V , 则 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

由题意得 $\frac{dV}{dt} = 50$, 故

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dV}{dt} \cdot \frac{dr}{dV} = \frac{50}{4\pi r^2}.$$

当 $r = 5\text{cm}$ 时, $\frac{dr}{dt} = \frac{50}{100\pi} = \frac{1}{2\pi} \text{cm/s}.$

18. **Solution.** $F'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$, 令 $G(x) = xf'(x) - f(x)$, 则 $G'(x) = xf''(x)$.

由 $f''(x) > 0$ 知 $G'(x) = 0$ 具有唯一解 $x = 0$, 且 $G(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

因 $G(0) = -f(0) > 0$, 所以 $G(x) > 0$ 恒成立, 故 $F'(x) = \frac{G(x)}{x^2} > 0$ 恒成立,

即 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增.

5 综合题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. **Proof.** 由题可知 $x_1 = \sqrt{a}$, $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$.

显然 $x_1 = \sqrt{a} < \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$. 设 $x_k \leq \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$, 则

$$x_{k+1} = \sqrt{a + x_k} \leq \sqrt{a + \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}} = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}.$$

所以 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $x_n \leq \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$, 即 $\{x_n\}$ 有上界.

又因为

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{a + x_n} - x_n = \frac{a + x_n - x_n^2}{\sqrt{a + x_n} + x_n} = -\frac{(x_n - \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2})(x_n - \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2})}{\sqrt{a + x_n} + x_n} \geq 0,$$

所以 $\{x_n\}$ 单调递增, 故 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则 $A = \sqrt{a + A}$, 解得 $A = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$.

20. **Proof.** 假设 $\forall x \in (0, 2)$, $|f'(x)| < M$.

由 Lagrange 中值定理, $\exists \eta, \delta \in (0, 2)$, $|f(x)| = |f'(\eta)|x$, $|f(x)| = |f'(\delta)|(x - 2)$.

所以 $|f(x)| < Mx$, $|f(x)| < M(2 - x)$, 相加得 $|f(x)| < M$, 这与 $M = \max_{x \in (0, 2)} \{|f(x)|\}$ 矛盾.

所以 $\exists \xi \in (0, 2)$, 使得 $|f'(\xi)| \geq M$.

CHAPTER 13

2019-2020 学年微积分（一）（上）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \sin^2 n + 3 \cos^2 n}$.

2. 当 $x \rightarrow 1$ 时, 求 $\sqrt[3]{x} - 1$ 关于 $x - 1$ 的主部.

3. 计算极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x \ln \cos x}$.

4. 计算极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - \sin x)^{\frac{1}{x^2}}$.

5. 设 $f(x) = x^{\tan x}$. 求 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

6. 求曲线 $\cos x + \ln(y - x) = y^2$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程.

7. 设函数 $f(x)$ 二阶可导, 求 $y = f(\sin x)$ 的二阶导数.

8. 设 $y = x \ln x$, 求 $y^{(6)}$.

9. 求 a, b 的值使得函数 $f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & x < 0, \\ b - \sin 2x, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续并且可导.

10. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = t + \ln t \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. 设函数 $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x-1}{x+1}$. 指出 $f(x)$ 的间断点, 并判断其类型.

12. 设 $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ 为 n 次实系数多项式. 证明当 n 为奇数时, 方程 $f(x) = 0$ 至少有一个实根.

13. 设 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处可导, $f(2) \neq 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f\left(2 + \frac{1}{x}\right)}{f(2)} \right]^x$.

14. 设一个雪球以 $2\text{cm}^3/\text{min}$ 的速度融化. 设雪球在融化过程中始终保持球形. 求当雪球半径为 10cm 的时候半径变化的速率.

15. 写出函数 $f(x) = x \cos x$ 带 Peano 余项的五阶 Maclaurin 公式.

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. 设数列 $\{x_n\}$ 由递推公式 $x_1 = \sqrt{6}$, $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$ 给出. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在并求极限值.

17. 设 $0 < a < b$, 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导. 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\xi f'(\xi) - f(\xi) = \frac{af(b) - bf(a)}{b - a}.$$

CHAPTER 14

2019-2020 学年微积分 (一) (上) 期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 显然 $\sqrt[n]{2} \leq \sqrt[n]{2 \sin^2 n + 3 \cos^2 n} \leq \sqrt[n]{3}$.

由夹逼定理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \sin^2 n + 3 \cos^2 n} = 1$.

2. **Solution.**

$$\sqrt[3]{x} - 1 = (1 + x - 1)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \frac{1}{3}(x - 1).$$

故主部为 $\frac{1}{3}(x - 1)$.

3. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{-\frac{1}{2}x^3} \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{3x^2} = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

4. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - \sin x)^{\frac{1}{x^2}} = \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln (e^x - \sin x) \right] \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{e^x - \sin x} \cdot \frac{1}{2x} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{2x}} \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{2} \right) = \sqrt{e}. \end{aligned}$$

5. **Solution.** 因为 $\ln f(x) = \tan x \ln x$,

所以

$$f'(x) = f(x) \cdot (\tan x \ln x)' = x^{\tan x} \left(\sec^2 x \ln x + \frac{\tan x}{x} \right),$$

代入 $x = \frac{\pi}{4}$ 得 $f' \left(\frac{\pi}{4} \right) = 1 + \frac{\pi}{2} \ln \frac{\pi}{4}$.

6. **Solution.** 方程两边对 x 求导得到

$$-\sin x + \frac{1}{y-x}(y' - 1) = 2yy',$$

代入 $x = 0, y = 1$ 解得 $y'(0) = -1$, 所以切线方程为 $x + y = 1$.

7. **Solution.**

$$y' = f'(\sin x) \cos x,$$

$$y'' = f''(\sin x) \cos^2 x - f'(\sin x) \sin x.$$

8. **Solution.**

法一. 根据 Leibniz 法则得到

$$\begin{aligned} y^{(6)} &= x (\ln x)^{(6)} + 6 (\ln x)^{(5)} \\ &= x \left(\frac{1}{x}\right)^{(5)} + 6 \left(\frac{1}{x}\right)^{(4)} \\ &= \frac{24}{x^5}. \end{aligned}$$

法二.

$$y^{(6)} = (1 + \ln x)^{(5)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(4)} = \frac{24}{x^5}.$$

9. **Solution.** $f(0^+) = b$, $f(0^-) = 1$, 由连续性知 $b = 1$.

求导得到 $f'_+(0) = -2$, $f'_-(0) = a$, 由导数存在知 $a = -2$.

10. **Solution.**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1 + \frac{1}{t}}{2t + 2} = \frac{1}{2t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{2t^2} \cdot \frac{1}{2t + 2} = -\frac{1}{4t^2(t + 1)}.$$

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. **Solution.** 函数 $f(x)$ 的间断点为 $0, -1$. 因

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty, \quad f(-1^+) = -\frac{\pi e}{2}, \quad f(-1^-) = \frac{\pi e}{2},$$

所以 $x = 0$ 是无穷间断点, $x = -1$ 是跳跃间断点.

12. **Solution.** 当 n 为奇数时, 显然有

$$f(+\infty) = +\infty, \quad f(-\infty) = -\infty.$$

于是存在 x_1, x_2 使得 $f(x_1) < 0 < f(x_2)$.

函数 $f(x)$ 显然连续, 由介值定理知, 存在 $x_0 \in (x_1, x_2)$ 使得 $f(x_0) = 0$,

即方程 $f(x) = 0$ 至少有一个实根.

13. **Solution.**

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(2 + \frac{1}{x})}{f(2)} \right]^x &= \exp \left[\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{f(2 + \frac{1}{x})}{f(2)} \right] \\
 &= \exp \left[\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{f(2 + \frac{1}{x}) - f(2)}{f(2)} \right) \right] \\
 &= \exp \left[\frac{1}{f(2)} \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[f\left(2 + \frac{1}{x}\right) - f(2) \right] \right] \\
 &= \exp \left[\frac{1}{f(2)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(2 + \frac{1}{x}) - f(2)}{\frac{1}{x}} \right] \\
 &= \exp \left[\frac{f'(2)}{f(2)} \right].
 \end{aligned}$$

14. **Solution.** 根据几何关系得到

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

两边对 t 求导得到

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}.$$

代入 $\frac{dV}{dt} = -2$ 以及 $r = 10$ 解得 $\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{200\pi}$.即半径以 $\frac{1}{200\pi}$ cm/min 的速度减小.15. **Solution.** 先写出

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4),$$

进而

$$f(x) = x \cos x = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + o(x^5).$$

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. **Proof.** 显然 $x_2 > x_1$, 设 $x_{k+1} > x_k$, 由 $x_{k+2}^2 - x_{k+1}^2 = 6 + x_{k+1} - 6 - x_k = x_{k+1} - x_k > 0$ 知 $x_{k+2} > x_{k+1}$.由数学归纳法知 $\{x_n\}$ 严格单调增加.另外显然 $x_1 < 3$, 设 $x_k < 3$, 由 $x_{k+1} = \sqrt{6 + x_k} < \sqrt{9} = 3$ 知 $x_{k+1} < 3$.由数学归纳法知 $\{x_n\}$ 有上界 3. 根据单调有界收敛准则知数列 $\{x_n\}$ 极限存在.设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$, 对 $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$ 两边取极限得到 $L = \sqrt{6 + L}$, 解得 $L = 3$.17. **Proof.** 显然函数 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ 和 $G(x) = \frac{1}{x}$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导,并且 $G(x)$ 的导数不为 0. 由 Cauchy 中值定理知存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \xi f'(\xi) - f(\xi).$$

两边变号即得所证.

CHAPTER 15

2018-2019 学年微积分（一）（上）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 求极限 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + k^\alpha}$, 其中 $\alpha \in (0, 1)$.

2. 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{2 \tan x} + \sin x^2)}{x}$.

3. 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

4. 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax + bx + b}{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}} = 2$, 求常数 a, b 的值.

5. 设可微函数 $y = y(x)$ 由方程 $y + ye^x = 2 \cos y \sin x - 4x$ 确定, 求 $y'(0)$.

6. 求曲线 $r = 2 \sin 3\theta$ 在 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 处的切线方程.

7. 设函数 $f(x) = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$, 求微分 $dy|_{x=0}$.

8. 设函数 $y = x + x^3$ 的反函数为 $x = g(y)$, 求 $g''(2)$.

9. 设 $y = x^2 \cos 2x$, 求 $y^{(5)}\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

10. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x = t \cos t - \sin t, \\ y = \cos t \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. 讨论函数 $f(x) = \frac{\sin \pi x}{x^2 - 1}$ 的连续性, 并对函数的间断点判别类型.

12. 求无穷小量 $u(x) = \left(\frac{1 + 2 \cos x}{3}\right)^{x^2} - 1 (x \rightarrow 0)$ 的主部和阶数.

13. 求函数与 $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x \geq 0, \\ x, & x < 0 \end{cases}$ 的导函数 $f'(x)$, 并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

14. 已知 $a > 1$, $n \geq 1$, 证明不等式 $\frac{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}}{\ln a} < \frac{\sqrt[n]{a}}{n^2}$.

15. 一架飞机在 H 米高空以 a 米/秒的速度水平匀速飞行. 设在 $t = 0$ 时刻有一探照灯位于飞机正下方的地面上跟踪飞机. 问 t 秒以后探照灯应以怎样的角速度转动才能照到飞机?

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. 设数列 $\{x_n\}$ 由递推公式 $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + \frac{2}{x_n^2}$ 给出. 证明数列 $\{x_n\}$ 无界.

17. 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 有定义并且对于任何 $x, y \in [a, b] (x \neq y)$ 成立

$$|f(x) - f(y)| \leq M(x - y)^2,$$

其中 M 为常数. 证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒为常数.

CHAPTER 16

2019-2020 学年微积分 (一) (上) 期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 因 $\frac{n}{n+n^\alpha} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k^\alpha} < 1$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+n^{\alpha-1}} = 1$,

由夹逼定理知 $l = 1$.

2. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{2 \tan x} + \sin x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2 \tan x} + \sin x^2 - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x + \sin x^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} \\ &= 2. \end{aligned}$$

3. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1)^{\frac{1}{\ln x}} = \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e^x - 1)}{\ln x} \right] \\ &= \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{e^x}{e^x - 1}}{\frac{1}{x}} \right] = \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x e^x}{x} \right] \\ &= \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x \right] = e. \end{aligned}$$

4. **Solution.** 计算

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax + bx + b}{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[(a+b)x + b](\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3})}{(3x+1) - (x+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2[(a+b)x + b]}{x-1} \\ &= 2. \end{aligned}$$

$$\text{因此有 } \begin{cases} a + 2b = 0, \\ a + b = 1. \end{cases} \quad \text{解得 } a = 2, b = -1.$$

5. **Solution.** 方程两边对 x 求导得到

$$y' + y'e^x + ye^x = -2 \sin y \sin x \cdot y' + 2 \cos y \cos x - 4,$$

代入 $x = 0, y = 0$ 解得 $y'(0) = -1$.

6. **Solution.** 曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = 2 \sin 3\theta \cos \theta, \\ y = 2 \sin 3\theta \sin \theta. \end{cases}$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{6 \cos 3\theta \sin \theta + 2 \sin 3\theta \cos \theta}{6 \cos 3\theta \cos \theta - 2 \sin 3\theta \sin \theta}.$$

代入 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 得切线斜率 $k = \sqrt{3}$, 又切点坐标为 $(0, 0)$, 所以切线方程为 $y = \sqrt{3}x$.

7. **Solution.** 因为

$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} + \frac{-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{1-x^2},$$

所以 $dy|_{x=0} = f'(0) dx = 2 dx$.

8. **Solution.** 计算

$$g'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{1+3x^2},$$

$$g''(y) = \frac{d}{dy}(g'(y)) = \frac{d}{dx}(g'(y)) \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{6x}{(1+3x^2)^3}.$$

代入 $x = 1, y = 2$ 得 $g''(2) = -\frac{3}{32}$.

9. **Solution.** 利用 Leibniz 法则得到

$$\begin{aligned} y^{(5)} &= x^2 (\cos 2x)^{(5)} + 5 \cdot 2x (\cos 2x)^{(4)} + 10 \cdot 2 (\cos 2x)^{(3)} \\ &= -32x^2 \sin 2x + 160x \cos 2x + 160 \sin 2x. \end{aligned}$$

代入 $x = \frac{\pi}{2}$ 得 $y^{(5)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -80\pi$.

10. **Solution.**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sin t}{\cos t - t \sin t - \cos t} = \frac{-\sin t}{-t \sin t} = \frac{1}{t}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{-t \sin t} = \frac{1}{t^3 \sin t}. \end{aligned}$$

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. **Solution.** 函数 $f(x)$ 的间断点为 $-1, 1$. 因

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin \pi x}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\pi \cos \pi x}{2x} = \frac{\pi \cos(-\pi)}{-2} = \frac{\pi}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \cos \pi x}{2x} = \frac{\pi \cos \pi}{2} = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

所以 $x = -1, 1$ 均为可去间断点.

12. **Solution.**

$$\begin{aligned}
 u &= \left(\frac{1+2\cos x}{3} \right)^{x^2} - 1 = \exp \left(x^2 \ln \frac{1+2\cos x}{3} \right) - 1 \\
 &\sim x^2 \ln \frac{1+2\cos x}{3} \\
 &\sim \frac{2x^2}{3} (\cos x - 1) \\
 &\sim -\frac{1}{3}x^4.
 \end{aligned}$$

所以 u 的主部为 $-\frac{1}{3}x^4$, 阶数为 4.

13. **Solution.** 当 $x > 0$ 时, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$; 当 $x < 0$ 时, $f'(x) = 1$;

当 $x = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$, 所以 $f'(0) = 1$.

因此

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & x > 0, \\ 1, & x \leq 0. \end{cases}$$

当 $x \neq 0$ 时, $f'(x)$ 显然连续;

当 $x = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1 = f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$, 所以 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

因此 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处连续.

14. **Solution.** 令 $f(x) = a^x$, 显然 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$ 内可导.

由 Lagrange 中值定理知存在 $\xi \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right)$ 使得

$$\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a} = f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right) = f'(\xi) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{a^\xi \ln a}{n(n+1)} < \frac{a^{\frac{1}{n}} \ln a}{n^2},$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}}{\ln a} < \frac{\sqrt[n]{a}}{n^2}.$$

15. **Solution.** 设飞机飞过的距离为 x 米, 飞机与探照灯的连线与竖直方向的夹角为 θ .

由几何关系有 $x = H \tan \theta$, 故

$$\frac{dx}{dt} = a = H \sec^2 \theta \cdot \frac{d\theta}{dt}.$$

当前时刻 $x = at$, 故 $\sec \theta = \frac{\sqrt{H^2 + a^2 t^2}}{H}$, 代入上式得

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{aH}{H^2 + a^2 t^2}.$$

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. **Proof.** 显然 $x_{n+1} - x_n = \frac{2}{x_n^2} > 0$, 即 $\{x_n\}$ 严格单调增加.

若 $\{x_n\}$ 有界, 则 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $a = a + \frac{2}{a^2}$, 此方程无解, 矛盾.

因此 $\{x_n\}$ 无界.

17. **Proof.** 由题可知, $\forall x, y \in [a, b] (x \neq y)$, 有 $0 \leq \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq M|x - y|$.

当 $x \rightarrow y$ 时, $M|x - y| \rightarrow 0$, 由夹逼定理知 $\lim_{x \rightarrow y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = 0$, 即 $f'(x) = 0$.

所以 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒为常数.

CHAPTER 17

2017-2018 学年微积分（一）（上）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 设数列 x_n 满足 $x_1 = 1, x_{n+1} = \sin x_n (n > 1)$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

2. 求数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \left(\pi \sqrt{n^2 + n} \right)$.

3. 计算极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{(\cos x - 1) \ln(1 + x)}$.

4. 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^3 + 2x + 1}{x - 1} = b$, 求常数 a, b 的值.

5. 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} - \frac{|\sin(x-1)|}{x-1} \right]$.

6. 指出函数 $f(x) = \frac{|x|}{\tan x}$ 的间断点, 并确定间断点的类型.

7. 设函数 $y = (2+x)^{\sin x} + \frac{1}{x+1} (x > -2)$, 求微分 $dy|_{x=0}$.

8. 设函数 $v = f(u)$ 有反函数 $u = \varphi(v)$, 满足 $f(0) = \frac{\pi}{2}$, 且 $\varphi(v)$ 是可导的, 在 $v = 0$ 的某个邻域内有 $\varphi'(v) = \frac{1}{2 + \sin v}$, 求复合函数 $y = f^2(x)$ 在 $x = 0$ 处的导数.

9. 设 $y = (x-1)\ln x$, 求 $y^{(10)}(1)$.

10. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x = t \cos t, \\ y = t \sin t \end{cases}$ 确定, 求在 $t = 0$ 时的导数 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. 设函数 $f(x)$ 在原点附近有界, $F(x) = f(x) \cdot \sin(x^2)$, 计算导数 $F'(0)$.

12. 求函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 的导函数 $f'(x)$, 并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某个邻域内有界, 且满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + f(x) \sin x} - 1}{e^{3x} - 1} = 2$, 其中 n 为正整数. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

14. 求无穷小量 $u(x) = x - \arctan x (x \rightarrow 0)$ 的主部和阶数.

15. 一个长方体的铁皮盒子, 其对角线的长度随着长宽高的变化而连续变化. 当长宽高分别是 3m, 4m, 5m 时, 如果此时对角线长度增加的速率为 $5\sqrt{2}\text{m/s}$, 长宽增加的速率分别为 8m/s 和 9m/s, 问此时高是在增加还是在减少? 增加或减少的速率为多少?

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. 证明函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处可导, 但函数本身除零点外处处不连续.

17. 设 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 在 $(0, 3)$ 内一阶可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 3, f(3) = 1$, 证明至少存在一点 $\xi \in (0, 3)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

CHAPTER 18

2017-2018 学年微积分 (一) (上) 期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 显然 $0 < x_2 = \sin x_1 < \frac{\pi}{2}$. 设 $0 < x_k < \frac{\pi}{2}$, 则 $0 < x_{k+1} = \sin x_k < x_k < \frac{\pi}{2}$,

由数学归纳法知 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界 0, 故 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 在方程 $x_{n+1} = \sin x_n$ 两边取极限得到 $l = \sin l$, 解得 $l = 0$.

2. **Solution.**

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\pi\sqrt{n^2+n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cos(\pi\sqrt{n^2+n} - n\pi) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cos\left(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

3. **Solution.**

$$\begin{aligned}l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{(\cos x - 1) \ln(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1\right)(x + o(x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{-\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} \\ &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

4. **Solution.** 由

$$\lim_{x \rightarrow 1} (ax^3 + 2x + 1) = a + 3 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^3 + 2x + 1}{x - 1} \cdot (x - 1) = 0$$

解得 $a = -3$, 从而

$$b = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x^3 + 2x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-9x^2 + 2}{1} = -7.$$

5. **Solution.** 当 $x \rightarrow 1^-$ 时, $e^{\frac{x}{1-x}} \rightarrow +\infty$, $\frac{|\sin(x-1)|}{x-1} \rightarrow -1$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{2}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} - \frac{|\sin(x-1)|}{x-1} \right] = 0 - (-1) = 1.$$

当 $x \rightarrow 1^+$ 时, $e^{\frac{x}{1-x}} \rightarrow 0$, $\frac{|\sin(x-1)|}{x-1} \rightarrow 1$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{2}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} - \frac{|\sin(x-1)|}{x-1} \right] = 2 - 1 = 1.$$

因此 $l = 1$.

6. **Solution.** 函数 $f(x)$ 的间断点为 $x = k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$.

当 $x = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{\tan x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{\tan x} = -1$, 所以 $x = 0$ 为跳跃间断点.

当 $x = k\pi (k \neq 0)$ 时, $\lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{|x|}{\tan x} = \infty$, 所以 $x = k\pi (k \neq 0)$ 为无穷间断点.

当 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时, $\lim_{x \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{|x|}{\tan x} = 0$, 所以 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 为可去间断点.

7. **Solution.** 记 $u = (2+x)^{\sin x}$, $v = \frac{1}{x+1}$, 则 $\ln u = \sin x \cdot \ln(2+x)$, 所以

$$du = u \cdot d(\sin x \ln(2+x)) = (2+x)^{\sin x} \left(\cos x \ln(2+x) + \frac{\sin x}{2+x} \right) dx,$$

$$dv = -\frac{1}{(x+1)^2} dx.$$

代入 $x = 0$ 得 $dy|_{x=0} = du|_{x=0} + dv|_{x=0} = (\ln 2 - 1) dx$.

8. **Solution.**

$$\begin{aligned} y'(0) &= 2f(x)f'(x)|_{x=0} \\ &= 2f(0)f'(0) \\ &= \frac{2f(0)}{\varphi'(\frac{\pi}{2})} = 3\pi. \end{aligned}$$

9. **Solution.** $y' = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$, 所以

$$\begin{aligned} y^{(10)} &= (\ln x)^{(9)} - \left(\frac{1}{x}\right)^{(9)} \\ &= \frac{(-1)^8 8!}{x^9} - \frac{(-1)^9 9!}{x^{10}}. \end{aligned}$$

代入 $x = 1$ 得 $y^{(10)}(1) = 8! + 9! = 10 \cdot 8!$.

10. **Solution.** 因为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t + t \cos t}{\cos t - t \sin t},$$

所以 $\frac{dy}{dx} \Big|_{t=0} = 0$, 且

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \left(\frac{\sin t + t \cos t}{\cos t - t \sin t} \right)'_t \cdot \frac{1}{\cos t - t \sin t} = \frac{2+t^2}{(\cos t - t \sin t)^3},$$

$$\text{所以 } \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = 2.$$

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. **Solution.**

$$\begin{aligned} F'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \sin(x^2) - 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x f(x) = 0. \end{aligned}$$

12. **Solution.** 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = \frac{x \sin x - 1 + \cos x}{x^2}$;

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos x}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{所以 } f'(x) = \begin{cases} \frac{x \sin x - 1 + \cos x}{x^2}, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

当 $x \neq 0$ 时, $f'(x)$ 显然连续. 又

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x - 1 + \cos x}{x^2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = f'(0),$$

所以 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. 综上所述, $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处连续.

13. **Solution.** 由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某个邻域内有界, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \sin x = 0$, 故

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + f(x) \sin x} - 1}{e^{3x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \sin x}{n \cdot 3x} \\ &= \frac{1}{3n} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2, \end{aligned}$$

从而 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 6n$.

14. **Solution.** 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x)}{cx^r} = 1$, 则

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{cx^r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{crx^{r-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x^2}{crx^{r-1}},$$

$$\text{因此必须 } \begin{cases} r - 1 = 2, \\ cr = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } r = 3, c = \frac{1}{3}.$$

所以 $u(x)$ 的主部为 $\frac{1}{3}x^3$, 阶数为 3.

15. **Solution.** 设 t 时刻长方体的长宽高及对角线长分别为 $x(t), y(t), z(t), s(t)$, 则

$$s^2(t) = x^2(t) + y^2(t) + z^2(t).$$

方程两边对 t 求导得

$$s(t)s'(t) = x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + z(t)z'(t).$$

将 $x(t) = 3\text{m}, y(t) = 4\text{m}, z(t) = 5\text{m}, s(t) = 5\sqrt{2}\text{m}, x'(t) = 8\text{m/s}, y'(t) = 9\text{m/s}, s'(t) = 5\sqrt{2}\text{m/s}$

代入上式得 $z'(t) = -2\text{m/s}$, 说明此时长方体的高在减少, 减少的速率为 2m/s .

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. **Proof.** 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f'(0) = 0$.

考虑非零点 a . 若 $a \in \mathbf{Q}$, 取点列 $\{x_n, x_n \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}\}$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$,

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0 \neq f(a) = a^2$, 说明 $f(x)$ 在 $x = a$ 处不连续.

同理可证当 $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ 时, $f(x)$ 也不连续. 所以函数除零点外处处不连续.

17. **Proof.** 由于 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 由介值定理, 存在 $\eta \in (0, 1)$ 使得 $f(0) < f(\eta) = 1 < f(1)$.

$f(x)$ 在 $[\eta, 3]$ 上连续, 在 $(\eta, 3)$ 内可导, 由 Rolle 定理知存在 $\xi \in (\eta, 3) \subset (0, 3)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

CHAPTER 19

2016-2017 学年微积分（一）（上）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 设数列 x_n 满足 $x_1 > 0, x_{n+1} = x_n \cdot \frac{n+10}{3n-2} (n > 1)$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

2. 计算极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$ ($a, b, c > 0$ 是常数) .

3. 计算极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) + x^2 \sin \frac{1}{x}}{(\cos x + 1) \ln(1+x)}$.

4. 已知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^3 + 2x + 1}{x - 1} = b$, 求常数 a, b 的值.

5. 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + 2^{\frac{1}{x}}}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$.

6. 指出函数 $f(x) = \frac{\sin(x^2 - 3x + 2)}{x(x-1)|x-2|}$ 的间断点, 并判断间断点的类型.

7. 设函数 $y = \sqrt{\frac{e^x}{x+1}} \sqrt{e^x + 1} (x > -1)$, 求微分 $dy|_{x=0}$.

8. 设函数 $v = f(u)$ 有反函数 $u = \varphi(v)$, 满足 $f(0) = 0$, 且 $\varphi(v)$ 是可导的, 在 $v = 0$ 的某个邻域内有 $\varphi'(v) = \frac{1}{2 + \sin v}$, 求复合函数 $y = f(2x + x^2)$ 在 $x = 0$ 处的导数.

9. 设 $y = \ln(2x^2 - 3x + 1)$, 求 $y^{(10)}(0)$.

10. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ 确定, 求在 $t = \frac{\pi}{4}$ 时的导数 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. 设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处连续, $F(x) = (e^x - e^a)f(x)$, 计算导数 $F'(a)$.

12. 求函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 的导函数 $f'(x)$, 并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处二阶可导, 且 $f(1+x) - 3f(1-x) \sim 3x^2 (x \rightarrow 0)$, 求 $f(1), f'(1), f''(1)$ 的值.

14. 求无穷小量 $u(x) = \arcsin x - \arctan x (x \rightarrow 0)$ 的主部和阶数.

15. 一根长为 5 米的竹竿斜靠着墙, 地面与墙面垂直, 竹竿在地面的投影也与墙面垂直. 设墙面和地面是光滑的, 使得竹竿顶端 A 沿着墙壁竖直往下滑动, 同时, 底端 B 沿着其投影线向外滑动. 如果在底端 B 距离墙根为 3 米时, 点 B 的速度为 4 米/秒, 问此时顶端 A 下滑的速度为多少?

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. 由函数在一点可导可否推出它在该点的某个邻域内连续? 认为可以请证明, 认为不行请举反例.

17. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 设正实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 满足 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$.
证明: 存在三个不相等的实数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (0, 1)$, 使得 $\frac{\lambda_1}{f'(\xi_1)} + \frac{\lambda_2}{f'(\xi_2)} + \frac{\lambda_3}{f'(\xi_3)} = 1$.

CHAPTER 20

2016-2017 学年微积分 (一) (上) 期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.**

法一. 当 $n > 22$ 时, $\frac{n+10}{3n-2} < \frac{1}{2}$, 所以 $0 < x_{n+1} < \frac{1}{2}x_n < \cdots < \frac{1}{2^{n-22}}x_{22}$,

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-22}}x_{22} = 0$, 由夹逼定理得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

法二. 当 $n > 6$ 时, $\frac{n+10}{3n-2} < 1$, 所以 $0 < x_{n+1} < x_n < \cdots < x_6$, 由单调有界定理知数列 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+10}{3n-2} = \frac{1}{3}a,$$

解得 $a = 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

2. **Solution.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[\frac{a^x + b^x + c^x}{3} - 1 \right]} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \left[\frac{(a^x - 1) + (b^x - 1) + (c^x - 1)}{x} \right]} \\ &= e^{\frac{1}{3}(\ln a + \ln b + \ln c)} \\ &= \sqrt[3]{abc}. \end{aligned}$$

3. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) + x^2 \sin \frac{1}{x}}{(\cos x + 1) \ln(1 + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) + x^2 \sin \frac{1}{x}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{2x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{2x} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

4. **Solution.** 原极限式可变形为

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^3 + (2-b)x + 1 + b}{x-1},$$

得 $a = 0, 2 - b = 0$, 即 $a = 0, b = 2$.

5. **Solution.** 当 $x \rightarrow 0^-$ 时, $2^{\frac{1}{x}} \rightarrow 0$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+x+2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 1.$$

当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $2^{\frac{1}{x}} \rightarrow +\infty$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+x+2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 1.$$

因此 $l = 1$.

6. **Solution.** 函数 $f(x)$ 的间断点为 $x = 0, 1, 2$.

当 $x = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$, 所以 $x = 0$ 为无穷间断点.

当 $x = 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin[(x-1)(x-2)]}{x(x-1)|x-2|} = -1$, 所以 $x = 1$ 为可去间断点.

当 $x = 2$ 时, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-1)(x-2)}{-x(x-1)(x-2)} = -\frac{1}{2}$, 所以 $x = 2$ 为跳跃间断点.

7. **Solution.** $\ln y = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{e^x}{x+1} \right) + \ln \sqrt{e^x + 1} \right] = \frac{1}{2} \left[x - \ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(e^x + 1) \right]$,

所以

$$\begin{aligned} y' &= y \cdot \frac{1}{2} \left[x - \ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(e^x + 1) \right]' \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{e^x}{x+1} \sqrt{e^x + 1}} \left[1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x}{e^x + 1} \right]. \end{aligned}$$

代入 $x = 0$ 得 $dy|_{x=0} = y'(0) dx = \frac{\sqrt[4]{2}}{8} dx$.

8. **Solution.**

$$\begin{aligned} y'(0) &= f'(2x+x^2)(2+2x)|_{x=0} \\ &= 2f'(0) \\ &= \frac{2}{\varphi'(0)} = 4. \end{aligned}$$

9. **Solution.** $y = \ln(x-1) + \ln(2x-1)$, 所以

$$y^{(10)} = \frac{(-1)^9 9!}{(x-1)^{10}} + \frac{(-1)^9 9! \cdot 2^{10}}{(2x-1)^{10}}.$$

代入 $x = 0$ 得 $y^{(10)}(0) = -9! \cdot (2^{10} + 1)$.

10. **Solution.** 因为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3 \sin^2 t \cos t}{-3 \cos^2 t \sin t} = -\tan t,$$

所以 $\frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -1$, 且

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = (-\tan t)' \cdot \frac{1}{-3 \cos^2 t \sin t} = \frac{1}{3 \cos^4 t \sin t},$$

所以 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. **Solution.**

$$\begin{aligned} F'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(e^x - e^a)f(x)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^a(e^{x-a} - 1)f(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} e^a f(x) \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} \\ &= e^a f(a). \end{aligned}$$

12. **Solution.** 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$.

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0,$$

$$\text{所以 } f'(x) = \begin{cases} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

当 $x \neq 0$ 时, $f'(x)$ 显然连续. 又

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = 0 = f'(0),$$

所以 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. 综上所述, $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处连续.

13. **Solution.** 由题意可知 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(1+x) - 3f(1-x)] = -2f(1) = 0$, 所以 $f(1) = 0$.

且

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - 3f(1-x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} - 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x) - f(1)}{-x} \\ &= 4f'(1) = 0, \end{aligned}$$

所以 $f'(1) = 0$.

又

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - 3f(1-x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(1+x) - 3f'(1-x)}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(1+x) - f'(1)}{2x} - 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(1-x) - f'(1)}{-2x} \\ &= -f''(1) = 3, \end{aligned}$$

所以 $f''(1) = -3$.

14. **Solution.** 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x)}{cx^r} = 1$, 则

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \arctan x}{cx^r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1+x^2}}{crx^{r-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x^2 + (1 - \sqrt{1-x^2})}{crx^{r-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \frac{1}{2}x^2}{crx^{r-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2}x^2}{crx^{r-1}}, \end{aligned}$$

因此必须 $\begin{cases} r-1=2, \\ cr=\frac{3}{2}, \end{cases}$ 解得 $r=3, c=\frac{1}{2}$.

所以 $u(x)$ 的主部为 $\frac{1}{2}x^3$, 阶数为 3.

15. **Solution.** 设 t 时刻竹竿底端距离墙根的水平距离 $x(t)$, 竹竿顶端距离墙根的垂直距离为 $y(t)$, 则

$$x^2(t) + y^2(t) = 25.$$

方程两边对 t 求导得

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 0,$$

将 $x(t) = 3\text{m}$, $y(t) = 4\text{m}$, $\frac{dx}{dt} = 4\text{m/s}$

代入上式得 $\frac{dy}{dt} = -3\text{m/s}$, 即竹竿顶端下滑的速度为 3m/s .

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. **Proof.** 不能. 反例: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$

$$\text{计算 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f'(0) = 0$.

考虑非零点 a . 若 $a \in \mathbf{Q}$, 取点列 $\{x_n, x_n \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}\}$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$,

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0 \neq f(a) = a^2$, 说明 $f(x)$ 在 $x = a$ 处不连续.

同理可证当 $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ 时, $f(x)$ 也不连续. 所以函数除零点外处处不连续.

于是, 函数在 $x = 0$ 处可导, 但在该点的任何邻域内不连续.

17. **Proof.** 由于 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(0) = 0 < \lambda_1 < 1 = f(1)$,

由介值定理, 存在 $c_1 \in (0, 1)$ 使得 $f(c_1) = \lambda_1$.

又因为 $f(c_1) = \lambda_1 < \lambda_1 + \lambda_2 < 1 = f(1)$,

在区间 $[c_1, 1]$ 上应用介值定理, 存在 $c_2 \in (c_1, 1)$ 使得 $f(c_2) = \lambda_1 + \lambda_2$.

在区间 $[0, c_1], [c_1, c_2], [c_2, 1]$ 上对函数 $f(x)$ 依次使用 Lagrange 中值定理,

存在 $\xi_1 \in (0, c_1), \xi_2 \in (c_1, c_2), \xi_3 \in (c_2, 1)$, 使得

$$\begin{aligned} f'(\xi_1) &= \frac{f(c_1) - f(0)}{c_1 - 0} = \frac{\lambda_1}{c_1}, \\ f'(\xi_2) &= \frac{f(c_2) - f(c_1)}{c_2 - c_1} = \frac{\lambda_2}{c_2 - c_1}, \\ f'(\xi_3) &= \frac{f(1) - f(c_2)}{1 - c_2} = \frac{\lambda_3}{1 - c_2}. \end{aligned}$$

于是

$$\frac{\lambda_1}{f'(\xi_1)} + \frac{\lambda_2}{f'(\xi_2)} + \frac{\lambda_3}{f'(\xi_3)} = c_1 + (c_2 - c_1) + (1 - c_2) = 1.$$

CHAPTER 21

2015-2016 学年微积分（一）（上）期中考试

1 基本计算题 (每小题 5 分, 共 60 分)

1. 计算数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right)$.

2. 计算极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$.

3. 计算极限 $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln \left(x \sin \frac{1}{x} \right)$.

4. 已知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{1 - x} - ax - b \right) = 0$, 求常数 a, b 的值.

5. 求当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小 $u(x) = \arcsin x - x$ 的主部与阶数.

6. 设函数 $y = \ln \sqrt{\frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{x}}$, 求 $y'(1)$.

7. 设函数 $y = \frac{\sin x}{x}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{dy}{d(\cot x)}$.

8. 设函数 $f(x) = \frac{1}{2^x} - x^3$, $x = \varphi(y)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数, 求 $\varphi'(y)|_{y=1}$.

9. 设函数 $y = \frac{1}{2x^2 - 3x + 1}$, 求 $y^{(10)}(x)$.

10. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t - \arctan t \end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

11. 求函数 $f(x) = \frac{x \sin(1-x)}{|x|(x^2-1)}$ 的间断点, 并判断其类型.

12. 一架巡逻直升机在距地面 3km 的高度以 120km/h 匀速地沿一条水平笔直的高速公路向前飞行, 飞行员观察到迎面驶来一辆汽车. 设汽车行进的速度为匀速, 当直升机与汽车间的距离为 5km 时通过雷达测出此距离以 160km/h 的速率减小, 试求汽车行进的速度.

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

13. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$, 并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

14. 设 $y = y(x)$ 由方程 $y = \sin(x+y)$ 确定, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

15. 设函数 $f(x)$ 满足 $f'(0) = 0$, $f''(0)$ 存在, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3}$.

16. 设 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数, 在 $x=1$ 处可导, 在 $x=0$ 附近满足

$$f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = 8x + o(x),$$

求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程.

17. 设 $x_1=2$, $x_n=2+\frac{1}{x_{n-1}}(n>1)$, 证明 $\lim_{n\rightarrow\infty} x_n$ 存在, 并求其值.

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

18. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有二阶导数, 且 $f(a)=f(b)=0$, $f'_+(a) \cdot f'_-(b) > 0$, 证明:

- (1) 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f(\xi)=0$;
- (2) 至少存在一点 $\eta \in (a, b)$ 使得 $f''(\eta)=0$.

19. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 且有正常数 a, b , 使得 $|f(x)| \leq a$, $|f''(x)| \leq b$. 证明: 对任意 $c \in (0, 1)$, 有 $|f'(c)| \leq 2a + \frac{b}{2}$.

CHAPTER 22

2015-2016 学年微积分 (一) (上) 期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 5 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 设 $x_n = \frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n}$, 则

$$\frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2 + n + n} < x_n < \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2 + n + 1},$$

又

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2 + n + n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2(n^2 + 2n)} = \frac{1}{2}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2 + n + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2(n^2 + n + 1)} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

由夹逼定理得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$.

2. **Solution.**

$$\begin{aligned}l &= \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right) \right] \\ &= \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} - 1 \right) \right] \\ &= \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{n} \left(\frac{(e^x - 1) + (e^{2x} - 1) + \cdots + (e^{nx} - 1)}{x} \right) \right] \\ &= \exp \left[\frac{1}{n} (1 + 2 + \cdots + n) \right] = e^{\frac{n+1}{2}}.\end{aligned}$$

3. **Solution.** 令 $x = \frac{1}{t}$, 则

$$\begin{aligned}l &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x \sin \frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\frac{\sin t}{t})}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin t}{t} - 1}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t - t}{t^3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\cos t - 1}{3t^2} = -\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

4. **Solution.** 原极限式可变形为

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+a)x^2 + (1-a+b)x + 1-b}{1-x},$$

得 $1+a=0, 1-a+b=0$, 即 $a=-1, b=-2$.

5. **Solution.** 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x)}{cx^r} = 1$, 则

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{cx^r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{crx^{r-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{crx^{r-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{crx^{r-1}}, \end{aligned}$$

因此必须 $\begin{cases} r-1=2, \\ cr=\frac{1}{2}, \end{cases}$ 解得 $r=3, c=\frac{1}{6}$.

所以 $u(x)$ 的主部为 $\frac{1}{6}x^3$, 阶数为 3.

6. **Solution.** 因为 $y = \frac{1}{2} \left[\ln \frac{2}{\pi} + \ln \arctan \frac{1}{x} \right]$, 所以

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\arctan \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2(x^2+1) \arctan \frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

代入 $x=1$ 得 $y'(1) = -\frac{1}{4 \arctan 1} = -\frac{1}{\pi}$.

7. **Solution.**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}, \\ \frac{dy}{d(\cot x)} &= \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{d(\cot x)}{dx}} = \frac{x \cos x - \sin x}{-x^2 \csc^2 x} = \frac{\sin^3 x - x \sin^2 x \cos x}{x^2}. \end{aligned}$$

8. **Solution.** 当 $x=0$ 时, $f(0) = \frac{1}{2^0} - 0^3 = 1$. 所以

$$\begin{aligned} \varphi'(y)|_{y=1} &= \frac{1}{f'(0)} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2^x} \ln \frac{1}{2} + 3x^2}|_{x=0} \\ &= \frac{1}{\ln \frac{1}{2}} = -\frac{1}{\ln 2}. \end{aligned}$$

9. **Solution.** 因为 $y = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{2x-1}$, 所以

$$\begin{aligned} y^{(10)}(x) &= \frac{(-1)^{10} 10!}{(x-1)^{11}} - \frac{2 \cdot (-1)^{10} 10! \cdot 2^{10}}{(2x-1)^{11}} \\ &= \frac{10!}{(x-1)^{11}} - \frac{2^{11} \cdot 10!}{(2x-1)^{11}}. \end{aligned}$$

10. **Solution.**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1 - \frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \left(\frac{t}{2} \right)' \cdot \frac{1+t^2}{2t} = \frac{1+t^2}{4t}.$$

11. **Solution.** 函数 $f(x)$ 的间断点为 $x = 0, \pm 1$.

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sin(1-x)}{x(x^2-1)} = -\sin 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \sin(1-x)}{-x(x^2-1)} = \sin 1,$$

所以 $x = 0$ 为跳跃间断点.

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \sin(1-x)}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{2},$$

且函数在 $x = 1$ 处无定义, 所以 $x = 1$ 为可去间断点.

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x \sin(1-x)}{-x(x-1)(x+1)} = \infty, \text{ 所以 } x = -1 \text{ 为无穷间断点.}$$

12. **Solution.** 设 $x(t)$ 为 t 时刻飞机与汽车的水平距离, $y(t)$ 为 t 时刻飞机与汽车的距离, 则

$$x^2(t) + h^2 = y^2(t),$$

其中 $h = 3\text{km}$, 方程两边对 t 求导得

$$x \frac{dx}{dt} = y \frac{dy}{dt},$$

$$\text{由题设知, 在 } t = t_0 \text{ 时刻, } y(t_0) = 5\text{km}, \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=t_0} = -160\text{km/h}, \quad x(t_0) = 4\text{km},$$

$$\text{代入上式得 } \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_0} = \frac{y(t_0)}{x(t_0)} \cdot \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=t_0} = -200\text{km/h},$$

所以汽车行进的速度为 80km/h .

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

13. **Solution.** 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$.

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = 0,$$

$$\text{所以 } f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

当 $x \neq 0$ 时, $f'(x)$ 显然连续. 又 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$ 不存在,

所以 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续. 综上所述, $f'(x)$ 在 $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ 处连续.

14. **Solution.** 在方程 $y = \sin(x+y)$ 两边对 x 求导得

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x+y) \cdot \left(1 + \frac{dy}{dx} \right),$$

$$\text{解得 } \frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x+y)}{1 - \cos(x+y)}.$$

在方程 $y' = \cos(x+y)(1+y')$ 两边再对 x 求导得

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin(x+y) \cdot \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)^2 + \cos(x+y) \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

解得

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\sin(x+y)(1+y')^2}{1 - \cos(x+y)} = \frac{-\sin(x+y)}{[1 - \cos(x+y)]^3}.$$

15. **Solution.** 由于 $f''(0)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内可导.

由 Lagrange 中值定理, 存在 ξ 介于 x 与 $\ln(1+x)$ 之间, 使得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\xi)(x - \ln(1+x))}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\xi) - f'(0)}{\xi - 0} \cdot \frac{\xi}{x} \cdot \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}. \end{aligned}$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+x) \rightarrow 0$, 所以由夹逼准则可知 $\xi \rightarrow 0$.

同时, $\frac{\xi}{x}$ 介于 1 与 $\frac{\ln(1+x)}{x}$ 之间, 显然 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi}{x} = 1$. 故

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\xi) - f'(0)}{\xi - 0} \cdot \frac{\xi}{x} \cdot \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} &= f''(0) \cdot \frac{x - \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2} \\ &= \frac{f''(0)}{2}. \end{aligned}$$

16. **Solution.** 因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 从而连续.

在等式 $f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = 8x + o(x)$ 两边令 $x \rightarrow 0$ 得 $f(1) = 0$, 且

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x + o(x)}{x} = 8 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+\sin x) - f(1)}{x} - 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-\sin x) - f(1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+\sin x) - f(1)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} - 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-\sin x) - f(1)}{-\sin x} \cdot \frac{-\sin x}{x} \\ &= 4f'(1). \end{aligned}$$

所以 $f'(1) = 2$.

又 $f(x)$ 的周期为 5, 所以 $f(6) = f(1) = 0$, $f'(6) = f'(1) = 2$,

因此曲线 $y = f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程为 $y = 2(x-6)$ 即 $2x - y - 12 = 0$.

17. **Solution.** 显然 $x_n > 2$. 常数 $l = 1 + \sqrt{2}$ 满足 $l = 2 + \frac{1}{l}$. 下证数列 $\{x_n\}$ 以 l 为极限.

$$\begin{aligned} 0 \leq |x_{n+1} - l| &= \left| \left(2 + \frac{1}{x_n}\right) - 1 - \sqrt{2} \right| = \frac{|x_n - (\sqrt{2} + 1)|}{(\sqrt{2} + 1)x_n} \\ &\leq \frac{1}{2}|x_n - l| \\ &\leq \cdots \leq \frac{1}{2^{n-1}}|x_2 - l|. \end{aligned}$$

由迫敛性知 $|x_n - l|$ 收敛到 0, 故数列 $\{x_n\}$ 以 l 为极限.

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

18. **Proof.** (1) 假设 $\forall x \in (a, b), f(x) \neq 0$, 不妨设 $f(x) > 0$, 则有

$$\begin{aligned}f'_+(a) &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{x - a} \geq 0, \\f'_-(b) &= \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{x - b} \leq 0,\end{aligned}$$

这与 $f'_+(a) \cdot f'_-(b) > 0$ 矛盾, 所以至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f(\xi) = 0$.

(2) 由 Rolle 定理, $\exists \eta_1 \in (a, \xi)$ 使得 $f'(\eta_1) = 0$, $\exists \eta_2 \in (\xi, b)$ 使得 $f'(\eta_2) = 0$.

再由 Rolle 定理, $\exists \eta \in (\eta_1, \eta_2) \subset (a, b)$ 使得 $f''(\eta) = 0$.

所以至少存在一点 $\eta \in (a, b)$ 使得 $f''(\eta) = 0$.

19. **Proof.** 由 Taylor 公式,

$$\begin{aligned}f(0) &= f(c) + f'(c)(0 - c) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(0 - c)^2, \quad 0 < \xi_1 < c < 1, \\f(1) &= f(c) + f'(c)(1 - c) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(1 - c)^2, \quad 0 < c < \xi_2 < 1.\end{aligned}$$

两式相减, 得 $f(1) - f(0) = f'(c) + \frac{1}{2} [f''(\xi_2)(1 - c)^2 - f''(\xi_1)c^2]$, 所以

$$f'(c) = f(1) - f(0) - \frac{1}{2} [f''(\xi_2)(1 - c)^2 - f''(\xi_1)c^2].$$

由 $|f(x)| \leq a$, $|f''(x)| \leq b$, 得 $|f'(c)| \leq 2a + \frac{b}{2} [(1 - c)^2 + c^2] \leq 2a + \frac{b}{2}$.

CHAPTER 23

2014-2015 学年微积分（一）（上）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 计算数列极限 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + n^2 + 2^n)^{\frac{1}{n}}$.

2. 计算极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{\ln(1 + x^3)}$.

3. 计算极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{1 - \cos x}}$.

4. 已知 $y = f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$, 其中 $f'(x) = \arcsin x^2$, 求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

5. 设参数方程 $\begin{cases} x = t - \ln(1+t), \\ y = t^3 + t^2 \end{cases}$ 确定函数 $y = y(x)$, 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

6. 计算曲线 $x^2 - xy + 2y^2 = 2$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程.

7. 设 $x = g(y)$ 是函数 $y = \ln x + \arctan x$ 的反函数, 求 $y = \frac{\pi}{4}$ 处的导数 $\frac{dx}{dy}$ 和 $\frac{d^2x}{dy^2}$.

8. 设函数 $f(x)$ 二阶可导, 计算下列函数的导数 y' 以及 y'' :

(1) $y = f(x^2)$;

(2) $y = (f(x))^2$.

9. 设函数 $y = \frac{(1+x)^2\sqrt{x}}{x^5e^x}$, 使用对数求导法求 $y'|_{x=1}$.

10. 求无穷小量 $u(x) = \cos 2x - \frac{1}{e^{2x^2}} (x \rightarrow 0)$ 的主部.

2 综合题 (每小题 7 分, 共 28 分)

11. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{x+2}, & x \geq 0, \\ \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}, & x < 0 \end{cases}$, 问 $a(a \geq 0)$ 为何值时, $x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点, 并指出该间断点的类型.

12. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导, $f'(0)=0$, $f''(0)=2$. 求 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\tan x) - f(x)}{x^4}$.

13. 设 $f'(x)$ 处处连续, $g(x) = f(x) \sin^2 x$, 求 $g''(0)$.

14. 一个 13 英尺长的梯子斜靠在墙边上, 当梯子的顶端沿着墙面向墙底滑落时, 梯子底端沿地面移动的速度是 5 英尺/秒, 问当梯子底端的地面长度为 12 英尺时, 直角三角形的面积的变化率是多少?

3 证明题 (每小题 6 分, 共 12 分)

15. 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\xi) - f(a)}{g(\xi) - g(a)}$.

16. 设函数 $f(x) = \alpha_1 \varphi(x) + \alpha_2 \varphi(2x) + \cdots + \alpha_n \varphi(nx)$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是常数, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$, 已知对一切实数 x , 有 $|f(x)| \leq |x|$, 试证: $|\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n| \leq 1$.

CHAPTER 24

2014-2015 学年微积分 (一) (上) 期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 当 n 充分大时, $2^n > 1 + n^2$, 所以 $2^n < 1 + n^2 + 2^n < 2 \cdot 2^n$, 因此

$$2 < (1 + n^2 + 2^n)^{\frac{1}{n}} < 2^{1+\frac{1}{n}}.$$

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{1+\frac{1}{n}} = 2,$$

由夹逼定理得 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + n^2 + 2^n)^{\frac{1}{n}} = 2$.

2. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - x^2 \cos x}{3x^2(1+x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{3x^2} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

3. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \tan x - \ln x}{1 - \cos x} \right) \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sec^2 x}{\tan x} - \frac{1}{x}}{\sin x} \right) = \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x \cos x}{x \sin^2 x} \right) \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2} \right) \\ &= e^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

4. **Solution.** 因为 $y' = f' \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \cdot \frac{2}{(x+1)^2}$, 所以 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = f'(-1) \cdot 2 = 2 \arcsin 1 = \pi$.

5. **Solution.**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 + 2t}{1 - \frac{1}{1+t}} = (1+t)(3t+2),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = ((1+t)(3t+2))' \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1+t}} = \frac{(6t+5)(1+t)}{t}.$$

6. **Solution.** 方程 $x^2 - xy + 2y^2 = 2$ 两边求微分得

$$2x dx - (x dy + y dx) + 4y dy = 0,$$

将 $x = 1, y = 1$ 代入上式得 $dy = -\frac{1}{3} dx$, 所以切线方程为 $y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1)$ 即 $x + 3y - 4 = 0$.

7. **Solution.** 函数 $y = \ln x + \arctan x$ 严格单调增加, 当 $y = \frac{\pi}{4}$ 时, $x = 1$.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2}} = \frac{x(1+x^2)}{x^2+x+1}, \text{ 所以 } \left. \frac{dx}{dy} \right|_{y=\frac{\pi}{4}} = \frac{1 \cdot 2}{3} = \frac{2}{3}, \text{ 且}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dy^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dx}{dy} \right) \cdot \frac{dx}{dy} \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{x(1+x^2)}{x^2+x+1} \right) \cdot \frac{x(1+x^2)}{x^2+x+1} \\ &= \frac{(3x^2+1)(x^2+x+1) - x(1+x^2)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} \cdot \frac{x(1+x^2)}{x^2+x+1}. \end{aligned}$$

$$\text{故 } \left. \frac{d^2x}{dy^2} \right|_{y=\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4 \cdot 3 - 2 \cdot 3}{3^2} = \frac{4}{9}.$$

8. **Solution.** (1) $y' = f'(x^2) \cdot 2x$, $y'' = f''(x^2) \cdot (2x)^2 + f'(x^2) \cdot 2 = 4x^2 f''(x^2) + 2f'(x^2)$.

(2) $y' = 2f(x)f'(x)$, $y'' = 2(f'(x))^2 + 2f(x)f''(x)$.

9. **Solution.** $\ln y = 2 \ln(1+x) + \frac{1}{2} \ln x - 5 \ln x - x$, 所以

$$y' = \frac{(1+x)^2 \sqrt{x}}{x^5 e^x} \left(\frac{2}{x+1} - \frac{9}{2x} - 1 \right).$$

$$\text{故 } y'|_{x=1} = \frac{4}{e} \left(1 - \frac{9}{2} - 1 \right) = -\frac{18}{e}.$$

10. **Solution.**

$$\begin{aligned} u(x) &= \cos x - e^{-2x^2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{24}(2x)^4 + o(x^4) \right) - \left(1 - 2x^2 + \frac{(2x^2)^2}{2} + o(x^4) \right) \\ &= -\frac{4}{3}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

所以无穷小量 $u(x)$ 的主部为 $-\frac{4}{3}x^4$.

2 综合题 (每小题 7 分, 共 28 分)

11. **Solution.** $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x+2} = \frac{1}{2}$.

若 $a = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sqrt{-x}}{x} = +\infty$, 此时 $x = 0$ 为无穷间断点.

若 $a \neq 0$,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{a} - \sqrt{a-x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{a-x})(\sqrt{a} + \sqrt{a-x})}{x(\sqrt{a} + \sqrt{a-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x(\sqrt{a} + \sqrt{a-x})} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.\end{aligned}$$

若 $a \neq 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2\sqrt{a}} \neq \frac{1}{2}$, 此时 $x = 0$ 为跳跃间断点.

12. **Solution.** 由于 $f''(0)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的邻域内可导.

由 Lagrange 中值定理, 存在 ξ 介于 $\tan x$ 与 x 之间, 使得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\tan x) - f(x)}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\xi)(\tan x - x)}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\xi) - f'(0)}{\xi - 0} \cdot \frac{\xi}{x} \cdot \frac{\tan x - x}{x^3}.\end{aligned}$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \rightarrow 0$, 所以由夹逼准则可知 $\xi \rightarrow 0$.

同时, $\frac{\xi}{x}$ 介于 1 与 $\frac{\tan x}{x}$ 之间, 显然 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi}{x} = 1$. 故

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\xi) - f'(0)}{\xi - 0} \cdot \frac{\xi}{x} \cdot \frac{\tan x - x}{x^3} &= f''(0) \cdot \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} \\ &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

13. **Solution.** $g'(x) = f'(x) \sin^2 x + f(x) \cdot 2 \sin x \cos x$, 所以 $g'(0) = 0$.

$$\begin{aligned}g''(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) \sin^2 x + f(x) \cdot 2 \sin x \cos x}{x} \\ &= f'(0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} 2f(x) \cos x \cdot \frac{\sin x}{x} \\ &= 2f(0).\end{aligned}$$

14. **Solution.** 设 t 时刻梯子底端的地面长度为 $x(t)$ 英尺, 梯子顶端距地面的距离为 $y(t)$ 英尺,

直角三角形的面积为 $S(t)$ 平方英尺. 则 $x^2 + y^2 = 13^2$, $S = \frac{1}{2}xy$.

方程 $x^2 + y^2 = 13^2$ 两边对 t 求导得 $x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 0$,

此时刻 $x = 12$, 所以 $y = 5$, 又 $\frac{dx}{dt} = 5$, 代入得 $\frac{dy}{dt} = -\frac{12}{5} \cdot 5 = -12$.

故

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \left(x \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt} \right) = \frac{1}{2} (12 \cdot (-12) + 5 \cdot 5) = -\frac{119}{2}.$$

即直角三角形的面积的变化率为 $-\frac{119}{2}$ 平方英尺/秒.

3 证明题 (每小题 6 分, 共 12 分)

15. **Proof.** 令 $F(x) = f(x)g(x) - f(x)g(b) - f(a)g(x)$, 则函数 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导,

且 $F(a) = F(b) = -f(a)g(b)$. 由 Rolle 定理, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$,

即 $f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi) - f'(\xi)g(b) - f(a)g'(\xi) = 0$, 化简得 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\xi) - f(a)}{g(b) - g(\xi)}$.

16. **Proof.** $f(0) = \alpha_1\varphi(0) + \alpha_2\varphi(0) + \cdots + \alpha_n\varphi(0) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha_1\varphi(x) + \alpha_2\varphi(2x) + \cdots + \alpha_n\varphi(nx)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \alpha_1 \frac{\varphi(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \alpha_2 \frac{\varphi(2x)}{2x} \cdot 2 + \cdots + \lim_{x \rightarrow 0} \alpha_n \frac{\varphi(nx)}{nx} \cdot n \\ &= \varphi'(0) (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n) = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n. \end{aligned}$$

因为 $\forall x, |f(x)| \leq |x|$, 所以 $\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| \leq 1$, 令 $x \rightarrow 0$, 得 $|f'(0)| = |\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n| \leq 1$.

CHAPTER 25

2013-2014 学年微积分（一）（上）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 计算数列极限 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{12} \cdots \frac{2n-1}{4n}$.

2. 计算极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x^2} - 3^{x^2}}{(2^x - 3^x)^2}$.

3. 计算极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{x^3}$.

4. 设 $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$, 求 $f'(x)$.

5. 设参数方程 $\begin{cases} x = t + t^2, \\ y = te^t \end{cases}$ 确定了函数 $y = y(x)$, 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

6. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = h(x^2 + y^2)$ 所确定, h 处处可导, 且 $h' \neq \frac{1}{2y}$, 求 y' .

7. 求函数 $f(x) = \sin \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处带 Peano 余项的 3 阶 Taylor 公式.

8. 求函数 $f(x) = \frac{x}{1+2x}$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$.

9. 求曲线 $y = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right)$ 的斜渐近线方程.

10. 指出函数 $f(x) = (1 - e^{\frac{x}{1-x}})^{-1}$ 的间断点与类型.

2 综合题 (每小题 7 分, 共 28 分)

11. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, $f(0) \neq 0$, 且对一切 x, y 有 $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, 证明 $f(x)$ 处处连续.

12. 讨论方程 $\ln x - \frac{x}{e} + 1 = 0$ 有几个实根? 并给出证明.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可导, 且 $f(2) \neq 0$. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f\left(2 + \frac{1}{x}\right)}{f(2)} \right]^x$.

14. 有一个顶点朝上的圆锥形容器, 高为 8m, 底半径为 $R = 2\sqrt{2}\text{m}$, 向其中注水. 设当水深 $h = 6\text{m}$ 时, 水面上升的速度为 $\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi}\text{m/min}$, 求此时水的体积的变化率 $\frac{dV}{dt}$.

3 证明题 (每小题 6 分, 共 12 分)

15. 证明不等式: 当 $0 < x < 1$ 时, $\frac{1-x}{1+x} < e^{-2x}$.

16. 设 $0 < x_1 < x_2$, 证明 $x_1 \ln x_2 - x_2 \ln x_1 = (\ln \xi - 1)(x_1 - x_2)$, 其中 ξ 介于 x_1 与 x_2 之间.

CHAPTER 26

2013-2014 学年微积分 (一) (上) 期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 设 $x_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{12} \cdots \frac{2n-1}{4n}$, 则

$$0 < x_n = \frac{2n-1}{4n} x_{n-1} < \frac{1}{2} x_{n-1} < \frac{1}{2^2} x_{n-2} < \cdots < \frac{1}{2^{n-1}} x_1,$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} x_1 = 0$, 由夹逼定理得 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

2. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2 \ln 2} - e^{x^2 \ln 3}}{(e^{x \ln 2} - e^{x \ln 3})^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x^2 \ln 2 - 1 - x^2 \ln 3 + o(x^2)}{(1 + x \ln 2 - 1 - x \ln 3 + o(x))^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln 2 - \ln 3)x^2 + o(x^2)}{[(\ln 2 - \ln 3)x + o(x)]^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln 2 - \ln 3)x^2 + o(x^2)}{(\ln 2 - \ln 3)^2 x^2 + o(x^2)} \\ &= \frac{1}{\ln 2 - \ln 3}. \end{aligned}$$

3. **Solution.** 由 Lagrange 中值定理, 存在 ξ 介于 $\tan x$ 与 $\sin x$ 之间, 使得 $e^\xi (\tan x - \sin x) = e^{\tan x} - e^{\sin x}$.

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \rightarrow 0$, $\sin x \rightarrow 0$, 故 $\xi \rightarrow 0$. 所以

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} e^\xi \cdot \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4. **Solution.** 因为 $\ln f(x) = \cos x \ln \sin x$, 所以

$$f'(x) = (\sin x)^{\cos x} \left(-\sin x \ln \sin x + \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \right).$$

5. **Solution.**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(t+1)e^t}{2t+1},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \left(\frac{(t+1)e^t}{2t+1} \right)' \cdot \frac{1}{2t+1} = \frac{(t+2)e^t \cdot (2t+1) - 2(t+1)e^t}{(2t+1)^3} = \frac{(2t+3)te^t}{(2t+1)^3}.$$

6. **Solution.** 方程 $y = h(x^2 + y^2)$ 两边对 x 求导得

$$y' = h'(x^2 + y^2)(2x + 2yy'),$$

$$\text{整理得 } y' = \frac{2xh'(x^2 + y^2)}{1 - 2yh'(x^2 + y^2)}.$$

7. **Solution.** $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, 所以

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin \ln(1+x) = \sin \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) - \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^3 + o \left(\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^3 \right) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3). \end{aligned}$$

8. **Solution.** 因为 $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x+1}$, 所以 $f^{(n)}(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n \cdot n! 2^n}{(2x+1)^{n+1}}$,

因此

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \cdot n! \cdot 2^{n-1}.$$

9. **Solution.** 因为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right) - x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(e+t) - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{e+t} = \frac{1}{e},$$

所以曲线 $y = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right)$ 的斜渐近线方程为 $y = x + \frac{1}{e}$.

10. **Solution.** 函数 $f(x)$ 的间断点为 $x=0$ 和 $x=1$.

当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{\frac{x}{1-x}} \rightarrow 1$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{\frac{x}{1-x}})^{-1} = \infty$, 故 $x=0$ 为无穷间断点.

当 $x \rightarrow 1^+$ 时, $e^{\frac{x}{1-x}} \rightarrow 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - e^{\frac{x}{1-x}})^{-1} = 1$;

当 $x \rightarrow 1^-$ 时, $e^{\frac{x}{1-x}} \rightarrow \infty$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - e^{\frac{x}{1-x}})^{-1} = 0$, 故 $x=1$ 为跳跃间断点.

2 综合题 (每小题 7 分, 共 28 分)

11. **Solution.** 在方程 $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ 中令 $x=y=0$ 得 $f(0) = f^2(0)$, 因 $f(0) \neq 0$, 所以 $f(0) = 1$.

任取 $x_0 \in \mathbf{R}$, 在方程 $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ 中令 $x=x_0$, 得 $f(x_0+y) = f(x_0) \cdot f(y)$. 令 $y \rightarrow 0$, 得

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x_0+y) = f(x_0) \cdot \lim_{y \rightarrow 0} f(y) = f(x_0) \cdot f(0) = f(x_0),$$

所以 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续. 由 x_0 的任意性可知 $f(x)$ 处处连续.

12. **Solution.** 设 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + 1$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$, $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减.

因为 $f(e) = 1 > 0$, $f(0^+) = -\infty$, $f(e^3) = 4 - e^2 < 0$, 所以方程 $\ln x - \frac{x}{e} + 1 = 0$ 有两个实根.

13. **Solution.**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f\left(2 + \frac{1}{x}\right)}{f(2)} \right]^x &= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\ln f\left(2 + \frac{1}{x}\right) - \ln f(2) \right] \right\} \\ &= \exp \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln f(2+t) - \ln f(2)}{t} \right] \\ &= \exp \left[(\ln f(t))' \Big|_{t=2} \right] = \exp \left(\frac{f'(2)}{f(2)} \right).\end{aligned}$$

14. **Solution.** 由几何关系, $V = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 8\pi - \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{(8-h)^3}{8}$. 方程两边对 t 求导得

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{3(8-h)^2}{8} \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{\pi(8-h)^2}{8} \cdot \frac{dh}{dt}.$$

将 $h = 6\text{m}$, $\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi}\text{m/min}$ 代入上式得 $\frac{dV}{dt} = 2\text{m}^3/\text{min}$.

3 证明题 (每小题 6 分, 共 12 分)

15. **Proof.** 取对数, 即证 $\ln \frac{1-x}{1+x} < -2x (0 < x < 1)$.

令 $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x} + 2x$, 则 $f'(x) = -\frac{2}{1-x^2} + 2 = -\frac{2x^2}{1-x^2} < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减.

因为 $f(0) = 0$, 所以当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < f(0) = 0$, 即 $\frac{1-x}{1+x} < e^{-2x}$.

16. **Proof.** 设 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$, 则函数 $f(x), g(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上连续, 在 (x_1, x_2) 内可导, 且 $g(x) \neq 0$.

由 Cauchy 中值定理, 存在 ξ 介于 x_1 与 x_2 之间, 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{g(x_2) - g(x_1)} = \frac{\frac{\ln x_2}{x_2} - \frac{\ln x_1}{x_1}}{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}} = \frac{\frac{\frac{1}{\xi} \cdot \xi - \ln \xi}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}} = \ln \xi - 1,$$

化简得 $x_1 \ln x_2 - x_2 \ln x_1 = (\ln \xi - 1)(x_1 - x_2)$.

CHAPTER 27

2012-2013 学年微积分（一）（上）期中考试

1 基本计算题 (每小题 5 分, 共 60 分)

1. 计算极限 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}} \right)$.

2. 计算极限 $l = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\sin x}$.

3. 计算极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x - 1}}$.

4. 计算极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1 - x}{\sin x^2}$.

5. 设 $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-100)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+100)}$, 求 $f'(1)$.

6. 设 $f(x) = \ln \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + 1}}}$, 求 $f'(0)$.

7. 设 $y = y(x)$ 由 $xe^{f(y)} = x^y \ln 3$ 确定, $f(y)$ 可导, 且 $f'(y) \neq \ln x$, 求 dy .

8. 设 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} y = t^m \\ x = \ln 2t, \end{cases}$ 给出, 计算 $\left. \frac{d^n y}{dx^n} \right|_{t=1}$.

9. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $u = \sqrt[3]{1+x^2} \sqrt[3]{1-x} - 1 \sim cx^k$, 求 c, k 的值.

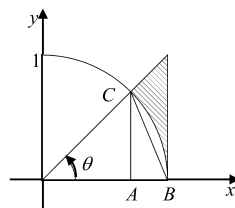
10. 设 $g(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x}, & x < 0, \\ bx, & x \geq 0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, $f(x) = \sin x$. 求 b 以及 $\left. \frac{d}{dx} f(g(x)) \right|_{x=0}$.

11. 设 $f(x) = \frac{3x}{2x^2 + x - 1}$, 计算 $f^{(n)}(0)$.

12. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1 + x^n}$, 求出其所有间断点, 并说明间断点的类型.

2 综合题 (每小题 7 分, 共 28 分)

13. 如图所示, 在单位圆内, 当 $\theta \rightarrow 0$ 时, 证明三角形 ABC 的面积 $a(\theta)$ 与阴影部分的面积 $b(\theta)$ 是同阶无穷小.



14. 证明当 n 充分大时, $(\sqrt[n]{n} - 1)^{\frac{1}{n}} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1 \right) < \frac{1}{n^2}$.

15. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 且 $a < b$, 依据极限定义证明当 n 充分大时, $x_n < y_n$.

16. 设物体 P 沿抛物线 $x = y^2 (y > 0)$ 自原点向右移动, 与原点的距离为 r . 设其水平速度 $\frac{dx}{dt}$ 保持为常量 A .

(1) 计算 $\frac{dr}{dt}$.

(2) 随着物体的移动, $\frac{dr}{dt}$ 是逐渐变大还是逐渐变小或者忽大忽小?

(3) 计算 $\frac{dr}{dt}$ 的最终极限.

3 证明题 (每小题 6 分, 共 12 分)

17. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f'(x) \neq 0$. 试证存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b - a} e^{-\eta}.$$

18. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, $f(0) = f(1)$, 证明存在 $x_0 \in [0, 1]$, 使得 $f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{4}\right)$.

CHAPTER 28

2012-2013 学年微积分 (一) (上) 期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 5 分, 共 60 分)

1. **Solution.** $\frac{n}{n+\sqrt{n}} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}} < \frac{n}{n+1}.$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$, 由夹逼定理得 $l = 1$.

2. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{2 \cos^2 \frac{x}{2}}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{2} |\cos \frac{x}{2}|}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

3. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x - 1} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right] \right\} \\ &= \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \right] = \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x}{x^2} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{e}}. \end{aligned}$$

4. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+2x} - 1 - x)(\sqrt{1+2x} + 1 + x)}{x^2(\sqrt{1+2x} + 1 + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2x - (1+x)^2}{x^2(\sqrt{1+2x} + 1 + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2x - 1 - 2x - x^2}{x^2(\sqrt{1+2x} + 1 + x)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

5. **Solution.**

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2) \cdots (x-100)}{(x+1)(x+2) \cdots (x+100)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2) \cdots (x-100)}{(x+1)(x+2) \cdots (x+100)} \\ &= \frac{(-1)^{99} \cdot 99!}{101!} = -\frac{1}{10100}. \end{aligned}$$

6. **Solution.**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\frac{1}{2} \ln \left(x + \sqrt{x + \sqrt{x+1}} \right) \right]' \\ &= \frac{1}{2 \left(x + \sqrt{x + \sqrt{x+1}} \right)} \left(x + \sqrt{x + \sqrt{x+1}} \right)' \\ &= \frac{1}{2 \left(x + \sqrt{x + \sqrt{x+1}} \right)} \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x+1}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right) \right]. \end{aligned}$$

将 $x=0$ 代入上式得 $f'(0) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right) = \frac{7}{8}$.

7. **Solution.** 取对数, 得 $\ln x + f(y) = y \ln x + \ln \ln 3$. 方程两边微分得

$$\frac{1}{x} dx + f'(y) dy = \ln x dy + y \cdot \frac{1}{x} dx.$$

整理得

$$dy = \frac{y-1}{x[f'(y) - \ln x]} dx.$$

8. **Solution.** 计算

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{mt^{m-1}}{\frac{2}{2t}} = mt^m,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = (mt^m)'_t \cdot \frac{1}{t} = m^2 t^m.$$

设 $\frac{d^k y}{dx^k} = m^k t^m$, 则 $\frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^k y}{dx^k} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = (m^k t^m)'_t \cdot \frac{1}{t} = m^{k+1} t^m$.

由数学归纳法得 $\frac{d^n y}{dx^n} = m^n t^m$, 所以 $\left. \frac{d^n y}{dx^n} \right|_{t=1} = m^n$.

9. **Solution.**

$$u = \sqrt[3]{1-x+x^2-x^3} - 1 = 1 + \frac{1}{3}(-x+x^2-x^3) + o(-x+x^2-x^3) - 1 = -\frac{1}{3}x + o(x).$$

所以 $u \sim -\frac{1}{3}x$, 即 $c = -\frac{1}{3}$, $k=1$.

10. **Solution.** $g(0) = 0$, 因

$$g'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} = g'_+(0) = b,$$

所以 $b = -\frac{\pi}{2}$. 故

$$\left. \frac{d}{dx} f(g(x)) \right|_{x=0} = f'(g(0)) \cdot g'(0) = \cos 0 \cdot b = -\frac{\pi}{2}.$$

11. **Solution.** $f(x) = \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{x+1}$, 所以

$$f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n \cdot n! \cdot 2^n}{(2x-1)^{n+1}} \Big|_{x=0} + \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+1)^{n+1}} \Big|_{x=0} = n! [(-1)^n - 2^n].$$

12. **Solution.** 当 $|x| > 1$ 时, $x^n \rightarrow \infty$, 所以 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 1$;

当 $x = 1$ 时, $f(x) = \frac{1}{2}$; 当 $x = -1$ 时, $f(x)$ 不存在;

当 $|x| < 1$ 时, $x^n \rightarrow 0$, 所以 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 0$.

$$\text{综上所述, } f(x) = \begin{cases} 1, & |x| > 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \\ \text{不存在}, & x = -1, \\ 0, & |x| < 1. \end{cases}$$

$f(x)$ 的间断点为 $x = -1$ 和 $x = 1$.

因为 $f(1^-) = 0$, $f(1^+) = 1$, $f(-1^-) = 1$, $f(-1^+) = 0$, 所以 $x = 1$ 和 $x = -1$ 都是跳跃间断点.

2 综合题 (每小题 7 分, 共 28 分)

13. **Solution.** 由几何关系, $a(\theta) = \frac{1}{2} \sin \theta (1 - \cos \theta)$, $b(\theta) = \frac{1}{2} \tan \theta - \frac{1}{2} \theta$.

当 $\theta \rightarrow 0$ 时, $a(\theta) \rightarrow 0$, $b(\theta) \rightarrow 0$, 所以 $a(\theta)$ 和 $b(\theta)$ 都是无穷小. 计算

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{a(\theta)}{b(\theta)} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta (1 - \cos \theta)}{\tan \theta - \theta} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta^3}{\tan \theta - \theta} = \frac{1}{2} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{3\theta^2}{\sec^2 \theta - 1} \\ &= \frac{3}{2} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta^2}{\tan^2 \theta} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

所以当 $\theta \rightarrow 0$ 时, $a(\theta)$ 与 $b(\theta)$ 是同阶无穷小.

14. **Solution.** 计算

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x}-1)^{\frac{1}{x}} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1 \right)}{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x}-1)^{\frac{1}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x}-1)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1 \right)^{\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{2} \exp \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1 \right)}{x} \right] \\ &= \frac{1}{2} \exp \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1-\ln x}{x^2}}{e^{\frac{\ln x}{x}} - 1} \right] = \frac{1}{2} \exp \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{x}} (1 - \ln x)}{x \ln x} \right] \\ &= \frac{1}{2} \exp \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{x \ln x} \right] = \frac{1}{2} \exp \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\ln x} - 1}{x} \right] = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n} - 1)^{\frac{1}{n}} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1 \right)}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} < 1,$$

由极限的保号性, 当 n 充分大时, 有 $(\sqrt[n]{n} - 1)^{\frac{1}{n}} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1 \right) < \frac{1}{n^2}$.

15. **Solution.** 对于 $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$,

由极限的定义, 存在 N_1 使得当 $n > N_1$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$; 存在 N_2 使得当 $n > N_2$ 时, $|y_n - b| < \varepsilon$.

设 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, $x_n < a + \varepsilon = \frac{a+b}{2} < b - \varepsilon < y_n$.

16. **Solution.** (1) 由题设 $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + x}$, 所以

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{(2x+1)A}{2\sqrt{x^2+x}}.$$

(2) 计算

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{d}{dx} \left[\frac{(2x+1)A}{2\sqrt{x^2+x}} \right] \cdot \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{x^2+x} - \frac{(2x+1)^2}{2\sqrt{x^2+x}}}{x^2+x} \cdot A^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4(x^2+x) - (2x+1)^2}{2(x^2+x)\sqrt{x^2+x}} \cdot A^2 = -\frac{A^2}{(x^2+x)\sqrt{x^2+x}} < 0. \end{aligned}$$

所以 $\frac{dr}{dt}$ 逐渐变小.

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{dr}{dt} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x+1)A}{2\sqrt{x^2+x}} = A.$$

3 证明题 (每小题 6 分, 共 12 分)

17. **Proof.** 函数 $f(x)$ 和函数 $y = e^x$ 均在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $e^x \neq 0$.

由 Cauchy 中值定理, 存在 $\eta \in (a, b)$ 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{e^b - e^a} = \frac{f'(\eta)}{e^\eta}.$$

对函数 $f(x)$ 应用 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$,

代入上式即得 $\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b - a} e^{-\eta}$.

18. **Proof.** 令 $F(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{4}\right)$, 显然 $F(x)$ 在 $\left[0, \frac{3}{4}\right]$ 上连续.

注意到

$$\begin{aligned} & \frac{F(0) + F\left(\frac{1}{4}\right) + F\left(\frac{2}{4}\right) + F\left(\frac{3}{4}\right)}{4} \\ &= \frac{1}{4} \left[f(0) - f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) - f\left(\frac{2}{4}\right) + f\left(\frac{2}{4}\right) - f\left(\frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) - f(1) \right] \\ &= \frac{1}{4} [f(0) - f(1)] = 0. \end{aligned}$$

由介值定理, 存在 $x_0 \in \left[0, \frac{3}{4}\right] \subset [0, 1]$, 使得 $F(x_0) = 0$, 即 $f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{4}\right)$.

CHAPTER 29

2011-2012 学年微积分（一）（上）期中考试

1 基本计算题 (每小题 5 分, 共 60 分)

1. 计算极限 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2011^n}{n!}$.

2. 设 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小量 $u = \sqrt[4]{1 - a \arctan x^2} - 1$ 与 $v = \ln \cos x$ 等价, 求常数 a 的值.

3. 计算极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$.

4. 计算极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}}$.

5. 设曲线 $y = f(x)$ 与 $y = \arctan 2x$ 在原点相切, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{1}{n}\right)$.

6. 设函数 $\varphi(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, 且任给自然数 n , 有 $\varphi\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sqrt[n]{n}$.

(1) 求 $\varphi(1)$;

(2) 设 $f(x) = (x-1)\varphi(x)$, 求 $f'(1)$.

7. 设 $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$, 求 $dy(1)$.

8. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x^2 - xy + y^2 = 1$ 确定, 求 y' , y'' .

9. 设 $\begin{cases} x = \ln \cos t, \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

10. 设 $f(x) = \frac{x+1}{2x^2+5x+2}$, 求 $f^{(n)}(x) (n > 1)$.

11. 确定自然数 n 的范围, 使 $f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 的导函数 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

12. 设函数 $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x+1}{x-1}$, 指出其间断点, 并说明间断点的类型.

2 综合题 (每小题 6 分, 共 24 分)

13. 设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $(0, 2)$ 内可微, 且 $f(0) \cdot f(2) > 0$, $f(0) \cdot f(1) < 0$, 证明: 存在 $\xi \in (0, 2)$, 使 $f'(\xi) = f(\xi)$.

14. 设函数 $y = f(x)$ 和它的反函数 $x = \varphi(y)$ 均存在三阶导数, 且 $y' \neq 0$, 请推导出反函数的求导公式 $\frac{dx}{dy}$, $\frac{d^2x}{dy^2}$, $\frac{d^3x}{dy^3}$ 【用 y' , y'' , y''' 表示】.

15. 证明: 当 $x \geq 1$ 时, 有 $\arctan x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arccos \frac{2x}{1+x^2}$.

16. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 在 $(a, +\infty)$ 内可导, 且 $f'(x) > 1$. 若 $f(a) < 0$, 证明: 方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(a, a - f(a))$ 内有唯一根.

3 证明题 (每小题 8 分, 共 16 分)

17. 分别叙述数列 x_n 有界和收敛 (以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 为例) 的定义, 并证明: 收敛数列是有界数列.

18. 如果记 $\xi = \theta \cdot x$, $0 < \theta < 1$, 则 Lagrange 中值公式 $f(x) - f(0) = xf'(\xi)$ 可以写作: $f(x) - f(0) = xf'(\theta x)$, $0 < \theta < 1$, θ 的大小通常与 x 相关.

(1) 若 $f''(0) \neq 0$, 试证: $\lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}$;

(2) 设 $f(x) = \arctan x$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta$.

CHAPTER 30

2011-2012 学年微积分 (一) (上) 期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 5 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 当 $n > 2011$ 时, $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2011^n}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{2011^{n-1}} = \frac{2011}{n} < 1$,

数列 $\{a_n\}$ 从第 2012 项开始单调递减, 且 $a_n > 0$, 所以数列 $\{a_n\}$ 收敛.

对 $a_n = \frac{2011}{n} a_{n-1}$ 两边取极限, 得 $l = 0$.

2. **Solution.** 由题意可知

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1 - a \arctan x^2} - 1}{\ln \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4} a \arctan x^2}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{a}{4} x^2}{-\frac{x^2}{2}} \\ &= \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

故 $a = 2$.

3. **Solution.** 由 Lagrange 中值定理, 存在 ξ 介于 x 和 $\sin x$ 之间, 使得 $e^x - e^{\sin x} = e^\xi(x - \sin x)$.

易知当 $x \rightarrow 0$ 时, $\xi \rightarrow 0$, 所以

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} e^\xi \frac{x - \sin x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

4. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}}{x} \right] = \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1}{x} \right] \\ &= \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \right] = \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x}{x^2} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{e}}. \end{aligned}$$

5. **Solution.** 由题意可知

$$f(0) = y(0) = 0, \quad f'(0) = y'(0) = \left. \frac{2}{1+4x^2} \right|_{x=0} = 2,$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nf\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)}{\frac{1}{n} - 0} = f'(0) = 2.$$

6. **Solution.** (1) 因 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 所以

$$\varphi(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

(2) 由导数的定义可得,

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\varphi(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = \varphi(1) = 1.$$

7. **Solution.** 因为 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$, 所以 $dy(1) = y'(1) dx = \frac{3\sqrt{2}}{8} dx$.

8. **Solution.** 方程两边对 x 求导, 得 $2x - y - x \cdot y' + 2y \cdot y' = 0$, 所以 $y' = \frac{2x-y}{x-2y}$.

$$y'' = \frac{(2-y')(x-2y) - (2x-y)(1-2y')}{(x-2y)^2} = \frac{6}{(x-2y)^3}.$$

9. **Solution.** 因为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t + t \sin t - \cos t}{\frac{-\sin t}{\cos t}} = -t \cos t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = (-t \cos t)' \cdot \frac{1}{\frac{-\sin t}{\cos t}} = \frac{\cos t - t \sin t}{\tan t},$$

所以

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

10. **Solution.** 因为 $f(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{x+2} \right)$, 所以

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{3} \left[\frac{(-1)^n n! 2^n}{(2x+1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}} \right].$$

11. **Solution.** 欲使 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} \sin \frac{1}{x}$ 存在, 必须 $n-1 > 0$, 此时 $f'(0) = 0$.

欲使导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 应有 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0) = 0$.

当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x}$, 所以必须 $n-2 > 0$.

综上所述, 自然数 n 的范围是 $n > 2$.

12. **Solution.** $f(x)$ 的间断点为 $x = 0$ 和 $x = 1$.

因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan \frac{x+1}{x-1}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0,$$

且 $f(0)$ 无定义, 所以 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点;

因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x+1}{x-1} = -\frac{\pi}{2e}, \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x+1}{x-1} = \frac{\pi}{2e}, \end{aligned}$$

所以 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

2 综合题 (每小题 6 分, 共 24 分)

13. **Solution.** 由连续函数的介值定理, 存在 $\eta_1 \in (0, 1), \eta_2 \in (1, 2)$ 使得 $f(\eta_1) = f(\eta_2) = 0$.

设 $g(x) = e^{-x} f(x)$, 则 $g(x)$ 在 $[\eta_1, \eta_2]$ 内可导, 且 $g(\eta_1) = g(\eta_2) = 0$.

由 Rolle 定理, 存在 $\xi \in (\eta_1, \eta_2) \subset (0, 2)$ 使得 $g'(\xi) = e^{-\xi}(f'(\xi) - f(\xi)) = 0$, 所以 $f'(\xi) = f(\xi)$.

14. **Solution.**

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y'},$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{y'} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{y'} \right) \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{-y''}{(y')^2} \cdot \frac{1}{y'} = -\frac{y''}{(y')^3},$$

$$\frac{d^3x}{dy^3} = \frac{d}{dy} \left(-\frac{y''}{(y')^3} \right) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{y''}{(y')^3} \right) \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{y'''(y')^3 - 3(y')^2(y'')^2}{(y')^6} \cdot \frac{1}{y'} = -\frac{y'y''' - 3(y'')^2}{(y')^5}.$$

15. **Solution.** 令 $f(x) = \arctan x - \frac{1}{2} \arccos \frac{2x}{1+x^2} (x \geq 1)$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \equiv 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒为常数. 又 $f(1) = \arctan 1 - \frac{1}{2} \arccos 1 = \frac{\pi}{4}$, 所以当 $x \geq 1$ 时,

$$\arctan x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arccos \frac{2x}{1+x^2}.$$

16. **Solution.** 记 $b = a - f(a) > a$, 则由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a) > f(a) + (b-a) = 0.$$

又由连续函数的介值定理, 存在 $\eta \in (a, b)$ 使得 $f(\eta) = 0$.

因为 $f(x)$ 是严格单调递增的, 所以 η 是方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(a, a - f(a))$ 内的唯一根.

3 证明题 (每小题 8 分, 共 16 分)

17. 数列 x_n 有界的定义: $\exists M > 0, \forall n \in \mathbf{N}$, 恒有 $|x_n| \leq M$.

数列 x_n 收敛于 a 的定义: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n > N$, 恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

Proof. 取 $\varepsilon = 1$, 则存在自然数 N 使得当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < 1$, 从而

$$|x_n| = |x_n - a + a| < 1 + |a|.$$

设 $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, 1 + |a|\}$, 则 $\forall n \in \mathbf{N}$, 恒有 $|x_n| \leq M$. 所以数列 x_n 有界.

18. **Proof.** (1) 计算

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\theta x) - f'(0)}{\theta x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0)}{\theta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{\theta x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2\theta x} = \frac{1}{2} f''(0) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\theta}, \end{aligned}$$

由 $f''(0) \neq 0$, 得 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}$.

(2) 由题设可以写出 $\arctan x - 0 = \frac{x}{1 + \xi^2} = \frac{x}{1 + (\theta x)^2}$, 所以

$$\theta^2 = \frac{\frac{x}{\arctan x} - 1}{x^2} = \frac{x - \arctan x}{x^2 \arctan x}.$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \theta^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^2 \arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \frac{1}{3},$$

即 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Part II

微积分 (B) (上) 期末考试

CHAPTER 1

2025-2026 学年微积分 (B) (上) 期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

- 函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x-1}}, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ 在点 $x = 1$ 处 ().
 A. 连续
 B. 右连续
 C. 左连续
 D. 左右都不连续
 - 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处二阶可导, $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f'(x)}{x} = 1$, 则 ().
 A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
 B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
 C. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值
 D. $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
 - 微分方程 $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x + e^{-x}$ 的特解形式应设为 $y^* =$ ().
 A. $xe^x(a \cos x + b \sin x) + ce^{-x}$
 B. $e^x(a \cos x + b \sin x) + ce^{-x}$
 C. $e^x(ax + b) \cos x + ce^{-x}$
 D. $e^x(a \cos x + b \sin x) + cxe^{-x}$
 - 设函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内有二阶导数, 点 $(c, f(c)) (a < c < b)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点的一个充分条件为 ().
 A. $f''(x)$ 在 (a, b) 内严格单调递增
 B. $f''(c) = 0$
 C. $f''(x)$ 在 (a, b) 内严格单调递减
 D. $f''(c) = 0$ 且 $f''(x)$ 在 (a, b) 内严格单调递减
 - 若函数 $f(x)$ 满足 $df(x) = -e^{\cos x} \sin x dx$, 且 $f(0) = 0$, 则 $f(x) =$ ().
 A. $e^{\cos x} - 1$
 B. $e^{\sin x}$
 C. $e^{\sin x} - e$
 D. $e^{\cos x} - e$
 - 下列反常积分发散的是 ().
 A. $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$
 B. $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
 C. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan x} dx$
 D. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. $\int_{-1}^1 (x \ln(x^{2026} + 1) + \sqrt{1-x^2}) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

8. 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) (x > 0)$ 的斜渐近线为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

9. 连续曲线段 $y = \int_0^x \sqrt{\sin t} dt (0 \leq x \leq \pi)$ 的弧长 $s = \underline{\hspace{2cm}}.$

10. 设函数 $f(x) = \int_0^1 |t-x| dt (0 < x < 1)$, 则 $y = f(x), x=0, x=1$ 以及 x 轴所围成的区域绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\cos x - 1)}{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}.$

12. 设 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 1 + 2t^2, \\ y = \int_1^{1+2\ln t} \frac{e^u}{u} du \end{cases} (t > 1)$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=9}, \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=9}.$

13. 若 $f(x) = ax^3 + bx^2 + x$ 在 $x=1$ 处取得极值 2, 求 $f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上的最大值和最小值.

14. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt$.

15. 求微分方程 $(y^2 - 6x) \frac{dy}{dx} = -2y$ 的通解.

16. 在 xOy 平面内, 把连接点 $O(0, 0)$ 与点 $P(1, 0)$ 的线段 OP 剖分为 n 等分, 各分点依次记为 $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$. 从点 $P_k, k=1, 2, \dots, n-1$ 引抛物线 $y=x^2$ 的切线, 切点记为 $Q_k(x_k, x_k^2)$, 设三角形 $\triangle Q_k P_k P$ 的面积为 S_k , 求极限 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S_k$.

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 设 $f(x)$ 可微, 且满足 $x = \int_0^x f(t) dt + \int_0^x t f(t-x) dt$, 求 $f(x)$.

18. 已知曲线 L 的方程为 $y = f(x)$, 点 $(3, 2)$ 是它的一个拐点, 直线 l_1, l_2 分别是曲线 L 在 $(0, 0)$ 和 $(3, 2)$ 处的切线, 其交点为 $(2, 4)$, 设 $f(x)$ 具有三阶连续导数, 求 $\int_0^3 (x^2 + x)f'''(x) \mathrm{d}x$.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有连续导数, 且 $f(0) = 0, f'(x) \geq 0, g'(x) \geq 0$, 证明: 对于任意的 $a \in [0, 1]$, 都有 $\int_0^a g(x)f'(x) \mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)g'(x) \mathrm{d}x \geq f(a)g(1)$.

20. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有二阶连续导数, 且 $f(0) = 0$, 证明: 在 $[-1, 1]$ 上至少存在一点 ξ , 使得 $f''(\xi) = 3 \int_{-1}^1 f(x) \mathrm{d}x$.

CHAPTER 2

2025-2026 学年微积分 (B) (上) 期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. **Solution.** B.

因为

$$\begin{aligned}f(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{-\frac{1}{x-1}} = 0, \\f(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{-\frac{1}{x-1}} = +\infty,\end{aligned}$$

所以函数 $f(x)$ 在点 $x = 1$ 处右连续, 左不连续.

2. **Solution.** A.

因为 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处二阶可导, 故 $f(x), f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

由题可得 $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + f'(x)) = 0$, 所以 $f(0) + f'(0) = 0$, 即 $f'(0) = 0$.

又

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = f'(0) + f''(0) = 1,$$

所以 $f''(0) = 1 > 0$. 故 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

3. **Solution.** A.

齐次方程 $y'' - 2y' + 2y = 0$ 的特征方程为 $r^2 - 2r + 2 = 0$, 解得 $r = 1 \pm i$.

对于 $f_1(x) = e^x \sin x$, $\lambda + i\omega = 1 + i$ 是特征方程的单根, 故可设特解为 $y_1^* = xe^x(a \cos x + b \sin x)$;

对于 $f_2(x) = e^{-x}$, $\lambda = -1$ 不是特征方程的根, 故可设特解为 $y_2^* = ce^{-x}$.

由解的叠加原理, 原方程的特解形式应设为

$$y^* = y_1^* + y_2^* = xe^x(a \cos x + b \sin x) + ce^{-x}.$$

4. **Solution.** D.

若点 $(c, f(c))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点, 必须 $f''(c) = 0$. D 选项给出 $f''(x)$ 在 (a, b) 内严格单调递减,

则当 $a < x < c$ 时, $f''(x) > 0$; $c < x < b$ 时, $f''(x) < 0$, 所以点 $(c, f(c))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

5. **Solution.** D.

方程 $df(x) = -e^{\cos x} \sin x dx$ 两边从 0 积分到 t , 得

$$\begin{aligned}\int_0^t df(x) &= -\int_0^t e^{\cos x} \sin x dx \\ f(t) - f(0) &= \int_0^t e^{\cos x} d(\cos x) \\ f(t) &= e^{\cos x} \Big|_0^t = e^{\cos t} - e.\end{aligned}$$

故 $f(x) = e^{\cos x} - e$.

6. **Solution.** C.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-x} dx &= -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1, \\ \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi, \\ \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx &= \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2}, \\ \text{由于 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan x} dx &= \ln |\sin x| \Big|_{0^+}^{\frac{\pi}{2}} = +\infty, \text{ 所以积分 } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan x} dx \text{ 发散.}\end{aligned}$$

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. **Solution.** $\frac{\pi}{2}$.

因为函数 $y = x \ln(x^{2026} + 1)$ 是奇函数, 故 $\int_{-1}^1 x \ln(x^{2026} + 1) dx = 0$.

由定积分的几何意义可得 $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$, 所以

$$\int_{-1}^1 (x \ln(x^{2026} + 1) + \sqrt{1-x^2}) dx = \frac{\pi}{2}.$$

8. **Solution.** $y = x$.

计算

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + \ln(1+e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = 1, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1+e^x) - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1+e^x}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0,\end{aligned}$$

所以斜渐近线方程为 $y = x$.

9. **Solution.** 4.

因为 $y' = \sqrt{\sin x}$, 所以 $ds = \sqrt{1+y'^2} dx = \sqrt{1+\sin x} dx = \left| \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right| dx$,

故

$$s = \int_0^\pi \left| \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right| dx = \int_0^\pi \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) dx = 4.$$

10. **Solution.** $\frac{\pi}{3}$.

$$\text{因为 } f(x) = \int_0^x (t-x) dt + \int_x^1 (x-t) dt = x^2 - x + \frac{1}{2}.$$

故旋转体的体积

$$V = \int_0^1 2\pi x f(x) dx = 2\pi \int_0^1 x \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{\pi}{3}.$$

3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. **Solution.** 利用 Taylor 公式,

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right)}{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) - \left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} \right)^2 + o(x^4) \right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)}{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)} = 6. \end{aligned}$$

12. **Solution.** 当 $x = 9$ 时, $1 + 2t^2 = 9$, 因为 $t > 1$, 故 $t = 2$.

因为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{e^{1+2\ln t}}{1+2\ln t} \cdot \frac{2}{t}}{4t} = \frac{e}{2(1+2\ln t)},$$

$$\text{所以 } \frac{dy}{dx} \Big|_{x=9} = \frac{dy}{dx} \Big|_{t=2} = \frac{e}{2(1+2\ln 2)}, \text{ 且}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \left(\frac{e}{2(1+2\ln t)} \right)' \cdot \frac{1}{4t} = -\frac{e}{4t^2(1+2\ln t)^2},$$

$$\text{所以 } \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=9} = \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=2} = -\frac{e}{16(1+2\ln 2)^2}.$$

13. **Solution.** 由题可知 $f(1) = 2$, $f'(1) = 0$, 且 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 1$,

$$\text{所以 } \begin{cases} a + b + 1 = 2, \\ 3a + 2b + 1 = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } a = -3, b = 4, f(x) = -3x^3 + 4x^2 + x.$$

$$\text{令 } f'(x) = -9x^2 + 8x + 1 = 0, \text{ 解得 } x = -\frac{1}{9} \text{ 或 } x = 1.$$

$$\text{计算 } f(-1) = 6, f\left(-\frac{1}{9}\right) = -\frac{14}{243}, f(1) = 2, f(2) = -6,$$

所以 $f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上的最大值为 6, 最小值为 -6.

14. **Solution.** 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 可得 $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

$$\text{令 } u = x^2 - t^2, \text{ 则 } du = -2t dt, \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt = -\frac{1}{2} \int_{x^2}^0 f(u) du = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u) du.$$

所以

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u) \mathrm{d}u}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x^2)}{4x^3} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - f(0)}{x^2 - 0} = \frac{1}{4} f'(0) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

15. **Solution.** 方程变形为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - \frac{3x}{y} = -\frac{y}{2}$.

由一阶非齐次线性微分方程的通解公式得

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{e}^{-\int(-\frac{3}{y})\mathrm{d}y} \left(C + \int \left(-\frac{y}{2} \right) \mathrm{e}^{\int(-\frac{3}{y})\mathrm{d}y} \mathrm{d}y \right) \\ &= y^3 \left(C - \frac{1}{2} \int \frac{1}{y^2} \mathrm{d}y \right) = y^3 \left(C + \frac{1}{2y} \right) = Cy^3 + \frac{y^2}{2}. \end{aligned}$$

其中 C 为任意常数.

16. **Solution.** 点 P_k 的坐标为 $\left(\frac{k}{n}, 0\right)$, 过 $Q_k(x_k, x_k^2)$ 的切线斜率为 $2x_k$, 所以有

$$\frac{x_k^2 - 0}{x_k - \frac{k}{n}} = 2x_k,$$

解得 $x_k = \frac{2k}{n}$, 故 $S_k = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{4k^2}{n^2}$.

由定积分的定义, 得

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cdot 2 \left(\frac{k}{n}\right)^2 \\ &= \int_0^1 2x^2(1-x) \mathrm{d}x = \int_0^1 (2x^2 - 2x^3) \mathrm{d}x = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. **Solution.** 令 $u = t - x$, 则

$$\int_0^x t f(t-x) \mathrm{d}t = \int_{-x}^0 (u+x) f(u) \mathrm{d}u = \int_{-x}^0 u f(u) \mathrm{d}u + x \int_{-x}^0 f(u) \mathrm{d}u.$$

原方程变形为

$$x = \int_0^x f(t) \mathrm{d}t + \int_{-x}^0 u f(u) \mathrm{d}u + x \int_{-x}^0 f(u) \mathrm{d}u.$$

方程两边关于 x 求导得 $1 = f(x) + xf(-x) - xf(-x) + \int_{-x}^0 f(u) \mathrm{d}u$, 即

$$f(x) + \int_{-x}^0 f(u) \mathrm{d}u = 1.$$

令 $x = 0$ 得 $f(0) = 1$. 上式两边再次关于 x 求导得 $f'(x) + f(-x) = 0$, 即 $f'(x) = -f(-x)$.

令 $x=0$ 得 $f'(0)=-1$. 由于 $f(x)$ 可微, 由上式可知 $f''(x)$ 存在,

且 $f''(x) = (f'(x))' = (-f(-x))' = f'(-x) = -f(x)$, 即 $f''(x) + f(x) = 0$.

此微分方程的特征方程为 $r^2 + 1 = 0$, 解得 $r = \pm i$, 所以可设 $f(x) = A \cos x + B \sin x$.

将 $f(0) = 1, f'(0) = -1$ 代入上式得 $A = 1, B = -1$, 所以 $f(x) = \cos x - \sin x$.

18. **Solution.** 由题可知 $f''(3) = 0, f(3) = 2, f(0) = 0, l_1: y = f'(0)x, l_2: y - 2 = f'(3)(x - 3)$.

将交点坐标 $(2, 4)$ 分别代入 l_1 和 l_2 的方程得 $f'(0) = 2, f'(3) = -2$. 所以

$$\begin{aligned} \int_0^3 (x^2 + x) f'''(x) dx &= \int_0^3 (x^2 + x) df''(x) \\ &= (x^2 + x) f''(x) \Big|_0^3 - \int_0^3 (2x + 1) f''(x) dx \\ &= - \int_0^3 (2x + 1) f''(x) dx \\ &= - (2x + 1) f'(x) \Big|_0^3 + \int_0^3 2 f'(x) dx \\ &= - 7 f'(3) + f'(0) + 2(f(3) - f(0)) = 20. \end{aligned}$$

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. **Proof.** 令 $F(t) = \int_0^t g(x) f'(x) dx + \int_0^1 f(x) g'(x) dx - f(t) g(1)$, 则

$$F(1) = \int_0^1 (g(x) f'(x) + f(x) g'(x)) dx - f(1) g(1) = 0,$$

$$F'(t) = g(t) f'(t) - f'(t) g(1) = f'(t) [g(t) - g(1)].$$

因为 $f'(x) \geq 0, g'(x) \geq 0$, 所以 $g(t) \leq g(1)$, 故 $F'(t) \leq 0$, $F(t)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减.

所以 $F(a) \geq F(1) = 0$, 即

$$\int_0^a g(x) f'(x) dx + \int_0^1 f(x) g'(x) dx \geq f(a) g(1).$$

20. **Proof.** 利用 Taylor 公式, $\forall x \in [-1, 1]$, 存在 η 介于 0 和 x 之间, 使得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\eta)}{2}x^2 = f'(0)x + \frac{f''(\eta)}{2}x^2.$$

所以

$$3 \int_{-1}^1 f(x) dx = 3 \int_{-1}^1 \left(f'(0)x + \frac{f''(\eta)}{2}x^2 \right) dx = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 f''(\eta)x^2 dx.$$

由于 $f''(x)$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上连续, 所以 $f''(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有最大值 M 和最小值 m , 故

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}m \int_{-1}^1 x^2 dx &\leq \frac{3}{2} \int_{-1}^1 f''(\eta)x^2 dx \leq \frac{3}{2}M \int_{-1}^1 x^2 dx, \\ m &\leq \frac{3}{2} \int_{-1}^1 f''(\eta)x^2 dx \leq M. \end{aligned}$$

由介值定理, 至少存在一点 $\xi \in [-1, 1]$, 使得 $f''(\xi) = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 f''(\eta)x^2 dx = 3 \int_{-1}^1 f(x) dx$.

CHAPTER 3

2024-2025 学年微积分 (B) (上) 期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 是 ().
- A. 无界的但不是无穷大量 B. 无穷大量
C. 有界的但不是无穷小量 D. 无穷小量
2. 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty$, 则 ().
- A. 对任意正整数 n , 有 $a_n < b_n$ B. 对任意正整数 n , 有 $b_n < c_n$
C. 数列 $\{a_n \cdot c_n\}$ 发散 D. 数列 $\{b_n \cdot c_n\}$ 发散
3. 设函数 $f(x)$ 满足 $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, 且 $f'''(x_0) > 0$, 则 ().
- A. $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值 B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
C. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值 D. $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
4. 若 $f'(2x) = e^{-x}$, 且 $f(0) = 1$, 则 $\int f(x) dx = ()$.
- A. $3x - e^{-\frac{x}{2}} + C$ B. $3x - 2e^{-\frac{x}{2}} + C$
C. $3x + 4e^{-\frac{x}{2}} + C$ D. $3x - 4e^{-\frac{x}{2}} + C$
5. 设函数 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f''(x) < 0$, $f(0) = 0$, 则 ().
- A. $f(2) < 2f(1)$ B. $f(2) > 2f(1)$
C. $2f(2) < f(1)$ D. $2f(2) > f(1)$
6. 下列反常积分收敛的是 ().
- A. $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ B. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$
C. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} dx$ D. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. 设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = 4t - t^2 \end{cases} \quad (t \geq 0)$ 确定, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{2n+1}{n}\right) - 3 \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$

8. 设函数 $f(x) = \int_0^{3x} e^{-t^2} dt + 2$, $g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数, 则 $g'(2) = \underline{\hspace{2cm}}.$

9. 设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} \int_0^1 f(x) dx$, 则 $\int_0^1 f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

10. 连续曲线段 $y = \int_0^x \sqrt{\sin t} dt (0 \leq x \leq \pi)$ 的弧长 $s = \underline{\hspace{2cm}}.$

3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 求曲线 $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} (x > 1)$ 的渐近线.

12. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n + \frac{1}{n}} + \frac{1}{2n + \frac{4}{n}} + \cdots + \frac{1}{2n + \frac{n^2}{n}} \right).$

13. 设方程 $e^{xy} + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_1^y \sqrt{4-t^2} dt = 1$ 可以确定函数 $y = y(x)$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}.$

14. 求方程 $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$ 的积分曲线 $y = y(x)$, 使其在点 $(0, 1)$ 处的切线与曲线 $y = x^3 - 3x + 1$ 在该点处的切线重合.

15. 设 $f(x) = \int_0^x e^{-t^2+2t} dt$, 求 $I = \int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx$.

16. 设函数 $f(x) = \int_0^1 |t^3 - x^3| dt (0 \leq x \leq 1)$, 求 $f(x)$ 的最值.

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 设 $f(x)$ 连续, 且满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \tan x}{x} = 1$, $F(x) = \int_0^1 f(xt) dt$. 求 $F'(x)$, 并讨论 $F'(x)$ 的连续性.

18. 设曲线 $y = y(x)$ 是第一象限内的连续曲线, 点 $A(0, 1)B(1, 0)$ 分别为曲线与 y 轴及 x 轴的交点. 点 $M(x, y)$ 为曲线 AB 上的任意一点, 过 $M(x, y)$ 作 x 轴的垂线, 与 x 轴交于点 C , O 为坐标原点, 已知梯形 $OCMA$ 的面积与曲边三角形 CBM 的面积和为 $\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}$ ¹. 求 $y = y(x)$ 与 y 轴及 x 轴所围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $(0, 2)$ 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x - \frac{1}{2}} = 0$, $f(2) = 2 \int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx$. 证明: 存在 $\xi \in (0, 2)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.

20. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续的二阶导数, 且 $|f''(x)| \leq 1$, 证明:

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{24}.$$

¹ 此处有误, 应改为 $\frac{x^3}{6} + \frac{1}{3}$.

CHAPTER 4

2024-2025 学年微积分 (B) (上) 期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. **Solution.** A.

当 $x = \frac{1}{k\pi}, k \rightarrow \infty$ 时, $f(x) \equiv 0$; 当 $x = \frac{1}{(k + \frac{1}{2})\pi}, k \rightarrow \infty$ 时, $f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow \infty$,

所以函数 $f(x)$ 无界, 但不是无穷大量.

2. **Solution.** D.

极限只描述数列在 n 趋近于无穷大时的行为, 所以 A, B 错误;

取 $a_n \equiv 0$, 则 $a_n \cdot c_n \equiv 0$, 数列 $\{a_n \cdot c_n\}$ 收敛, 所以 C 错误;

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot c_n = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$, 数列 $\{b_n \cdot c_n\}$ 发散, 所以 D 正确.

3. **Solution.** D.

利用 Taylor 公式, $f'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f'''(\xi)(x - x_0)^2 = \frac{1}{2}f'''(\xi)(x - x_0)^2$,

其中 ξ 介于 x 和 x_0 之间, 故易见 $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极小值.

另一方面,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(\eta)(x - x_0)^3 = \frac{1}{6}f'''(\eta)(x - x_0)^3,$$

其中 η 介于 x 和 x_0 之间, 故易见 $f(x_0)$ 既不是 $f(x)$ 的极大值, 也不是 $f(x)$ 的极小值.

由于 $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) > 0$, 所以 $f''(x)$ 在 x_0 的两侧变号, 点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

4. **Solution.** C.

方程 $f'(2x) = e^{-x}$ 两边积分得 $f(2x) = -2e^{-x} + C$, 又因为 $f(0) = 1$, 所以 $C = 3$,

故 $f(2x) = -2e^{-x} + 3$, $f(x) = -2e^{-\frac{x}{2}} + 3$. 所以 $\int f(x) dx = 3x + 4e^{-\frac{x}{2}} + C$.

5. **Solution.** A.

$f(x)$ 是上凸的, 所以 $\frac{f(0) + f(2)}{2} < f(1)$, 即 $f(2) < 2f(1)$.

6. **Solution.** D.

$$\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \int_e^{+\infty} \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2} \ln^2 x \Big|_e^{+\infty} = +\infty,$$

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_e^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln \ln x \Big|_e^{+\infty} = +\infty,$$

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} dx = \int_e^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}} = 2\sqrt{\ln x} \Big|_e^{+\infty} = +\infty,$$

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \int_e^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} \Big|_e^{+\infty} = 1, \text{ 所以 } \int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx \text{ 收敛.}$$

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. **Solution.** 1.

计算 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4-2t}{2t} = \frac{2-t}{t}$, 当 $x=2$ 时, $t=1$, $y=f(2)=3$, 故 $f'(2) = \frac{dy}{dx} \Big|_{t=1} = 1$.

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{2n+1}{n}\right) - 3 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(2 + \frac{1}{n}\right) - f(2)}{\frac{1}{n}} = f'(2) = 1.$$

8. **Solution.** $\frac{1}{3}$.

令 $f(x)=2$ 得 $x=0$, $f'(x)=3e^{-9x^2}$, 所以 $g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}$.

9. **Solution.** $\frac{\pi}{4-\pi}$.

设 $\int_0^1 f(x) dx = C$, 则 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + C\sqrt{1-x^2}$. 方程两边从 0 积分到 1, 得

$$C = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + C \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}C,$$

解得 $C = \frac{\pi}{4-\pi}$.

10. **Solution.** 4.

$y' = \sqrt{\sin x}$, 所以 $ds = \sqrt{1+y'^2} dx = \sqrt{1+\sin x} dx = \left| \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right| dx$,

故

$$s = \int_0^\pi \left| \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right| dx = \int_0^\pi \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) dx = 4.$$

3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. **Solution.** 当 $x \rightarrow 1^+$ 时, $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} \rightarrow +\infty$, 所以 $x=1$ 是曲线的竖直渐近线.

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x-1}} = 1$, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\frac{1}{1-t}} - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-(\sqrt{1-t} - 1)}{t\sqrt{1-t}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-(-\frac{1}{2}t)}{t} = \frac{1}{2},$$

所以 $y = x + \frac{1}{2}$ 是曲线的斜渐近线.

12. **Solution.** 由定积分的定义,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n + \frac{1}{n}} + \frac{1}{2n + \frac{4}{n}} + \cdots + \frac{1}{2n + \frac{n^2}{n}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{2 + \left(\frac{n}{n}\right)^2} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2 + x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

13. **Solution.** 方程 $e^{xy} + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_1^y \sqrt{4-t^2} dt = 1$ 两边微分, 得

$$e^{xy}(y dx + x dy) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{4-y^2} dy = 0,$$

当 $x = 0$ 时, $y = 1$. 代入上式得 $dx + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3} dy = 0$, 所以 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = -1$.

14. **Solution.** 齐次方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的特征方程为 $r^2 - 3r + 2 = 0$, 解得 $r_1 = 1$, $r_2 = 2$.

对于 $f(x) = 2e^x$, $\lambda = 1$ 是特征方程的单根, 故可设特解为 $y^* = Axe^x$,

代入方程得 $A(x+2)e^x - 3A(x+1)e^x + 2Axe^x = 2e^x$, 解得 $A = -2$,

所以非齐次方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - 2xe^x$.

曲线 $y = x^3 - 3x + 1$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线斜率为 $(3x^2 - 3) \Big|_{x=0} = -3$,

所以有 $\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 1, \\ y'(0) = C_1 + 2C_2 - 2 = -3 \end{cases}$, 解得 $C_1 = 3$, $C_2 = -2$.

因此满足条件的积分曲线为 $y = 3e^x - 2e^{2x} - 2xe^x$.

15. **Solution.** 由题可知 $f(0) = 0$, $f'(x) = e^{-x^2+2x}$, 所以

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 f(x) d(x-1)^3 \\ &= \frac{1}{3} f(x)(x-1)^3 \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 (x-1)^3 f'(x) dx \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^1 (x-1)^3 e^{-x^2+2x} dx. \end{aligned}$$

令 $u = -x^2 + 2x$, 则 $du = (-2x + 2) dx = -2(x - 1) dx$, $(x - 1)^2 = -u + 1$, 所以

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{3} \int_0^1 (x-1)^3 e^{-x^2+2x} dx = -\frac{1}{3} \int_0^1 (x-1)^2 e^u \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 (-u+1) e^u du = \frac{1}{6} \int_0^1 (e^u - u e^u) du \\ &= \frac{1}{6} \left[e^u \Big|_0^1 - (u-1) e^u \Big|_0^1 \right] \\ &= \frac{1}{6} (e - 2). \end{aligned}$$

16. **Solution.**

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x (x^3 - t^3) dt + \int_x^1 (t^3 - x^3) dt \\ &= x^3 t \Big|_0^x - \frac{t^4}{4} \Big|_0^x + \frac{t^4}{4} \Big|_x^1 - x^3 t \Big|_x^1 \\ &= \frac{3}{2} x^4 - x^3 + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

所以 $f'(x) = 6x^3 - 3x^2 = 3x^2(2x - 1)$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 0$ 或 $x = \frac{1}{2}$.

计算 $f(0) = \frac{1}{4}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{32}$, $f(1) = \frac{3}{4}$,

所以 $f(x)$ 的最小值为 $\frac{7}{32}$, 最大值为 $\frac{3}{4}$.

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. **Solution.** 当 $x = 0$ 时, $F(0) = 0$.

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \tan x}{x} = 1$ 可知 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - \tan x] = 0$, 结合 $f(x)$ 的连续性可知 $f(0) = 0$, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = f'(0) - 1 = 1,$$

所以 $f'(0) = 2$. 当 $x \neq 0$ 时, 令 $u = xt$, 则 $du = x dt$, 所以

$$F(x) = \int_0^1 f(xt) dt = \int_0^x f(u) \cdot \frac{du}{x} = \frac{\int_0^x f(u) du}{x}.$$

当 $x \neq 0$ 时,

$$F'(x) = \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2}, \quad F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\int_0^x f(u) du}{x} - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{1}{2} f'(0) = 1.$$

$$\text{所以 } F'(x) = \begin{cases} \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

当 $x \neq 0$ 时, $F'(x)$ 显然连续, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) \, du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) \, du}{x^2} = f'(0) - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{1}{2}f'(0) = 1,$$

因此 $F'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. 综上所述, $F'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处连续.

18. **Solution.** 由题可知点 C 的坐标为 $(x, 0)$, $S_{\text{梯形}OCMA} = \frac{1}{2}x(1+y)$, $S_{\text{曲边三角形}CBM} = \int_x^1 y \, dx$,

所以 $\frac{1}{2}x(1+y) + \int_x^1 y \, dx = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{3}$. 方程两边求导得 $\frac{1}{2}(1+y) + \frac{1}{2}x \cdot y' - y = \frac{1}{2}x^2$, 即

$$y' - \frac{1}{x}y = x - \frac{1}{x}.$$

由一阶非齐次线性微分方程的通解公式得

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int(-\frac{1}{x}) \, dx} \left(C + \int \left(x - \frac{1}{x} \right) e^{\int(-\frac{1}{x}) \, dx} \, dx \right) \\ &= x \left[C + \int \left(x - \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{1}{x} \, dx \right] = x \left(C + x + \frac{1}{x} \right) \\ &= x^2 + Cx + 1. \end{aligned}$$

将点 B 坐标 $(1, 0)$ 代入得 $C = -2$, 所以曲线 $y = y(x)$ 的解析式为 $y = x^2 - 2x + 1$.

因此旋转体的体积 $V = \int_0^1 2\pi xy(x) \, dx = 2\pi \int_0^1 x(x^2 - 2x + 1) \, dx = \frac{\pi}{6}$.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. **Proof.** 由 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x - \frac{1}{2}} = 0$ 可知 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = 0$, 结合 $f(x)$ 的连续性可知 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

所以 $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x - \frac{1}{2}} = 0$.

由积分中值定理, $\exists \eta \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$, 使得 $\int_1^{\frac{3}{2}} f(x) \, dx = f(\eta) \cdot \left(\frac{3}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}f(\eta)$,

所以 $f(2) = 2 \int_1^{\frac{3}{2}} f(x) \, dx = f(\eta)$, 由 Rolle 定理, $\exists \delta \in (\eta, 2)$, 使得 $f'(\delta) = 0$.

再由 Rolle 定理即得 $\exists \xi \in \left(\frac{1}{2}, \delta\right) \subset (0, 2)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.

20. **Proof.** 由 Taylor 公式,

$$f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2,$$

其中 ξ 介于 x 和 $\frac{1}{2}$ 之间. 所以

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(x) \mathrm{d}x - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| &= \left| \int_0^1 \left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} f''(\xi) \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \right] \mathrm{d}x - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \\ &\leq \left| \int_0^1 \left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \right] \mathrm{d}x - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \\ &\leq \left| f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}x - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}x \right| = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

CHAPTER 5

2023-2024 学年微积分（一）（上）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 下列函数在其定义域内无界的是 () .

A. $x^2 D(x)$ ($D(x)$ 为 Dirichlet 函数)

B. $\tan(\sin x)$

C. $\frac{\sin x}{x}$

D. 符号函数 $\operatorname{sgn}(x)$

2. 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 的斜渐近线为 () .

A. $y = -x$

B. $y = -x + 1$

C. $y = x$

D. $y = x + 1$

3. 通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^x + x$ (其中 C_1, C_2 为任意常数) 的微分方程为 () .

A. $y'' - y' = 1$

B. $y'' - y = 0$

C. $y'' - 2y' + y = e^x$

D. $y'' - 2y' + y = x - 2$

4. 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某个邻域内有定义, 则下列命题

(a) 若 $f'(x_0)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

(b) 若 $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$ 均存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

(c) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x), \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$ 均存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

其中正确的个数是 () .

A. 1

B. 2

C. 3

D. 0

5. 设 $f(x)$ 在 $x = 1$ 的某邻域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(f(x+1) + e^{x^2})}{x^2} = 2$, 则 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的 () .

A. 驻点且为极大值点

B. 驻点且为极小值点

C. 不可导点

D. 可导点但不是驻点

6. 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin^3 x \, dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x + \sin^3 x) \, dx$, $P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x \cos x - \sin^2 x) \, dx$, 则 ()

A. $M > N > P$

B. $N > P > M$

C. $N > M > P$

D. $M > P > N$

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. 设曲线 $y = f(x)$ 与 $y = x^2 - x + 1$ 在点 $(2, 3)$ 处有公共切线, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(2 - \frac{1}{n}\right) - 3 \right] = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. $y = f(x)$ 满足 $y' = (1 - y)y^\alpha (\alpha > 0)$, 若曲线 $y = f(x)$ 的一个拐点为 $\left(t, \frac{1}{2}\right)$, 则 $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-x} , 则 $\int_{-\frac{1}{2}}^0 x f(2x) \, dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 位于曲线 $y = xe^{-x} (0 \leq x < +\infty)$ 下方、 x 轴上方的无界图形的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 设 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$ 确定, 求 $y'(0)$, $y''(0)$.

12. 设 $f(x) = e^x \ln(1+x) - x \left(1 + \frac{1}{2}x\right)$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 求 $f(x)$ 的主部及阶数.

13. 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x}}{x \sin x^2} \int_0^x \sin(x-t)^2 dt$.

14. 求极限 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left(1 + \frac{2}{n} \right) + \cdots + \ln \left(1 + \frac{n}{n} \right) \right]$.

15. 设 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{1-t} dt$, 求 $I = \int_0^1 (x-1)f(x) dx$.

16. 若曲线 $y = f(x)$ 是 $y'' + 2y' - 3y = 4e^x$ 的一条积分曲线, 此曲线过点 $A(0, 1)$, 且在点 $A(0, 1)$ 处的切线的倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$, 求 $f(x)$.

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导, 其反函数存在为 $g(x)$, 若 $\int_0^{f(x)} g(t) dt + \int_0^x f(t) dt = xe^x - e^x + 1$, 求 $f(x)$.

18. 设函数 $f(x) = ax + \frac{3}{2}bx^2$ 在区间 $(0, 1)$ 内恒大于 0, 其中 a, b 为未知常数. 曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x = 1, y = 0$ 所围成的区域 D 的面积为 2. 求 a, b 的值, 使得 D 绕 x 轴旋转一周得到的旋转体的体积最小, 并求出此最小值.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上连续且单调增加, 其中 $a > 0$. 证明:

$$a \int_0^a f(x)g(x) dx \geq \int_0^a f(x) dx \int_0^a g(x) dx.$$

20. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶导数, 且 $f'(a) = f'(b) = 0$. 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$(b-a)^2 |f''(\xi)| \geq 4|f(b) - f(a)|.$$

CHAPTER 6

2023-2024 学年微积分（一）（上）期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. **Solution.** A.

$$x^2 D(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}, \text{ 显然 } x^2 D(x) \text{ 在其定义域内无界.}$$

$\forall x \in \mathbf{R}, |\sin x| \leq 1$, 所以 $|\tan(\sin x)| \leq \tan 1 = \frac{\pi}{4}$, 故 $\tan(\sin x)$ 在其定义域内有界.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, 所以 $\frac{\sin x}{x}$ 在其定义域 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内有界.

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}, \text{ 显然 } \operatorname{sgn}(x) \text{ 在其定义域内有界.}$$

2. **Solution.** C.

计算

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = 1, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1 + e^x}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0, \end{aligned}$$

所以斜渐近线方程为 $y = x$.

3. **Solution.** D.

由通解结构可以看出 $(C_1 + C_2 x)e^x$ 是一个齐次方程的通解, $y^* = x$ 是一个相应非齐次方程的特解.

通解 $(C_1 + C_2 x)e^x$ 对应齐次方程的二重特征根 $r = 1$, 所以齐次方程为 $y'' - 2y' + y = 0$.

将特解 $y^* = x$ 代入非齐次方程验证可得 D 选项 $y'' - 2y' + y = x - 2$ 满足题意.

4. **Solution.** B.

若 $f'(x_0)$ 存在, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 存在, 所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 即 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

同理, 若 $f'_-(x_0)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处左连续; 若 $f'_+(x_0)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处右连续,

所以 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

$$\text{考虑函数 } f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x + 1, & x < 0 \end{cases}, \text{ 则}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1,$$

但显然 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续.

所以有两个命题正确.

5. **Solution.** B.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(f(x+1) + e^{x^2})}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1) + e^{x^2} - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1)}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 2, \end{aligned}$$

因此 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1)}{x^2} = 1$. 由 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的连续性易知 $f(1) = 0$.

又由极限的保号性, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{f(x+1)}{x^2} > 0$, 所以 $f(x+1) > 0$. 即 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1) - f(1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1)}{x^2} \cdot x = 0$, 所以 $f'(1) = 0$, 即 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的驻点.

6. **Solution.** C.

$y = \cos^4 \sin^3 x$ 是奇函数, 所以 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin^3 x \, dx = 0$.

$$N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x + \sin^3 x) \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx > 0.$$

$$P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x \cos x - \sin^2 x) \, dx = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx < 0.$$

所以 $N > M > P$.

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. **Solution.** -3.

由题可知 $f(2) = 3$, $f'(2) = (2x - 1) \Big|_{x=2} = 3$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(2 - \frac{1}{n}\right) - 3 \right] = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(2 - \frac{1}{n}\right) - f(2)}{-\frac{1}{n}} = -f'(2) = -3.$$

8. **Solution.** 1.

方程 $y' = (1 - y)y^\alpha$ 两边对 x 求导得

$$y'' = -y'y^\alpha + (1 - y)\alpha y^{\alpha-1}y' = [-y^\alpha + (1 - y)\alpha y^{\alpha-1}]y' = [-y^\alpha + (1 - y)\alpha y^{\alpha-1}](1 - y)y^\alpha.$$

由题意可知 $y(t) = \frac{1}{2}$, $y''(t) = 0$, 代入得

$$\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha + \frac{1}{2}\alpha \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} \right] \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1} = 0,$$

解得 $\alpha = 1$.

9. **Solution.** $\frac{1}{4}$.

由题可知, $f(x) = (e^{-x})' = -e^{-x}$, 所以

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^0 x f(2x) dx &= \int_{-\frac{1}{2}}^0 x \cdot (-e^{-2x}) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^0 x de^{-2x} = \frac{1}{2} x e^{-2x} \Big|_{-\frac{1}{2}}^0 - \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^0 e^{-2x} dx \\ &= \frac{1}{4} e + \frac{1}{4} e^{-2x} \Big|_{-\frac{1}{2}}^0 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

10. **Solution.** 1.

由题可知, 所求面积 $A =$

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = - \int_0^{+\infty} x de^{-x} = -x e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. **Solution.** 由方程得当 $x = 0$ 时, $y = 0$.

方程两边关于 x 求导得

$$e^y y' + 6y + 6xy' + 2x = 0.$$

将 $x = 0$, $y = 0$ 代入上式得 $y'(0) = 0$.

方程两边关于 x 再次求导得

$$e^y (y')^2 + e^y y'' + 12y' + 6xy'' + 2 = 0.$$

将 $x = 0$, $y = 0$, $y'(0) = 0$ 代入上式得 $y''(0) = -2$.

12. **Solution.** 由 Taylor 公式可得

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \ln(1+x) - x \left(1 + \frac{1}{2}x \right) \\ &= \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right) \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \right) - x - \frac{1}{2}x^2 \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) - x - \frac{1}{2}x^2 \\ &= \frac{1}{3}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 的主部为 $\frac{1}{3}x^3$, 阶数为 3.

13. **Solution.** 令 $u = x - t$, 则 $\int_0^x \sin(x-t)^2 dt = \int_0^x \sin u^2 du$.

故

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x}}{x \sin x^2} \int_0^x \sin(x-t)^2 dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin u^2 du}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

14. **Solution.** 由定积分的定义可得

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \\ &= \int_0^1 \ln(1+x) dx = x \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx \\ &= \ln 2 - (x - \ln(1+x)) \Big|_0^1 = \ln 2 - (1 - \ln 2) = 2 \ln 2 - 1. \end{aligned}$$

15. **Solution.** 由题可知 $f(0) = 0$, $f'(x) = \frac{\sin x}{1-x}$, 所以

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (x-1)f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) d(x-1)^2 \\ &= \frac{1}{2} f(x)(x-1)^2 \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 (x-1)^2 f'(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x-1) \sin x dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (x-1) d \cos x \\ &= -\frac{1}{2} \left[(x-1) \cos x \Big|_0^1 - \int_0^1 \cos x dx \right] \\ &= \frac{\sin 1 - 1}{2}. \end{aligned}$$

16. **Solution.** 齐次方程 $y'' + 2y' - 3y = 0$ 的特征方程为 $r^2 + 2r - 3 = 0$, 解得 $r_1 = 1$, $r_2 = -3$.

对于 $f(x) = 4e^x$, $\lambda = 1$ 是特征方程的单根, 故可设特解为 $y^* = Axe^x$,

代入方程得

$$A(x+2)e^x + 2A(x+1)e^x - 3Axe^x = 4e^x,$$

解得 $A = 1$, 所以非齐次方程的通解为 $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x + x e^x$.

由题可知 $y(0) = 1$, $y'(0) = \tan \frac{3\pi}{4} = -1$, 代入得

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ -3C_1 + C_2 + 1 = -1 \end{cases}$$

解得 $C_1 = \frac{3}{4}$, $C_2 = \frac{1}{4}$. 因此 $f(x) = \frac{3}{4} e^{-3x} + \frac{1}{4} e^x + x e^x$.

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. **Solution.** 方程

$$\int_0^{f(x)} g(t) dt + \int_0^x f(t) dt = xe^x - e^x + 1$$

两边关于 x 求导得 $g(f(x)) \cdot f'(x) + f(x) = xe^x$.

由反函数的性质, $g(f(x)) = x$, 所以上式即 $xf'(x) + f(x) = xe^x$.

当 $x = 0$ 时, 由题可知 $f(0) = 0$; 当 $x \neq 0$ 时, 上式可变形为

$$f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = e^x.$$

由一阶非齐次线性微分方程的通解公式得

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(C + \int e^x e^{\int \frac{1}{x} dx} dx \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(C + \int xe^x dx \right) = \frac{1}{x} (C + xe^x - e^x). \end{aligned}$$

由 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (C + xe^x - e^x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[e^x + \frac{C - e^x}{x} \right] = f(0) = 0,$$

解得 $C = 1$. 所以

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x} (1 + xe^x - e^x), & x \neq 0. \end{cases}$$

18. **Solution.** 由题可知

$$\int_0^1 \left(ax + \frac{3}{2}bx^2 \right) dx = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 2,$$

所以 $a = 4 - b$. 旋转体的体积 $V =$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \pi f^2(x) dx &= \pi \int_0^1 \left[(4-b)x + \frac{3}{2}bx^2 \right]^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 \left[\frac{9}{4}b^2x^4 + 3(4-b)bx^3 + (4-b)^2x^2 \right] dx \\ &= \pi \left[\frac{9}{20}b^2 + \frac{3}{4}(4-b)b + \frac{1}{3}(4-b)^2 \right] = \left(\frac{1}{30}b^2 + \frac{1}{3}b + \frac{16}{3} \right) \pi. \end{aligned}$$

$$V' = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}b \right) \pi, \text{ 令 } V' = 0 \text{ 解得 } b = -5,$$

$$\text{此时 } V''(-5) = \frac{\pi}{15} > 0, \text{ 所以 } V \text{ 的最小值存在, } V(-5) = \frac{9}{2}\pi.$$

故当 $a = 9$, $b = -5$ 时, D 绕 x 轴旋转一周得到的旋转体的体积最小, 此最小值为 $\frac{9}{2}\pi$.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. **Proof.** 令 $F(x) = x \int_0^x f(t)g(t) dt - \int_0^x f(t) dt \int_0^x g(t) dt$, 则 $F(0) = 0$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^x f(t)g(t) dt + xf(x)g(x) - f(x) \int_0^x g(t) dt - g(x) \int_0^x f(t) dt \\ &= \int_0^x [f(t)g(t) + f(x)g(x) - f(x)g(t) - g(x)f(t)] dt \\ &= \int_0^x [f(x) - f(t)] \cdot [g(x) - g(t)] dt. \end{aligned}$$

由题可知 $f(x), g(x)$ 在 $[0, a]$ 上单调增加, 所以 $\forall t \in [0, x], f(x) - f(t) \geq 0, g(x) - g(t) \geq 0$, 故 $[f(x) - f(t)] \cdot [g(x) - g(t)] \geq 0$, 因此 $F'(x) \geq 0$, $F(x)$ 在 $[0, a]$ 上单调增加.

所以 $F(x) \geq F(0) = 0$, 即

$$a \int_0^a f(x)g(x) dx \geq \int_0^a f(x) dx \int_0^a g(x) dx.$$

20. **Proof.** 由 Taylor 公式, 将 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 分别在 $x=a$ 和 $x=b$ 处展开得

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f(a) + f'(a)\left(\frac{a+b}{2} - a\right) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)\left(\frac{a+b}{2} - a\right)^2, \\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f(b) + f'(b)\left(\frac{a+b}{2} - b\right) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2. \end{aligned}$$

因 $f'(a) = f'(b) = 0$, 所以上式即

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f(a) + \frac{1}{8}f''(\xi_1)(b-a)^2, \\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f(b) + \frac{1}{8}f''(\xi_2)(b-a)^2, \end{aligned}$$

其中 $\xi_1 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$, $\xi_2 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$.

两式相减得

$$0 = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) - f(b) + \frac{1}{8}[f''(\xi_1) - f''(\xi_2)](b-a)^2,$$

所以

$$|f(b) - f(a)| = \frac{(b-a)^2}{8} |f''(\xi_1) - f''(\xi_2)| \leq \frac{(b-a)^2}{8} (|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|).$$

取 $|f''(\xi)| = \max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\}$, 则 $|f(b) - f(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \cdot 2|f''(\xi)|$, 即

$$(b-a)^2 |f''(\xi)| \geq 4|f(b) - f(a)|.$$

CHAPTER 7

2022-2023 学年微积分（一）（上）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 若 $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的微分 dy 是与 Δx () 的无穷小.
- A. 高阶 B. 低阶
C. 同阶 D. 等价

2. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分条件是 ().

- A.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{2x}$ 存在
- B.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - f(0)}{x^2}$ 存在
- C.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{\sqrt[3]{x}}$ 存在
- D.** $\lim_{x \rightarrow \infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)$ 存在

3. 下列关于数列的描述中, 正确的是 ().

- A.** 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$
- B.** 若 $\{x_n y_n\}$ 有界, 则必有 $\{x_n\}$ 有界或 $\{y_n\}$ 有界
- C.** 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$
- D.** 若有区间 I 内的数列 x_n , 使 $|f(x_n)|$ 无界, 则 $f(x)$ 在 I 内无界

4. 设 $f(x)$ 在区间 $(a, +\infty)$ 内可导, 且 $f'(x) > 0$, 若 $f(a) = 0$, 则在区间 $(a, +\infty)$ 内有 ().

- A.** $f(x) \geq 0$
- B.** $f(x) > 0$
- C.** 不能确定 $f(x)$ 的符号
- D.** $f(x)$ 单调趋向于 $+\infty$

5. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1$, 则下列结论成立的是 ().

A. $f'(0)$ 存在, 且 $f'(0) \neq 0$

B. $f'(0)$ 不存在

C. $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值

D. $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1^2}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2^2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^2}{n^2}\right)} = (\quad) .$

A. $\int_1^2 \ln(1+x^2) dx$

B. $2 \int_1^2 \ln x dx$

C. $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$

D. $2 \int_0^1 \ln x dx$

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小量 $(1+x)^{x^2} - 1$ 的阶数是 $=$ _____.

8. 曲线 $\cot\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right) = e^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 _____.

9. 若 $\int_0^x f(t) dt = xe^{-x}$, 则 $\int_1^{+\infty} \frac{f(\ln x)}{x} dx =$ _____.

10. 曲线 $y = \int_0^x \tan t dt$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) 的弧长 $s =$ _____.

3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 求曲线 $C: y = x \arctan x (x > 0)$ 的渐近线.

12. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内可导, 且 $f(a) = f'(a) = 1$, 求 $l = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{\int_a^x f(t) dt} \right)$.

13. 求 $I = \int \frac{1}{x(x^n + 1)} dx$, 其中 n 为正整数.

14. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x + y^4}$ 的通解.

15. 设 $f(x) = \int_x^1 \sin t^2 dt$, 计算 $I = \int_0^1 f(x) dx$.

16. 求 $F(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^x e^{-t} \sin t dt$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内的极值.

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 已知函数 $f(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^2} dt + \int_{x^2}^1 \sqrt{1+t} dt$, 讨论方程 $f(x) = 0$ 的实根个数.

18. 设 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t-x) dt = -\frac{x^3}{3} - x^2$, 求曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(x) > 0, g(x) \geq 0$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g(x) \sqrt[n]{f(x)} dx = \int_0^1 g(x) dx.$$

20. 设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上二阶可导, 且 $f'(0) = f'(2) = 0$. 试证: 存在 $\xi \in (0, 2)$, 使

$$|f''(\xi)| \geq |f(2) - f(0)|.$$

CHAPTER 8

2022-2023 学年微积分（一）（上）期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. **Solution.** C.

由导数的定义, $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{dy}{\Delta x} = \frac{1}{2}$.

因此 dy 与 Δx 是同阶无穷小, 但不是等价无穷小.

2. **Solution.** D.

对于 A 选项, 考虑 $f(x) = |x|$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(-x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-x) - (-x)}{2x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(-x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - x}{2x} = 0,$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{2x} = 0$ 存在, 但显然 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导.

对于 B 选项, 令 $t = x^2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - f(0)}{x^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t}$ 存在, 仅能说明 $f'_+(0)$ 存在.

对于 C 选项, 考虑 $f(x) = \sqrt[3]{x}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{\sqrt[3]{x}} = 1$ 存在, 但显然 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导.

对于 D 选项, 令 $t = \frac{1}{x}$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} xf\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t}$ 存在,

结合 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性可得 $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} \cdot t = 0$,

所以 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t}$ 存在, 即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

3. **Solution.** D.

对于 A, B, C 选项, 考虑

$$x_n = \begin{cases} 0, & n = 2k - 1, \\ n, & n = 2k \end{cases}, \quad y_n = \begin{cases} n, & n = 2k - 1, \\ 0, & n = 2k \end{cases},$$

其中 k 是正整数. 则 $x_n y_n \equiv 0$, 但 x_n, y_n 均无界, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 均不存在.

4. **Solution.** C.

假设 $a > 0$, 考虑函数 $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + \frac{1}{2a}, & x > a, \\ 0, & x = a. \end{cases}$

显然 $f(x)$ 在区间 $(a, +\infty)$ 内可导, 当 $a < x < 2a$ 时, $f(x) < 0$; 当 $x > 2a$ 时, $f(x) > 0$,

且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2a} < +\infty$.

5. **Solution.** C.

结合 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性可得 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \cdot x^2 = 0$,

因此 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \cdot x = 0$, 即 $f'(0) = 0$.

又由极限的保号性, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{f(x)}{x^2} > 0$, 所以 $f(x) > 0$. 即 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

6. **Solution.** C.

由定积分的定义可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1^2}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2^2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^2}{n^2}\right)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right) \\ &= \int_0^1 \ln(1 + x^2) dx. \end{aligned}$$

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. **Solution.** 3.

当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$(1+x)^{x^2} - 1 = e^{x^2 \ln(1+x)} - 1 = e^{x^2(x+o(x))} - 1 = e^{x^3+o(x^3)} - 1 = x^3 + o(x^3).$$

所以无穷小量 $(1+x)^{x^2} - 1$ 的阶数是 3.

8. **Solution.** $2x + 3y = 0$.

方程 $\cot\left(x + y + \frac{\pi}{4}\right) = e^y$ 两边对 x 求导得

$$-\csc^2\left(x + y + \frac{\pi}{4}\right) \cdot (1 + y') = e^y y'.$$

将 $x = 0, y = 0$ 代入上式解得 $y'(0) = -\frac{2}{3}$, 所以切线方程为 $2x + 3y = 0$.

9. **Solution.** 0.

由题可知, $f(x) = (xe^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$. 故 $f(\ln x) = \frac{1 - \ln x}{x}$.

所以

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{f(\ln x)}{x} dx &= \int_1^{+\infty} \frac{1 - \ln x}{x^2} dx \\ &= \int_1^{+\infty} (\ln x - 1) d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln x - 1}{x} \Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \\ &= 1 + \frac{1}{x} \Big|_1^{+\infty} = 0. \end{aligned}$$

10. **Solution.** $\ln(1 + \sqrt{2})$.

$$y' = \tan x, \text{ 所以 } ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + \tan^2 x} dx = \sec x dx,$$

故

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. **Solution.** 曲线 C 没有竖直渐近线和水平渐近线. 计算

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(y - \frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1 + x^2} = -1.$$

所以 $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ 是曲线 C 的斜渐近线.

12. **Solution.** 由积分中值定理, 存在 ξ 介于 a 和 x 之间, 使得 $\int_a^x f(t) dt = f(\xi)(x - a)$,

当 $x \rightarrow a$ 时, $\xi \rightarrow a$, 所以

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x f(t) dt - (x - a)}{(x - a) \int_a^x f(t) dt} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x f(t) dt - (x - a)}{(x - a)^2 f(\xi)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - 1}{2(x - a)} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{1}{2} f'(a) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

13. **Solution.**

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{x(x^n + 1)} dx = \int \frac{x^{-n-1}}{x^{-n} + 1} dx \\ &= -\frac{1}{n} \int \frac{1}{x^{-n} + 1} d(x^{-n} + 1) \\ &= -\frac{1}{n} \ln |x^{-n} + 1| + C. \end{aligned}$$

14. **Solution.** 方程变形为 $\frac{dx}{dy} - \frac{2x}{y} = y^3$.

由一阶非齐次线性微分方程的通解公式得

$$\begin{aligned} x &= e^{-\int (-\frac{2}{y}) dy} \left(C + \int y^3 e^{\int (-\frac{2}{y}) dy} dy \right) \\ &= y^2 \left(C + \int y dy \right) = y^2 \left(C + \frac{1}{2} y^2 \right) = Cy^2 + \frac{1}{2} y^4. \end{aligned}$$

其中 C 为任意常数.

15. **Solution.** 由题可知 $f(1) = 0$, $f'(x) = -\sin x^2$, 所以

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 f(x) dx = xf(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 xf'(x) dx \\ &= \int_0^1 x \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \sin x^2 dx^2 \\ &= -\frac{1}{2} \cos x^2 \Big|_0^1 \\ &= \frac{1 - \cos 1}{2}. \end{aligned}$$

16. **Solution.** $F'(x) = e^{-x} \sin x$, 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内, 令 $F'(x) = 0$ 得 $x = 0$.

计算

$$\begin{aligned} \int e^{-t} \sin t dt &= -\int e^{-t} d \cos t = -e^{-t} \cos t - \int e^{-t} \cos t dt \\ &= -e^{-t} \cos t - \int e^{-t} d \sin t \\ &= -e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t - \int e^{-t} \sin t dt \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \int e^{-t} \sin t dt = -\frac{1}{2} e^{-t} (\sin t + \cos t) + C,$$

$$\text{因此极值 } F(0) = -\frac{1}{2} e^{-t} (\sin t + \cos t) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 = -\frac{1}{2} (e^{\frac{\pi}{2}} + 1).$$

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. **Solution.** $f'(x) = \sqrt{1+x^2} - 2x\sqrt{1+x^2} = (1-2x)\sqrt{1+x^2}$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1}{2})$ 上单调增加, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调减少.

因为

$$f(0) = \int_1^0 \sqrt{1+t^2} dt + \int_0^1 \sqrt{1+t} dt = \int_0^1 (\sqrt{1+t} - \sqrt{1+t^2}) dt > 0,$$

$$f(1) = 0, \quad f(-1) = \int_1^{-1} \sqrt{1+t^2} dt < 0,$$

故方程 $f(x) = 0$ 有两个实根.

18. **Solution.** 令 $t - x = u$, 则 $\int_{-x}^0 f(u) du = -\frac{x^3}{3} - x^2$.

方程两边求导得 $f(-x) = -x^2 - 2x$, 所以 $f(x) = -x^2 + 2x$.

因而旋转体的体积

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 2\pi x f(x) dx = 2\pi \int_0^2 x(-x^2 + 2x) dx \\ &= 2\pi \int_0^2 (-x^3 + 2x^2) dx \\ &= 2\pi \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}\pi. \end{aligned}$$

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. **Proof.** 易知函数 $\sqrt[n]{f(x)}$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 因而具有最小值 m 和最大值 M . 所以

$$m \leq \frac{\int_0^1 g(x) \sqrt[n]{f(x)} \, dx}{\int_0^1 g(x) \, dx} \leq M.$$

由介值定理, 存在 $\xi \in [0, 1]$ 使得 $\sqrt[n]{f(\xi)} = \frac{\int_0^1 g(x) \sqrt[n]{f(x)} \, dx}{\int_0^1 g(x) \, dx}.$

上式两边取极限, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f(\xi)} = 1$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 g(x) \sqrt[n]{f(x)} \, dx}{\int_0^1 g(x) \, dx} = 1,$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g(x) \sqrt[n]{f(x)} \, dx = \int_0^1 g(x) \, dx.$$

20. **Proof.** 由 Taylor 公式, 将 $f(x)$ 分别在 $x = 0$ 和 $x = 2$ 处展开得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\eta)x^2 = f(0) + \frac{1}{2}f''(\eta)x^2, \\ f(x) &= f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{1}{2}f''(\zeta)(x-2)^2 = f(2) + \frac{1}{2}f''(\zeta)(x-2)^2, \end{aligned}$$

两式相减得

$$f(2) - f(0) = \frac{1}{2} [f''(\zeta)(x-2)^2 - f''(\eta)x^2].$$

所以

$$|f(2) - f(0)| \leq \frac{1}{2} [|f''(\zeta)|(x-2)^2 + |f''(\eta)|x^2].$$

取 $|f''(\xi)| = \max\{|f''(\eta)|, |f''(\zeta)|\}$, 则

$$|f(2) - f(0)| \leq \frac{1}{2}|f''(\xi)| [(x-2)^2 + x^2] \leq \frac{1}{2}|f''(\xi)| \cdot 2 = |f''(\xi)|,$$

即 $|f''(\xi)| \geq |f(2) - f(0)|.$

CHAPTER 9

2021-2022 学年微积分（一）（上）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 是一数列, 则下列命题正确的是 ().

- A. 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛
B. 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛
C. 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛
D. 若 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛

2. 函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n + 2}{x^n + 1}$ 的间断点及类型是 ().

- A. $x = -1$ 是第二类间断点
B. $x = 1$ 是第二类间断点
C. $x = \pm 1$ 均是第一类间断点
D. $x = \pm 1$ 均是第二类间断点

3. $x \rightarrow 0^+$ 时, 与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是 ().

- A. $1 - e^{\sqrt{x}}$
B. $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1$
C. $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$
D. $1 - \cos \sqrt{x}$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 下列命题错误的是 ().

- A. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$
B. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$
C. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在
D. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在

5. 曲线 $y = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right)$ ($x > 0$) 的渐近线条数为 ().

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

6. 设 $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t \, dt$, 则 $F(x)$ ().

A. 为正常数

B. 为负常数

C. 恒为 0

D. 不为常数

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. 曲线 $\begin{cases} x = \arctan t, \\ y = \ln \sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 对应于 $t = 1$ 处的法线方程为 _____.

8. 曲线 $y = x \sin x + 2 \cos x \left(-\frac{\pi}{2} < x < 2\pi \right)$ 的拐点是 _____.

9. 曲线 $y = \ln \cos x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \right)$ 的弧长为 _____.

10. $y = 2^x$ 的 Maclaurin 展开式中 x^n 项的系数为 _____.

3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + x - 3}{x - 1} = b$, 求常数 a, b 的值.

12. 设 $f(x)$ 为连续函数, 且满足 $f(x) = x^2 - x \cdot f(2) + 2 \int_0^1 f(x) \, dx$, 求 $f(x)$.

13. 求极限 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n+i}$.

14. 计算定积分 $I = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} \, dx$.

15. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} (\lambda > 0)$, 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \, dx$.

16. 求微分方程 $xy' + y - e^x = 0$, $y(2) = 1$ 的特解.

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, $f(x) = (x+1)^2 + 2 \int_0^x f(t) dt$, 求 $f^{(n)}(0)$ 的值 ($n \geq 2$).

18. 设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过原点, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $y \geq 0$, 又该抛物线与直线 $x = 1$ 及 x 轴围成平面图形的面积为 $\frac{1}{3}$, 求 a, b, c 的值, 使得该图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积 V 最小.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 证明方程 $\ln x = \frac{x}{e} - 2021$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内只有两个不同的实根.

20. 设 $f''(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 且 $|f''(x)| \leq M$, $f(1) = 0$. 证明:

$$\left| \int_0^2 f(x) dx \right| \leq \frac{M}{3}.$$

CHAPTER 10

2021-2022 学年微积分（一）（上）期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. **Solution.** B.

考虑函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$, 它在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调不减且有界, 取数列 $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, 则 $x_n \rightarrow 0$,

但当 n 为偶数时, $f(x_n) = 1$; 当 n 为奇数时, $f(x_n) = 0$, 所以 $\{f(x_n)\}$ 发散, A 选项错误.

若 $\{x_n\}$ 单调, 由于 $f(x)$ 单调有界, 所以 $\{f(x_n)\}$ 亦单调有界, 必收敛, B 选项正确.

考虑函数 $f(x) \equiv 0$, 它在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调不减且有界, 取数列 $x_n = n$, 则 $\{x_n\}$ 发散,

但 $\{f(x_n)\} \equiv 0$ 单调不减且收敛, 故 C, D 选项错误.

2. **Solution.** C.

当 $|x| > 1$ 时, $x^n \rightarrow \infty$, 所以 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n + 2}{x^n + 1} = 1$;

当 $|x| < 1$ 时, $x^n \rightarrow 0$, 所以 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n + 2}{x^n + 1} = 2$;

当 $x = 1$ 时, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2}{1 + 1} = \frac{3}{2}$;

当 $x = -1$ 时, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + 2}{(-1)^n + 1}$ 不存在.

所以

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| > 1, \\ 2, & |x| < 1, \\ \frac{3}{2}, & x = 1, \\ \text{不存在}, & x = -1 \end{cases},$$

因此 $x = \pm 1$ 均为 $f(x)$ 的跳跃间断点, 即第一类间断点.

3. **Solution.** C.

当 $x \rightarrow 0^+$ 时,

$$\begin{aligned} 1 - e^{\sqrt{x}} &= -\left(e^{\sqrt{x}} - 1\right) \sim -\sqrt{x}, \\ \sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1 &= (1 + \sqrt{x})^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x}, \\ \ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} &= \ln(1+x) - \ln(1-\sqrt{x}) \sim x + \sqrt{x} \sim \sqrt{x}, \\ 1 - \cos \sqrt{x} &= 1 - \left(1 - \frac{1}{2}x + o(x)\right) \sim \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

4. **Solution. D.**

若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, A 选项正确.

则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$ 存在, C 选项正确.

同理, 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + f(-x)) = 2f(0) = 0$, B 选项正确.

对于 D 选项, 考虑 $f(x) = |x|$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(-x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-x) - (-x)}{x} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(-x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - x}{x} = 0, \end{aligned}$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = 0$ 存在, 但显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

5. **Solution. B.**

当 $x \rightarrow 0^+$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e + t)}{t} = 0,$$

所以曲线 $y = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right)$ 没有竖直渐近线.

当 $x \rightarrow +\infty$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right) - x \right] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e + t) - 1}{t} = \frac{1}{e},$$

所以曲线 $y = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right)$ 有斜渐近线 $y = x + \frac{1}{e}$.

综上, 曲线 $y = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right)$ 的渐近线条数为 1.

6. **Solution. A.**

因被积函数 $e^{\sin t} \sin t$ 是周期为 2π 的函数, 所以 $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t \, dt = \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t \, dt$ 恒为常数.

计算

$$\int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t \, dt = \int_0^{\pi} e^{\sin t} \sin t \, dt + \int_{\pi}^{2\pi} e^{\sin t} \sin t \, dt.$$

对第二项作代换 $u = 2\pi - t$, 则

$$\int_{\pi}^{2\pi} e^{\sin t} \sin t \, dt = \int_{\pi}^0 e^{\sin(2\pi-u)} \sin(2\pi-u) (-du) = - \int_0^{\pi} e^{-\sin u} \sin u \, du.$$

所以

$$\int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t \, dt = \int_0^{\pi} (e^{\sin t} - e^{-\sin t}) \sin t \, dt.$$

因为在 $(0, \pi)$ 上, $\sin t > 0$, 且 $e^{\sin t} > e^{-\sin t}$, 故

$$\int_0^{\pi} (e^{\sin t} - e^{-\sin t}) \sin t \, dt = \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t \, dt > 0.$$

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. **Solution.** $y + x - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4} = 0.$

当 $t = 1$ 时, $x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, $y = \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2$, 且

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{2t}{2(1+t^2)}}{\frac{1}{1+t^2}} = t,$$

所以 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = 1$. 切线斜率为 1, 故法线斜率为 -1 , 法线方程为 $y - \frac{1}{2} \ln 2 = -1 \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, 即

$$y + x - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4} = 0.$$

8. **Solution.** $(\pi, -2).$

计算

$$y' = \sin x + x \cos x - 2 \sin x, \quad y'' = \cos x + \cos x - x \sin x - 2 \cos x = -x \sin x,$$

在 $\left(-\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$ 内, 令 $y'' = 0$ 得 $x = 0$ 或 $x = \pi$.

当 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup (0, \pi)$ 时, $y'' \leq 0$, y'' 在 $x = 0$ 两侧不变号, 故 $x = 0$ 不是拐点;

当 $x \in (\pi, 2\pi)$ 时, $y'' > 0$, y'' 在 $x = \pi$ 两侧变号.

故曲线的拐点为 $(\pi, -2)$.

9. **Solution.** $\frac{1}{2} \ln 3.$

因为 $y' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$, 所以 $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + \tan^2 x} dx = \sec x dx$,

故

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \ln \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{2} \ln 3.$$

10. **Solution.** $\frac{(\ln 2)^n}{n!}.$

因为 $y = 2^x = e^{x \ln 2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln 2)^n}{n!}$, 所以 x^n 项的系数为 $\frac{(\ln 2)^n}{n!}.$

3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. **Solution.** 由题可知 $\lim_{x \rightarrow 1} (ax^2 + x - 3) = a + 1 - 3 = 0$, 所以 $a = 2$.

$$b = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x + 3)(x - 1)}{x - 1} = 5.$$

12. **Solution.** 记 $\int_0^1 f(x) dx = C$.

令 $x = 2$, 得 $f(2) = 4 - 2f(2) + 2C$, 所以 $f(2) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}C$.

方程 $f(x) = x^2 - x \cdot f(2) + 2 \int_0^1 f(x) dx$ 两边从 0 积分到 1 得

$$\begin{aligned} C &= \int_0^1 (x^2 - x \cdot f(2) + 2C) dx \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}f(2) + 2C = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}C\right) + 2C \\ &= \frac{5}{3}C - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

解得 $C = \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$, 所以

$$f(x) = x^2 - x \cdot f(2) + 2 \int_0^1 f(x) dx = x^2 - \frac{5}{3}x + 1.$$

13. **Solution.** 由定积分的定义,

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n+i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{i}{n}} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2. \end{aligned}$$

14. **Solution.** 令 $x = \sin \theta$, 则 $dx = \cos \theta d\theta$,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta (1 - \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta d\theta \\ &= \frac{2}{3} - \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

15. **Solution.**

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 x f(x) dx + \int_0^{+\infty} x f(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = - \int_0^{+\infty} x d e^{-\lambda x} \\ &= - x e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

16. **Solution.** 方程变形为 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{e^x}{x}$. 由一阶非齐次线性微分方程的通解公式得

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(C + \int \frac{e^x}{x} e^{\int \frac{1}{x} dx} dx \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(C + \int e^x dx \right) = \frac{1}{x} (C + e^x). \end{aligned}$$

将初始条件 $y(2) = 1$ 代入上式得 $C = 2 - e^2$, 所以特解为 $y = \frac{1}{x} (2 - e^2 + e^x)$.

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. **Solution.** 由于 $f(x)$ 连续, 所以其积分变上限函数 $\int_0^x f(t) dt$ 可导,

从而方程 $f(x) = (x+1)^2 + 2 \int_0^x f(t) dt$ 两边可导. 两边求导得 $f'(x) - 2f(x) = 2(x+1)$.

由一阶非齐次线性微分方程的通解公式得

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int (-2) dx} \left(C + \int 2(x+1)e^{(-2)x} dx \right) \\ &= e^{2x} \left(C + 2 \int (x+1)e^{-2x} dx \right) = e^{2x} \left[C + 2 \int xe^{-2x} dx + 2 \int e^{-2x} dx \right] \\ &= e^{2x} \left[C + 2 \int xe^{-2x} dx - e^{-2x} \right] = e^{2x} \left[C - \int x de^{-2x} - e^{-2x} \right] \\ &= e^{2x} \left[C - xe^{-2x} + \int e^{-2x} dx - e^{-2x} \right] = e^{2x} \left[C - xe^{-2x} - \frac{3}{2}e^{-2x} \right] \\ &= Ce^{2x} - x - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

方程 $f(x) = (x+1)^2 + 2 \int_0^x f(t) dt$ 两边令 $x = 0$ 得 $f(0) = 1$,

所以 $C = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, $f(x) = \frac{5}{2}e^{2x} - x - \frac{3}{2}$. 当 $n \geq 2$ 时,

$$f^{(n)}(0) = \left(\frac{5}{2}e^{2x} \right)^{(n)} \Big|_{x=0} = 5 \cdot 2^{n-1}e^{2x} \Big|_{x=0} = 5 \cdot 2^{n-1}.$$

18. **Solution.** 由抛物线过原点得 $c = 0$, 且有

$$\frac{1}{3} = \int_0^1 (ax^2 + bx) dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2},$$

即 $b = \frac{2}{3}(1-a)$. 旋转体的体积

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi f^2(x) dx = \pi \int_0^1 (ax^2 + bx)^2 dx = \pi \int_0^1 x^2(ax+b)^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 (a^2x^4 + 2abx^3 + b^2x^2) dx = \pi \left[\frac{a^2}{5}x^5 + \frac{ab}{2}x^4 + \frac{b^2}{3}x^3 \right]_0^1 \\ &= \pi \left(\frac{a^2}{5} + \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{3} \right) = \pi \left[\frac{a^2}{5} + \frac{a(1-a)}{3} + \frac{4(1-a)^2}{27} \right]. \end{aligned}$$

由 $\frac{dV}{da} = \pi \left[\frac{2}{5}a + \frac{1-2a}{3} - \frac{8(1-a)}{27} \right] = 0$ 解得 $a = -\frac{5}{4}$, 又

$$\frac{d^2V}{da^2} \Big|_{a=-\frac{5}{4}} = \pi \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3} + \frac{8}{27} \right) = \frac{4\pi}{135} > 0,$$

所以当 $a = -\frac{5}{4}$, $b = \frac{3}{2}$, $c = 0$ 时, 旋转体体积 V 最小.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. **Proof.** 令 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + 2021$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$, $f(x)$ 具有唯一驻点 $x = e$,

且 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减.

因 $f(0^+) = -\infty < 0$, $f(e) = 2021 > 0$, $f(+\infty) = -\infty < 0$,

由介值定理和 $f(x)$ 的单调性易知方程 $\ln x = \frac{x}{e} - 2021$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内只有两个不同的实根.

20. **Solution.** 由 Taylor 公式, 将 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处展开得

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-1)^2 = f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-1)^2,$$

其中 ξ 介于 1 和 x 之间. 所以

$$\begin{aligned} \left| \int_0^2 f(x) dx \right| &= \left| \int_0^2 \left[f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-1)^2 \right] dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^2 |f''(\xi)|(x-1)^2 dx \\ &\leq \frac{M}{2} \int_0^2 (x-1)^2 dx = \frac{M}{3}. \end{aligned}$$

CHAPTER 11

2019-2020 学年微积分（一）（上）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

- A.** $2\sqrt{x}$
- B.** $1 + \sqrt{x}$
- C.** $1 + x$
- D.** $\sqrt{x+3}$

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) =$ _____.

8. 设函数 $y = x^2 - x$. 在 $x = 2$, $\Delta x = 0.01$ 时, 微分 $dy =$ _____.

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \sqrt{3+t^2} dt}{x^2} =$ _____.

10. 曲线 $y = 1 - x^4$ 与 x 轴所围成图形的面积为 _____.

3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $u = e^{3x} - ax^2 - (1 + bx) \cos x$ 是与 x^3 同阶的无穷小. 求常数 a, b 的值.

12. 求 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值与最小值.

13. 求不定积分 $I = \int \frac{e^{5x}}{e^{2x} + 1} dx$.

14. 求定积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$.

15. 判定反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx$ 的敛散性, 若收敛求其值.

16. 求微分方程 $y'' = \frac{\sin y}{\cos^3 y}$ 满足初值条件 $y(2) = 0$, $y'(2) = 1$ 的特解.

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty), \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 讨论 $f'(x)$ 在点 $x = 0$ 处的连续性.

18. 求曲线 $y = \sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{3}$ 对应于 $1 \leq x \leq 4$ 弧段的长度.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 设 n 为正整数, 求方程 $(x+1)^{2n} = x^{2n} + 1$ 所有的实根. 证明你的结论.

20. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有连续的导数. 证明:

$$f(x) \leq \frac{1}{b-a} \left| \int_a^b f(x) \, dx \right| + \int_a^b |f'(x)| \, dx, \quad x \in [a, b].$$

CHAPTER 12

2019-2020 学年微积分 (一) (上) 期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. **Solution.** C.

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $a_n \rightarrow 1$ 且 $0 < a_n < 1$, 所以 $\tan \frac{\pi a_n}{2} \rightarrow +\infty$, 数列 $\left\{ \tan \frac{\pi a_n}{2} \right\}$ 无界.

2. **Solution.** A.

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(2+h) - 9}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(2+h) - f^2(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(2+h) - f(2)][f(2+h) + f(2)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} [f(2+h) + f(2)] \\ &= 2f(2)f'(2) = 30.\end{aligned}$$

3. **Solution.** B.

$f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上必然有界, 可导则说明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 必然可积.

但可导不一定有连续的导数, 故 B 选项错误.

4. **Solution.** D.

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) \right] = \infty$, 所以曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 有竖直渐近线 $x = 0$.

当 $x \rightarrow +\infty$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1 + e^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0,$$

所以曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 有斜渐近线 $y = x$.

当 $x \rightarrow -\infty$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) \right] = 0,$$

所以曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 有水平渐近线 $y = 0$.

故曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 的渐近线条数为 3.

5. **Solution.** B.

$f(x)$ 是上凸的, 所以 $\frac{f(1)+f(3)}{2} < f(2)$, 即 $f(1)+f(3) < 2f(2)$.

6. **Solution.** A.

方程变形为 $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x}$, 两边积分得 $\ln y = \frac{1}{2} \ln x + \ln C$, 即 $y = C\sqrt{x}$.

将初值条件 $y(1) = 2$ 代入上式得 $C = 2$, 所以特解为 $y = 2\sqrt{x}$.

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. **Solution.** $\frac{1}{4}$.

由定积分的定义,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1^3}{n^3} + \frac{2^3}{n^3} + \cdots + \frac{n^3}{n^3} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^3 \\ &= \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

8. **Solution.** 0.03.

$$dy = y'(2)\Delta x = (2x-1) \Big|_{x=2} \Delta x = 3\Delta x = 0.03.$$

9. **Solution.** $\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \sqrt{3+t^2} dt}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+\sin^4 x} \cdot 2 \sin x \cos x}{2x} \\ &= \sqrt{3} \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

10. **Solution.** $\frac{8}{5}$.

$$\text{所围成图形的面积 } S = \int_{-1}^1 (1-x^4) dx = \frac{8}{5}.$$

3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. **Solution.** 由 Taylor 公式,

$$\begin{aligned} u &= e^{3x} - ax^2 - (1+bx) \cos x \\ &= \left(1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + o(x^3) \right) - ax^2 - (1+bx) \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \right) \\ &= (3-b)x + (5-a)x^2 + \frac{9+b}{2}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

因此必然有 $a = 5$, $b = 3$.

12. **Solution.** 计算 $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$, 令 $f'(x) = 0$ 得到函数在 $(-2, 2)$ 内的驻点为 $x = -1$.

比较

$$f(-2) = 3, \quad f(-1) = 10, \quad f(2) = -17,$$

所以函数在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值为 10, 最小值为 -17.

13. **Solution.** 令 $u = e^x$, 则 $du = e^x dx$,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{e^{4x} \cdot e^x}{(e^x)^2 + 1} dx = \int \frac{u^4}{u^2 + 1} du \\ &= \int \left(u^2 - 1 + \frac{1}{u^2 + 1} \right) du \\ &= \frac{u^3}{3} - u + \arctan u + C = \frac{e^{3x}}{3} - e^x + \arctan e^x + C. \end{aligned}$$

14. **Solution.**

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \, d \tan x \\ &= x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx \\ &= \frac{\pi}{4} + \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

15. **Solution.** 令 $x = \tan t$, 则 $dx = \sec^2 t \, dt$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 t}{\tan t \sqrt{\tan^2 t + 1}} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \csc t \, dt = -\ln |\csc t + \cot t| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -\ln(\sqrt{2} + 1) + \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln \frac{1 + \cos t}{\sin t} \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

所以反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx$ 发散.

16. **Solution.** 令 $y' = p$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$,

微分方程 $y'' = \frac{\sin y}{\cos^3 y}$ 变形为

$$p \, dp = \frac{\sin y}{\cos^3 y} \, dy.$$

方程两边积分得 $\frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}\sec^2 y + C_1$, 将初值条件 $y(2) = 0$, $y'(2) = 1$ 代入上式得 $C_1 = 0$,

所以 $p = \sec y$, 即 $\frac{dy}{dx} = \sec y$ 或 $\cos y \, dy = dx$.

方程两边积分得 $x = \sin y + C_2$, 将初值条件 $y(2) = 0$ 代入上式得 $C_2 = 2$,

所以特解为 $x = \sin y + 2$ 或 $y = \arcsin(x - 2)$.

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. **Solution.** 当 $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ 时,

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}.$$

当 $x = 0$ 时,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

又

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \ln(1+x) - 1}{2x} = -\frac{1}{2} = f'(0). \end{aligned}$$

所以 $f'(x)$ 在点 $x = 0$ 处连续.

18. **Solution.** 因为 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2}$, 所以

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + \frac{1}{4x} + \frac{x}{4} - \frac{1}{2}} dx = \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right) dx.$$

故

$$s = \frac{1}{2} \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right) dx = \frac{1}{2} \left[2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{1}{2} \left(4 + \frac{16}{3} - 2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{10}{3}.$$

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. **Proof.** 显然 $x = 0$ 是方程 $(x+1)^{2n} = x^{2n} + 1$ 的一个实根.

令 $f(x) = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 1$, 则 $f'(x) = 2n[(x+1)^{2n-1} - x^{2n-1}]$.

由于 t^{2n-1} 是严格单增函数, 所以 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单增.

因此方程 $(x+1)^{2n} = x^{2n} + 1$ 只有唯一实根 $x = 0$.

20. **Solution.** 根据积分中值定理, $\exists \xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\xi) + f(x) - f(\xi) \leq |f(\xi)| + \left| \int_{\xi}^x f'(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{b-a} \left| \int_a^b f(x) dx \right| + \left| \int_{\xi}^x |f'(t)| dt \right| \\ &\leq \frac{1}{b-a} \left| \int_a^b f(x) dx \right| + \int_a^b |f'(t)| dt. \end{aligned}$$

CHAPTER 13

2018-2019 学年微积分（一）（上）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 以下关于数列的命题, 正确的是 ().
A. 一个有界数列与一个无界数列的和是无界数列
B. 两个无界数列的和是无界数列
C. 一个有界数列与一个无界数列的乘积是无界数列
D. 两个无界数列的乘积是无界数列
2. 设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导, 则函数 $\sqrt[3]{f(x)}$ 在 $x = a$ 处 ().
A. 可导
B. 不连续
C. 连续但不一定可导
D. 不可导
3. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内连续, 则 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内 ().
A. 有界
B. 可导
C. 存在最大值
D. 原函数存在
4. 函数 $f(x) = x^4 - 2x^3$ 有 ().
A. 一个极小值和一个极大值
B. 一个极小值
C. 两个极小值
D. 两个极大值
5. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内满足 $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$, 则在区间 (a, b) 内 ().
A. $f(x)$ 单调减少, 曲线 $y = f(x)$ 下凸
B. $f(x)$ 单调减少, 曲线 $y = f(x)$ 上凸
C. $f(x)$ 单调增加, 曲线 $y = f(x)$ 下凸
D. $f(x)$ 单调增加, 曲线 $y = f(x)$ 上凸
6. 设 $M = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin x} dx$, $N = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sec x} dx$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan x} dx$, 则 M, N, K 的大小关系为 ().
A. $M < N < K$
B. $M < K < N$
C. $N < M < K$
D. $K < N < M$

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. 设 $u = x + a \ln(1-x) + bx \sin(3x)$ 是 x 的 3 阶无穷小, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

8. 曲线 $y = x^3 - 6x^2 + 5x + 3$ 的拐点坐标为 _____.

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{1-\cos x} \tan t \, dt}{\sin x^4} =$ _____.

10. 曲线 $x = 2 \cos^3 t$, $y = 2 \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ 的长度为 _____.

3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 求曲线 $y = \sqrt{4x^2 + 2x + 5}$ ($x > 0$) 的渐近线.

12. 写出 $f(x) = \ln(1+x)$ 带 Lagrange 余项的 n 阶 Maclaurin 公式.

13. 求不定积分 $I = \int \frac{\sqrt{x-3}}{2x} dx$.

14. 求定积分 $I = \int_0^{\frac{1}{2}} x \arcsin x \, dx$.

15. 求反常积分 $I = \int_0^{+\infty} e^{-2x} \sin x \, dx$.

16. 求微分方程 $y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln x$ 的通解.

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 设函数 $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty), \\ e, & x = 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$ 并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

18. 求平面图形 $0 \leq y \leq \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 绕 y 轴旋转所得立体的体积.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f(a) = f(b)$, $|f''(x)| \leq M$, 证明:

$$|f'(a) + f'(b)| \leq M(b - a).$$

20. 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上二阶可导, 并且 $f''(x) \leq 0$, 证明:

$$\int_a^b f(x) \, dx \geq \frac{(b-a)(f(a) + f(b))}{2}.$$

CHAPTER 14

2018-2019 学年微积分 (一) (上) 期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. Solution. A.

对于 A 选项, 假设 $\{a_n\}$ 是一个有界数列, $\{b_n\}$ 是一个无界数列,

即 $\forall n \in \mathbf{N}^+, \exists M > 0$, 使得 $|a_n| \leq M$, 又 $\forall N > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}^+$, 使得 $|b_{n_0}| > N$.

则 $|a_{n_0} + b_{n_0}| \geq |b_{n_0}| - |a_{n_0}| \geq N - M, \forall N - M > 0$, 所以 $\{a_n + b_n\}$ 是一个无界数列.

对于 B 选项, 考虑 $a_n = n, b_n = -n$, 则 $a_n + b_n \equiv 0, \{a_n + b_n\}$ 是一个有界数列.

对于 C 选项, 考虑 $a_n = 0, b_n = n$, 则 $a_n b_n \equiv 0, \{a_n b_n\}$ 是一个有界数列.

对于 D 选项, 考虑 $a_n = \begin{cases} n, & n = 2k, \\ 0, & n = 2k - 1 \end{cases}, b_n = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ n, & n = 2k - 1 \end{cases}$, 其中 $k \in \mathbf{N}^+$,

则 $a_n b_n \equiv 0, \{a_n b_n\}$ 是一个有界数列.

2. Solution. C.

由题意可知 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 存在, 所以

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = 0,$$

即 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[3]{f(a)},$$

故函数 $\sqrt[3]{f(x)}$ 在 $x = a$ 处连续. 考虑 $f(x) = x, a = 0$, 则 $\sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{x}$ 在 $x = 0$ 处不可导,

所以 $\sqrt[3]{f(x)}$ 在 $x = a$ 处连续但不一定可导.

3. Solution. D.

对于 A 选项, 考虑 $f(x) = \frac{1}{x}$, 取 $a = -1, b = 1$, 则 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内连续但无界.

对于 B, C 选项, 考虑 $f(x) = |x|$, 取 $a = -1, b = 1$, 则 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内连续但不存在最大值, 并且存在不可导点 $x = 0$.

连续函数在区间内必然可积, 所以 D 选项正确.

4. **Solution.** B.

因为

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3),$$

所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ 上单调递减, 在区间 $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增.

函数 $f(x)$ 只有一个唯一的极小值点 $x = \frac{3}{2}$, 没有极大值点.

5. **Solution.** A.

由 $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ 可知函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调递减, 曲线 $y = f(x)$ 下凸.

6. **Solution.** B.

在区间 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 内, $\sin x \leq \tan x \leq \sec x$, 所以 $M < K < N$.

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. **Solution.** $a = 1$, $b = \frac{1}{6}$.

由 Taylor 公式,

$$\begin{aligned} u &= x + a \ln(1-x) + bx \sin(3x) \\ &= x - a \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) + bx (3x + o(x^2)) \\ &= (1-a)x + \left(-\frac{a}{2} + 3b \right) x^2 - \frac{a}{3} x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

所以 $1-a=0$, $-\frac{a}{2}+3b=0$, 解得 $a=1$, $b=\frac{1}{6}$.

8. **Solution.** $(2, -3)$.

计算

$$y' = 3x^2 - 12x + 5, \quad y'' = 6x - 12,$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = 2$, 且当 $x < 2$ 时, $y'' < 0$, 当 $x > 2$ 时, $y'' > 0$,

所以曲线 $y = x^3 - 6x^2 + 5x + 3$ 具有拐点 $(2, -3)$.

9. **Solution.** $\frac{1}{8}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{1-\cos x} \tan t \, dt}{\sin x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(1-\cos x) \cdot \sin x}{4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{4x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{8x} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

10. **Solution.** 12.

因为

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} \, dt = \sqrt{(-6\cos^2 t \sin t)^2 + (6\sin^2 t \cos t)^2} \, dt = 6\sqrt{\sin^2 t \cos^2 t} \, dt = 3|\sin 2t| \, dt,$$

故

$$s = 3 \int_0^{2\pi} |\sin 2t| dt = 6 \int_0^{\pi} |\sin u| du = 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u du = 12.$$

3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. **Solution.** 曲线没有竖直渐近线.

因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x + 5}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} = 2, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - 2x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x + 5} - 2x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5}{\sqrt{4x^2 + 2x + 5} + 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{5}{x}}{\sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} + 2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

所以曲线的斜渐近线为 $y = 2x + \frac{1}{2}$.

12. **Solution.** $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + R_n(x)$,

其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$, ξ 介于 0 与 x 之间.

由于 $f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$, 所以 $R_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$.

13. **Solution.** 令 $u = \sqrt{x-3}$, 则 $x = t^2 + 3$, $dx = 2u du$,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sqrt{x-3}}{2x} dx = \int \frac{u}{2(u^2+3)} \cdot 2u du \\ &= \int \left(1 - \frac{3}{u^2+3}\right) du \\ &= u - 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{u}{\sqrt{3}} + C \\ &= \sqrt{x-3} - \sqrt{3} \arctan \sqrt{\frac{x-3}{3}} + C. \end{aligned}$$

14. **Solution.**

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx^2 = \frac{1}{2} x^2 \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 t}{\cos t} \cdot \cos t dt \\ &= \frac{\pi}{48} - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 2t) dt \\ &= \frac{\pi}{48} - \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi}{48}. \end{aligned}$$

15. **Solution.** 记 $J = \int e^{-2x} \sin x \, dx$, 则

$$\begin{aligned} J &= - \int e^{-2x} \, d \cos x \\ &= - e^{-2x} \cos x - 2 \int e^{-2x} \cos x \, dx \\ &= - e^{-2x} \cos x - 2 \int e^{-2x} \, d \sin x \\ &= - e^{-2x} \cos x - 2e^{-2x} \sin x - 4 \int e^{-2x} \sin x \, dx \\ &= - e^{-2x} \cos x - 2e^{-2x} \sin x - 4J. \end{aligned}$$

所以 $J = -\frac{1}{5}e^{-2x} \cos x - \frac{2}{5}e^{-2x} \sin x + C$,

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-2x} \sin x \, dx = \left[-\frac{1}{5}e^{-2x} \cos x - \frac{2}{5}e^{-2x} \sin x \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{5}.$$

16. **Solution.** 令 $u = \frac{1}{y}$, 则 $u' = -\frac{y'}{y^2}$, 所以 $y' = -\frac{u'}{u^2}$.

微分方程 $y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln x$ 变形为 $-\frac{u'}{u^2} + \frac{1}{xu} = \frac{\ln x}{u^2}$, 即

$$u' - \frac{1}{x}u = -\ln x.$$

由一阶非齐次线性微分方程的通解公式得

$$\begin{aligned} u &= e^{-\int(-\frac{1}{x})dx} \left(C + \int (-\ln x) e^{\int(-\frac{1}{x})dx} dx \right) \\ &= x \left[C - \int \ln x \cdot d(\ln x) \right] = x \left(C - \frac{1}{2} \ln^2 x \right). \end{aligned}$$

所以原方程通解为 $xy \left(C - \frac{1}{2} \ln^2 x \right) = 1$.

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. **Solution.** 当 $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ 时, $\ln f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$,

所以

$$f'(x) = f(x) \cdot \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = (1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x^2(1+x)}.$$

当 $x = 0$ 时,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} \\ &= e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1} - 1}{x} = e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \\ &= e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - x}{x^2} = -\frac{e}{2}. \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x^2(1+x)} \\ &= e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x^2} \\ &= e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \ln(1+x) - 1}{2x} = -\frac{e}{2} = f'(0),\end{aligned}$$

所以 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处连续. 当 $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ 时, $f'(x)$ 显然连续, 故 $f'(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上处处连续.

18. **Solution.** 旋转体的体积

$$\begin{aligned}V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi x f(x) dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d \sin x = 2\pi \left(x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = \pi^2 - 2\pi.\end{aligned}$$

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. **Proof.** 由 Taylor 公式,

$$\begin{aligned}f(b) &= f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(b-a)^2, \\ f(a) &= f(b) + f'(b)(a-b) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(a-b)^2,\end{aligned}$$

其中 ξ_1, ξ_2 介于 a 与 b 之间. 上述两式相减得

$$\begin{aligned}f(b) - f(a) &= 0 = f(a) - f(b) + (b-a)(f'(a) + f'(b)) + \frac{1}{2}(b-a)^2(f''(\xi_1) - f''(\xi_2)) \\ &= (b-a)(f'(a) + f'(b)) + \frac{1}{2}(b-a)^2(f''(\xi_1) - f''(\xi_2)).\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}|f'(a) + f'(b)| &= \frac{1}{2}(b-a)|f''(\xi_1) - f''(\xi_2)| \\ &\leq \frac{1}{2}(b-a)(|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|) \\ &= M(b-a).\end{aligned}$$

20. **Solution.** 令 $F(t) = \int_a^t f(x) dx - \frac{(t-a)(f(a) + f(t))}{2} (x \geq a)$,

则

$$\begin{aligned}F'(t) &= f(t) - \frac{f(a) + f(t) + (t-a)f'(t)}{2}, \\ F''(t) &= f'(t) - \frac{1}{2}f'(t) - \frac{1}{2}[f'(t) + (t-a)f''(t)] = -\frac{1}{2}(t-a)f''(t) \geq 0.\end{aligned}$$

所以 $F'(t)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调递增, $F'(t) \geq F'(a) = 0$, 因此

$$\int_a^b f(x) dx \geq \frac{(b-a)(f(a) + f(b))}{2}.$$

CHAPTER 15

2016-2017 学年微积分（一）（上）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则下列命题正确的是 ().

- A. 若 $\{x_n\}$ 发散, 则 $\{y_n\}$ 必发散
B. 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{y_n\}$ 必收敛
C. 若 $\{x_n\}$ 有界, 则 $\{y_n\}$ 必为无穷小
D. 若 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 有界, 则 $\{y_n\}$ 必为无穷小

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \neq 0$, $g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$, 则 $x = 0$ 是函数 $g(x)$ 的 ().

- A. 连续点
B. 跳跃间断点
C. 无穷间断点
D. 可去间断点

3. 当 $x \rightarrow 1$ 时, 无穷小量 $\ln x^2$ 的无穷小主部为 ().

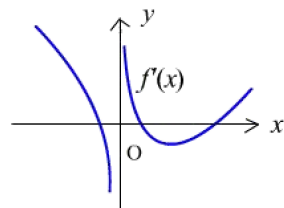
- A. x
B. $x^2 - 1$
C. $2(1 - x)$
D. $2(x - 1)$

4. 若函数 $f(x)$ 在原点处连续, $F(x) = f(x)|\sin x|$, 则 $f(0) = 0$ 是 $F'(0)$ 存在的 ().

- A. 充要条件
B. 充分但非必要条件
C. 必要但非充分条件
D. 既非充分也非必要条件

5. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 其导函数图形如右图所示, 则 $f(x)$ 的极值点的个数为 ().

- A. 1
B. 2
C. 3
D. 4



6. 若函数 $f(x) = 2^{\frac{1}{x}} + \arctan \frac{x|x|}{(x-1)(x-2)}$, 则直线 () 不是此函数的渐近线.

- A. $x = 0$
B. $y = 1 - \frac{\pi}{4}$
C. $x = 2$
D. $y = 1 + \frac{\pi}{4}$

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{\sin x^3} = \underline{\hspace{2cm}}.$

8. $\int_0^1 x(1-x)^{99} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

9. 设点 $(1, 4)$ 为曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}.$

10. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x^3}{1 + \sin^4 x} + \sin^4 x \cos x \right) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 设函数 $y = f(x)$ 是由方程 $e^{2x+y} - \cos(xy) = e - 1$ 所确定的隐函数, 求导数 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}.$

12. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$ 确定, 求导数 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}.$

13. 求定积分 $I = \int_0^\pi \sin^5 x \sqrt{1 - \sin^2 x} dx.$

14. 求极限 $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right]^{\frac{1}{n}}.$

15. 求微分方程 $y' - e^{x-y} = 1$ 的通解.

16. 求反常积分 $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(\sqrt{x} + 1)}{x^2} dx.$

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 设曲线段 $y = ax^2 (a > 0, 0 \leq x \leq 1)$ 与 x 轴及直线 $x = 1$ 围成一个曲边三角形 A , 图形 A 绕 x 轴旋转一周得到的旋转体的体积记为 V_1 , 图形 A 绕直线 $x = 1$ 旋转一周得到的旋转体的体积记为 V_2 , 求 a 取何值时体积差 $V_2 - V_1$ 最大?

18. 应用微分学知识讨论方程 $x \ln x + a = 0$ 的根问题:

- (1) a 取何值时, 该方程有一个实根?
- (2) a 取何值时, 该方程有两个实根?

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ ($a > 0$) 上有二阶连续导数, 并且在区间内部取得最小值 -1 , $f(a) = f(b) = 1$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = \frac{16}{(b-a)^2}$.

20. 设 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上单调递减的连续函数, 则有 $\int_a^b (x-a)^3 f(x) \mathrm{d}x \leq \frac{(b-a)^3}{4} \int_a^b f(x) \mathrm{d}x$.

CHAPTER 16

2016-2017 学年微积分 (一) (上) 期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. **Solution.** D.

对于 A 选项, 考虑 $x_n = \begin{cases} n, & n = 2k, \\ 0, & n = 2k - 1 \end{cases}$, $y_n = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ n, & n = 2k - 1 \end{cases}$, 其中 $k \in \mathbf{N}^+$,

则 $x_n y_n \equiv 0$, 但 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 均发散.

对于 B, C 选项, 考虑 $x_n = 0$, $y_n = n$, 则 $x_n y_n \equiv 0$, $\{x_n\}$ 收敛、有界, 但 $\{y_n\}$ 发散.

对于 D 选项, 即存在 $M > 0$ 使得 $\left| \frac{1}{x_n} \right| \leq M$ 对任意的 n 成立,

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_n y_n|}{|x_n|} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M |x_n y_n| = 0$, 故 $\{y_n\}$ 为无穷小.

2. **Solution.** A.

由题意可知 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = a = g(0)$,

所以函数 $g(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

3. **Solution.** D.

设 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x^2}{c(x-1)^k} = 1$, 则

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x^2}{c(x-1)^k} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \ln x}{c(x-1)^k} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{ck(x-1)^{k-1}x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{ck(x-1)^{k-1}}. \end{aligned}$$

所以 $k = 1$, $c = 2$, 无穷小主部为 $2(x-1)$.

4. **Solution.** A.

若 $f(0) = 0$, 因为 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

又 $F(0) = 0$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)|\sin x|}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot \frac{|\sin x|}{x}. \end{aligned}$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 且 $\frac{|\sin x|}{x}$ 在 $x \rightarrow 0$ 时是有界变量, 无穷小量乘有界变量仍为无穷小量, 故 $F'(0) = 0$, 即 $F'(0)$ 存在.

若 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x}$ 存在, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)|\sin x|}{x}$ 存在.

分别考察左右极限:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)|\sin x|}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \frac{\sin x}{x} = f(0) \cdot 1 = f(0), \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)|\sin x|}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \frac{-\sin x}{x} = f(0) \cdot (-1) = -f(0).\end{aligned}$$

因为极限存在, 左右极限必须相等, 所以 $f(0) = -f(0)$, 解得 $f(0) = 0$.

因此 $f(0) = 0$ 是 $F'(0)$ 存在的充要条件.

5. Solution. D.

由图可知 $f'(x)$ 在 $x < 0$ 时有一次变号, 在 $x > 0$ 时有两次变号, 并且 $f'(0^-) < 0$, $f'(0^+) > 0$, 所以 $x = 0$ 也是 $f(x)$ 的极值点. 故 $f(x)$ 的极值点的个数为 4.

6. Solution. C.

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty$, 所以 $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的竖直渐近线. 又

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2^{\frac{1}{x}} + \arctan \frac{x|x|}{(x-1)(x-2)} \right] = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan \frac{-x^2}{(x-1)(x-2)} = 1 - \frac{\pi}{4}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2^{\frac{1}{x}} + \arctan \frac{x^2}{(x-1)(x-2)} \right] = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan \frac{x^2}{(x-1)(x-2)} = 1 + \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

所以 $y = 1 - \frac{\pi}{4}$ 与 $y = 1 + \frac{\pi}{4}$ 是函数 $f(x)$ 的水平渐近线.

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. Solution. $\frac{1}{3}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{\sin x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

8. Solution. $\frac{1}{10100}$.

令 $1 - x = u$, 则

$$\int_0^1 x(1-x)^{99} dx = \int_1^0 (1-u)u^{99}(-du) = \int_0^1 (u^{99} - u^{100}) du = \frac{1}{100} - \frac{1}{101} = \frac{1}{10100}.$$

9. Solution. $a = -2$, $b = 6$.

因为 $y' = 3ax^2 + 2bx$, $y'' = 6ax + 2b$,

所以 $y''(1) = 6a + 2b = 0$, $y(1) = a + b = 4$, 解得 $a = -2$, $b = 6$.

10. **Solution.** $\frac{2}{5}$.

由于 $y = \frac{x^3}{1 + \sin^4 x}$ 是奇函数, 所以 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^3}{1 + \sin^4 x} dx = 0$.

故

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x^3}{1 + \sin^4 x} + \sin^4 x \cos x \right) dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x d \sin x \\ &= \frac{2}{5} \sin^5 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. **Solution.** 方程 $e^{2x+y} - \cos(xy) = e - 1$ 两边对 x 求导, 得

$$e^{2x+y}(2 + y') + \sin(xy)(y + xy') = 0.$$

将 $x = 0$, $y = f(0) = 1$ 代入上式, 得 $e(2 + y'|_{x=0}) = 0$, 所以 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = -2$.

12. **Solution.**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3 - 3t^2}{2 - 2t} = \frac{3(1+t)}{2}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \left(\frac{3(1+t)}{2} \right)' \cdot \frac{1}{2-2t} = \frac{3}{4(1-t)}. \end{aligned}$$

13. **Solution.**

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \sin^5 x |\cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^5 x (-\cos x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x d \sin x - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^5 x d \sin x \\ &= \frac{1}{6} \sin^6 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{6} \sin^6 x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

14. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= \exp \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left(1 + \frac{2}{n} \right) + \cdots + \ln \left(1 + \frac{n}{n} \right) \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right\} \\ &= \exp \left[\int_0^1 \ln(1+x) dx \right] = \exp \left[x \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx \right] \\ &= \exp \left[\ln 2 - 1 + \ln(1+x) \Big|_0^1 \right] = e^{2 \ln 2 - 1} = \frac{4}{e}. \end{aligned}$$

15. **Solution.**

法一. 令 $u = y - x$, 则 $\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1$, 原方程可化为 $\frac{du}{dx} = e^{-u}$, 即 $e^u du = dx$,

两边积分得 $e^u = x + C$, 所以原方程的通解为 $e^{y-x} = x + C$.

法二. 方程两边同乘 e^y , 得 $e^y y' - e^x = e^y$, 即 $(e^y)' = e^x + e^y$.

这是一个关于 e^y 的一阶非齐次线性微分方程, 由通解公式得

$$\begin{aligned} e^y &= e^{-\int -dx} \left(C + \int e^x e^{-\int dx} dx \right) \\ &= e^x \left(C + \int dx \right) = e^x (x + C). \end{aligned}$$

16. **Solution.** 令 $u = \sqrt{x} + 1$, 则 $x = (u - 1)^2$, $dx = 2(u - 1) du$,

$$\begin{aligned} I &= \int_2^{+\infty} \frac{\ln u}{(u-1)^4} \cdot 2(u-1) du = 2 \int_2^{+\infty} \frac{\ln u}{(u-1)^3} du \\ &= - \int_2^{+\infty} \ln u d \frac{1}{(u-1)^2} = - \left. \frac{\ln u}{(u-1)^2} \right|_2^{+\infty} + \int_2^{+\infty} \frac{1}{u(u-1)^2} du \\ &= \ln 2 + \int_2^{+\infty} \left[\frac{1}{u} - \frac{1}{u-1} + \frac{1}{(u-1)^2} \right] du \\ &= \ln 2 + \left[\ln \frac{u}{u-1} - \frac{1}{u-1} \right]_2^{+\infty} = \ln 2 - \ln 2 + 1 = 1. \end{aligned}$$

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. **Solution.** 因为

$$V_1 = \int_0^1 \pi y^2 dx = \pi a^2 \int_0^1 x^4 dx = \frac{\pi a^2}{5},$$

$$V_2 = \int_0^a \pi (1-x)^2 dy = 2\pi a \int_0^1 (1-x)^2 x dx = \frac{\pi a}{6},$$

故 $V_2 - V_1 = \frac{\pi a}{6} - \frac{\pi a^2}{5}$. 令 $\frac{d}{da}(V_2 - V_1) = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi a}{5} = 0$, 解得 $a = \frac{5}{12}$.

由于 $\frac{d^2}{da^2}(V_2 - V_1) = -\frac{2\pi}{5} < 0$, 所以当 $a = \frac{5}{12}$ 时, 体积差 $V_2 - V_1$ 最大.

18. **Solution.** 令 $f(x) = x \ln x$, 则 $f'(x) = \ln x + 1$,

当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减; 当 $x > \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增.

$$f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0, \quad f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}, \quad f(+\infty) = +\infty.$$

(1) 当 $-a \geq 0$ 或 $-a = -\frac{1}{e}$, 即 $a \leq 0$ 或 $a = \frac{1}{e}$ 时, 方程 $x \ln x + a = 0$ 有一个实根.

(2) 当 $-a \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$, 即 $a \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ 时, 方程 $x \ln x + a = 0$ 有两个实根.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. **Proof.** 由题意可知, 存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f'(c) = 0$ 且 $f(c) = -1$.

由 Taylor 公式,

$$f(a) - f(c) = 2 = f'(c)(a - c) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(a - c)^2 = \frac{f''(\xi_1)}{2}(c - a)^2,$$

$$f(b) - f(c) = 2 = f'(c)(b - c) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(b - c)^2 = \frac{f''(\xi_2)}{2}(b - c)^2,$$

其中 ξ_1, ξ_2 介于 a 与 b 之间. 上述两式即 $f''(\xi_1) = \frac{16}{[2(c - a)]^2}$, $f''(\xi_2) = \frac{16}{[2(b - c)]^2}$.

记 $M = \max\{2(c - a), 2(b - c)\}$, $N = \min\{2(c - a), 2(b - c)\}$, 则 $N \leq b - a \leq M$,

所以 $\frac{16}{M^2} \leq \frac{16}{(b - a)^2} \leq \frac{16}{N^2}$.

因为 $f''(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 由介值定理可知, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f''(\xi) = \frac{16}{(b - a)^2}$.

20. **Solution.** 令 $F(t) = \int_a^t (x - a)^3 f(x) \, dx - \frac{(t - a)^3}{4} \int_a^t f(x) \, dx \quad (a \leq t \leq b)$,

则

$$\begin{aligned} F'(t) &= (t - a)^3 f(t) - \frac{3(t - a)^2}{4} \int_a^t f(x) \, dx - \frac{(t - a)^3}{4} f(t) \\ &= \frac{3(t - a)^3}{4} f(t) - \frac{3(t - a)^2}{4} \int_a^t f(x) \, dx \\ &= \frac{3(t - a)^2}{4} \left[(t - a)f(t) - \int_a^t f(x) \, dx \right]. \end{aligned}$$

由积分中值定理, 存在 $\xi \in (a, t)$ 使得 $\int_a^t f(x) \, dx = (t - a)f(\xi)$,

所以 $F'(t) = \frac{3(t - a)^2}{4} \left[(t - a)f(t) - \int_a^t f(x) \, dx \right] = \frac{3(t - a)^3}{4} [f(t) - f(\xi)]$.

因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递减, 所以 $f(t) \leq f(\xi)$, 故 $F'(t) \leq 0$, $F(t)$ 在 $[a, b]$ 上单调递减.

因此 $F(b) \leq F(a) = 0$, 即 $\int_a^b (x - a)^3 f(x) \, dx \leq \frac{(b - a)^3}{4} \int_a^b f(x) \, dx$.

Part III

微积分 (B) (下) 期中考试

CHAPTER 1

2025-2026 学年微积分 (B) (下) 期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 已知向量 $\mathbf{a} = (2, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (-1, 2, -2)$, 又向量 $\mathbf{c}$ 在 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的夹角 (在 0 与 π 之间) 的平分线上, 且 $|\mathbf{c}| = 6\sqrt{2}$, 求向量 $\mathbf{c}$.

2. 求过直线 $L: \begin{cases} x + 2z + 1 = 0, \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$ 且与平面 $\pi: x + y + 2z - 4 = 0$ 夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 的平面方程.

3. 求曲线 $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 45, \\ x^2 + 2y^2 = z \end{cases}$ 在点 $M(-2, 1, 6)$ 的切线和法平面方程.

4. 设函数 $f(x, y) = \int_0^{xy} e^{-t^2} dt + \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, 求 $df|_{(1,2)}$.

5. 设函数 $z = f\left(x^2 + y, \frac{x}{y}\right)$, 其中 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

6. 设函数 $f(x, y) = 2x^2 + ax + xy^2 + 2y$ 在 $(1, -1)$ 处取得极值, 求常数 a , 并确定极值类型.

7. 计算二次积分 $I = \int_0^1 dy \int_{\frac{y}{2}}^y \sin \frac{\pi y}{x} dx + \int_1^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^1 \sin \frac{\pi y}{x} dx$.

8. 设 $u = f(x, y, z)$, $\varphi(x^2, e^y, z) = 0$, $y = \sin x$, 其中 f, φ 都具有一阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$, 求 $\frac{du}{dx}$.

9. 计算积分 $I = \iint_D |x^2 + y^2 - 2x| \, dx \, dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

10. 计算积分 $I = \iiint_V (y \cos x + z) \, dx \, dy \, dz$, 其中 V 由曲面 $z = x^2 + y^2$ 和 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 所围成.

2 综合题 (每小题 8 分, 共 40 分)

11. 求直线 $L: \frac{x}{\alpha} = \frac{y - \beta}{0} = \frac{z}{1}$ 绕 z 轴旋转而成的曲面方程, 并就 α, β (α, β 不同时为零) 的值讨论方程表示什么曲面?

12. 在椭球面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上求一点, 使函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在该点处沿方向 $\boldsymbol{l} = (1, -1, 0)$ 的方向导数最大, 并求出该方向导数.

13. 曲面 Σ 的方程为 $z^5 - xz^4 + yz^3 = 1$, 平面 π 为曲面 Σ 在点 $P(1, 1, 1)$ 处的切平面, 直线 L_1 为直线

$$L: \begin{cases} 2x + 2z + 1 = 0, \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

在平面 π 上的投影直线, 求点 $P(1, 1, 1)$ 到直线 L_1 的距离 d .

14. 设函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

- (1) 求 $f_x(x, y), f_y(x, y)$;
(2) 讨论函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的可微性.

15. 设 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的单调减少的连续函数, 试证明: 对任意 $t \geq 0$ 都成立不等式

$$\iint_D \left(\frac{t^2}{x} - 6y \right) f(x) \, dx \, dy \geq 0,$$

其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq t, y \leq x \leq t\}$.

CHAPTER 2

2025-2026 学年微积分 (B) (下) 期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 由

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 3$$

可知

$$\mathbf{a}^0 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad \mathbf{b}^0 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

因而夹角内角平分线方向可取

$$\mathbf{d} = \mathbf{a}^0 + \mathbf{b}^0 = \frac{1}{3}(1, 1, 0).$$

单位方向为

$$\mathbf{d}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0).$$

又 $|\mathbf{c}| = 6\sqrt{2}$, 故

$$\mathbf{c} = 6\sqrt{2}\mathbf{d}^0 = (6, 6, 0).$$

2. **Solution.** 显然 $x + 2z + 1 = 0$ 与平面 π 的夹角不为 $\frac{\pi}{3}$, 因此可设过 L 的平面束方程为

$$x + 2z + 1 + \lambda(x - y - z + 1) = 0,$$

其法向量为

$$\mathbf{n}_1 = (\lambda + 1, -\lambda, 2 - \lambda).$$

平面 π 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (1, 1, 2)$. 由两平面夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 得

$$\frac{|5 - 2\lambda|}{\sqrt{6}\sqrt{3\lambda^2 - 2\lambda + 5}} = \frac{1}{2}.$$

化简得

$$\lambda^2 + 34\lambda - 35 = 0.$$

所以 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -35$, 代入平面束, 得所求平面为

$$2x - y + z + 2 = 0 \quad \text{或} \quad 34x - 35y - 37z + 34 = 0.$$

3. **Solution.** 令 $F = 2x^2 + y^2 + z^2 - 45$, $G = x^2 + 2y^2 - z$, 则

$$\nabla F|_{(-2,1,6)} = (-8, 2, 12), \quad \nabla G|_{(-2,1,6)} = (-4, 4, -1).$$

因而切线方向为

$$\nabla F \times \nabla G = (-50, -56, -24),$$

取切向量 $\tau = (25, 28, 12)$, 故切线方程为

$$\frac{x+2}{25} = \frac{y-1}{28} = \frac{z-6}{12}.$$

法平面方程为 $25(x+2) + 28(y-1) + 12(z-6) = 0$, 即

$$25x + 28y + 12z - 50 = 0.$$

4. **Solution.** 由

$$f_x = ye^{-x^2y^2} + \frac{x}{x^2+y^2}, \quad f_y = xe^{-x^2y^2} + \frac{y}{x^2+y^2},$$

且 f_x, f_y 在 $(1, 2)$ 处连续, 故 f 在 $(1, 2)$ 处可微. 又

$$f_x(1, 2) = 2e^{-4} + \frac{1}{5}, \quad f_y(1, 2) = e^{-4} + \frac{2}{5}.$$

因此

$$df|_{(1,2)} = \left(2e^{-4} + \frac{1}{5}\right)dx + \left(e^{-4} + \frac{2}{5}\right)dy.$$

5. **Solution.** 记

$$u = x^2 + y, \quad v = \frac{x}{y}.$$

则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 u'_x + f'_2 v'_x = 2xf'_1 + \frac{1}{y}f'_2.$$

再对 y 求偏导, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 2x \left(f''_{11} + f''_{12} \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) \right) - \frac{1}{y^2} f'_2 + \frac{1}{y} \left(f''_{21} + f''_{22} \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) \right) \\ &= 2xf''_{11} + \frac{y-2x^2}{y^2} f''_{12} - \frac{1}{y^2} f'_2 - \frac{x}{y^3} f''_{22}, \end{aligned}$$

6. **Solution.** 因

$$f_x = 4x + a + y^2, \quad f_y = 2xy + 2,$$

而 f 在 $(1, -1)$ 处取得极值, 所以

$$f_x(1, -1) = 0, \quad f_y(1, -1) = 0.$$

解得

$$a = -5.$$

此时

$$A = f_{xx} = 4, \quad B = f_{xy} = 2y, \quad C = f_{yy} = 2x,$$

在 $(1, -1)$ 处

$$AC - B^2 = 4 \cdot 2 - (-2)^2 = 4 > 0, \quad A > 0.$$

故 $f(x, y)$ 在 $(1, -1)$ 处取得极小值.

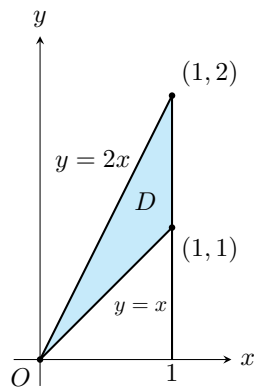
7. Solution.

由题意绘制积分区域 D 如图所示, 可以改写为

$$D: 0 \leq x \leq 1, \quad x \leq y \leq 2x.$$

因而

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_x^{2x} \sin \frac{\pi y}{x} dy \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{x}{\pi} \cos \frac{\pi y}{x} \right]_{y=x}^{2x} dx \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^1 x dx = -\frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$



8. Solution. 对方程组 $\begin{cases} \varphi(x^2, e^y, z) = 0, \\ y = \sin x \end{cases}$ 两边关于 x 求导, 得 $\begin{cases} 2x\varphi_1 + e^y\varphi_2 \frac{dy}{dx} + \varphi_3 \frac{dz}{dx} = 0, \\ \frac{dy}{dx} = \cos x. \end{cases}$

解得

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{2x\varphi_1 + e^y \cos x \varphi_2}{\varphi_3}.$$

再对 $u = f(x, y, z)$ 两边关于 x 求导, 得

$$\frac{du}{dx} = f'_1 + \cos x f'_2 - \frac{2x\varphi_1 + e^y \cos x \varphi_2}{\varphi_3} f'_3.$$

9. Solution.

记

$$f = x^2 + y^2 - 2x.$$

令

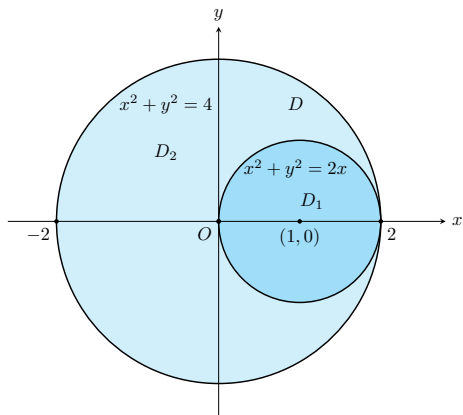
$$D_1: x^2 + y^2 \leq 2x, \quad D_2 = D \setminus D_1.$$

则 $f \leq 0$ 于 D_1 , $f > 0$ 于 D_2 , 故

$$I = -2 \iint_{D_1} f dx dy + \iint_D f dx dy.$$

用极坐标代换,

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} (2r\cos\theta - r^2)r dr \\ &\quad + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (r^2 - 2r\cos\theta)r dr \\ &= \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta + \int_0^{2\pi} \left(4 - \frac{16}{3} \cos\theta \right) d\theta \\ &= \frac{16}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + 8\pi = 9\pi. \end{aligned}$$



10. Solution. 由对称性可知

$$\iiint_V y \cos x dx dy dz = 0.$$

联立两曲面方程可得交线在 xOy 平面上的投影为

$$x^2 + y^2 = 1.$$

因而

$$I = \iiint_V z \, dx \, dy \, dz = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx \, dy \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z \, dz.$$

用极坐标代换,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r \, dr \int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} z \, dz \\ &= \pi \int_0^1 (2 - r^2 - r^4) r \, dr \\ &= \pi \left(r^2 - \frac{1}{4} r^4 - \frac{1}{6} r^6 \right) \Big|_0^1 = \frac{7\pi}{12}. \end{aligned}$$

2 综合题 (每小题 8 分, 共 40 分)

11. **Solution.** 将直线写成参数方程 $\begin{cases} x = \alpha t, \\ y = \beta, \\ z = t \end{cases}$, 直线在绕 z 轴旋转的过程中, 对应点到 z 轴的距离不变.

设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为 L 上的点, 绕 z 轴旋转到点 $M(x, y, z)$, 则有

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2 = \alpha^2 t^2 + \beta^2, \\ z = z_0 = t. \end{cases}$$

消去 t 得旋转曲面方程

$$x^2 + y^2 - \alpha^2 z^2 = \beta^2.$$

当 $\alpha = 0, \beta \neq 0$ 时, 方程为 $x^2 + y^2 = \beta^2$, 表示圆柱面;

当 $\alpha \neq 0, \beta = 0$ 时, 方程为 $x^2 + y^2 = \alpha^2 z^2$, 表示圆锥面;

当 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ 时, 方程为 $\frac{x^2 + y^2}{\beta^2} - \frac{\alpha^2 z^2}{\beta^2} = 1$, 表示单叶双曲面.

12. **Solution.** 方向 $\boldsymbol{l}$ 的单位向量为

$$\boldsymbol{l}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0).$$

设椭球面上一点为 (a, b, c) , 则

$$2a^2 + 2b^2 + c^2 = 1.$$

因

$$\nabla f(a, b, c) = (2a, 2b, 2c),$$

所以方向导数为

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} \right|_{(a,b,c)} = \nabla f(a, b, c) \cdot \boldsymbol{l}^0 = \sqrt{2}(a - b).$$

问题转化为在约束 $2a^2 + 2b^2 + c^2 = 1$ 下求 $\sqrt{2}(a - b)$ 的最大值.

用 Lagrange 乘数法, 设 $L(a, b, c, \lambda) = \sqrt{2}(a - b) + \lambda(2a^2 + 2b^2 + c^2 - 1)$, 令 $\nabla L = \mathbf{0}$, 得

$$\begin{cases} \sqrt{2} + 4\lambda a = 0, \\ -\sqrt{2} + 4\lambda b = 0, \\ 2\lambda c = 0, \\ 2a^2 + 2b^2 + c^2 = 1. \end{cases}$$

解得驻点为 $M_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ 或 $M_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

$$\text{计算 } \left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_1} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_2} = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{2},$$

所以在椭球面上的点 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ 处函数 f 沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数最大, 最大值为 $\sqrt{2}$.

13. **Solution.** 令

$$F(x, y, z) = z^5 - xz^4 + yz^3 - 1.$$

则

$$\nabla F(1, 1, 1) = (-1, 1, 4).$$

故切平面 π 为 $-(x - 1) + (y - 1) + 4(z - 1) = 0$, 即

$$x - y - 4z + 4 = 0.$$

设过直线 L 的平面束方程为

$$2x + 2z + 1 + \lambda(x - y - z + 1) = 0.$$

令该平面垂直于 π , 可得 $(\lambda + 2, -\lambda, -\lambda + 2) \cdot (-1, 1, 4) = 0$, 解得 $\lambda = 1$, 从而平面为

$$3x - y + z + 2 = 0.$$

所以投影直线 L_1 为

$$\begin{cases} x - y - 4z + 4 = 0, \\ 3x - y + z + 2 = 0. \end{cases}$$

取 L_1 上一点 $P_1(1, 5, 0)$, 则 $\overrightarrow{P_1P} = (0, -4, 1)$, 又直线的方向向量可取为

$$\mathbf{s}_1 = (1, -1, 4) \times (3, -1, 1) = (-5, -13, 2).$$

故

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_1P} \times \mathbf{s}_1|}{|\mathbf{s}_1|} = \frac{5\sqrt{1+1+16}}{\sqrt{25+169+4}} = \frac{5\sqrt{11}}{11}.$$

14. **Solution.** 当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时,

$$f_x(x, y) = \frac{x^2(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_y(x, y) = -\frac{2x^3y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

又

$$f(x, 0) = x, \quad f(0, y) = 0,$$

所以

$$f_x(0,0) = 1, \quad f_y(0,0) = 0.$$

因而

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 1, & x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} -\frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

下面讨论函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的可微性. 因为

$$f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y = \frac{x^3}{x^2+y^2} - x = -\frac{xy^2}{x^2+y^2},$$

所以

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

问题转化为判断 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ 是否为 0.

考虑路径 $y = x$, 由于 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=x}} \frac{-xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3}{(2x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{|x^3|}$ 不存在,

这意味着

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

不存在, 因此函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

15. **Proof.** 交换积分次序可得

$$\iint_D \left(\frac{t^2}{x} - 6y \right) f(x) \, dx \, dy = \int_0^t f(x) \, dx \int_0^x \left(\frac{t^2}{x} - 6y \right) \, dy.$$

即

$$\iint_D \left(\frac{t^2}{x} - 6y \right) f(x) \, dx \, dy = \int_0^t (t^2 - 3x^2) f(x) \, dx.$$

记

$$F(t) = \int_0^t (t^2 - 3x^2) f(x) \, dx.$$

则

$$F'(t) = 2t \int_0^t f(x) \, dx + t^2 f(t) - 3t^2 f(t) = 2t \int_0^t (f(x) - f(t)) \, dx.$$

由于 f 单调减少, 当 $0 \leq x \leq t$ 时, $f(x) \geq f(t)$, 故 $t \geq 0$ 时 $F'(t) \geq 0$. 又 $F(0) = 0$, 所以 $F(t) \geq 0$, 即

$$\iint_D \left(\frac{t^2}{x} - 6y \right) f(x) \, dx \, dy \geq 0.$$

CHAPTER 3

2024-2025 学年微积分 (B) (下) 期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 设 $M_0(2, -1, 1)$, $M_1(3, 2, -1)$, $M_2(1, 3, -2)$ 是空间三点, $\boldsymbol{l}$ 为与向量 $2\overrightarrow{M_0M_1} - 2\overrightarrow{M_0M_2}$ 方向相同的单位向量, 求以 $\boldsymbol{l}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$ 为邻边的平行四边形的面积 S .

2. 已知单位向量 $\overrightarrow{OA}$ 与三个坐标轴正向的夹角相等, 且夹角的方向余弦为正, 点 B 是点 $M(1, 1, -1)$ 关于点 $N(-1, 2, 1)$ 的对称点, 求 $\angle AOB$ 的角平分线上的单位向量.

3. 求二重极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1 + 2x^2 + 2y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2} \sin \sqrt{x^2 + y^2}}.$

4. 将曲线 $L: \begin{cases} z = x^2 + 1, \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周得到一个旋转曲面 S , 求该旋转曲面 S 与平面 $x + y + z = 1$ 的交线的参数方程.

5. 设函数 $f(x, y) = x^2(y - 3) + (x - 1) \arctan \sqrt{\frac{x}{y}}$, 求 $df|_{(1,3)}$.

6. 设 $u = f(x, y, z)$ 有连续的一阶偏导数, $y = y(x)$ 由方程 $e^{xy} = xy + 2$ 确定, $z = z(x)$ 由方程 $e^x = \int_0^{x-z} e^{t^2} dt$ 确定, 求 $\frac{du}{dx}$.

7. 计算二次积分 $I = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{\sqrt{1+y^3}} dy$.

8. 设函数 $z = g\left(\frac{y}{x}\right) + f\left(xy, \frac{x}{y}\right)$, 其中 $f(u, v)$ 具有二阶连续的偏导数, $g(t)$ 二阶导数连续, 试求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

9. 计算二重积分

$$I = \iint_D \left(x^2 y + (y^3 + x) \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx dy,$$

其中 $D: x^2 + y^2 \leq 2x$.

10. 计算三重积分 $I = \iiint_V (y + 2z) dV$, 其中 V 由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 所围成.

2 综合题 (每小题 8 分, 共 40 分)

11. 设向量 $\mathbf{a} = (2, -1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$, 向量 $\mathbf{d}$ 与向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 均垂直, 且与 z 轴夹角锐角, 求函数 $u = xy + 2y + 3zx$ 在点 $M_0(1, -2, 1)$ 处沿方向 $\mathbf{d}$ 的方向导数.

12. 设曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $Q(1, 1, -2)$ 处的切线为 l , 曲面 $xy + z = 0$ 在点 $P_0(2, 1, -2)$ 处的切平面为 π , 求切线 l 在平面 π 上的投影直线的方程.

13. 记曲面 $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ 在区域 $D: x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3$ 上的最低点为 Q , 求过点 Q 且与直线 $\begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ 垂直的平面方程.

14. 讨论函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在原点处的连续性、偏导数存在性及可微性.

15. 设函数 $f(x, y)$ 在全平面内可微, 且满足 $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, 证明:
 $\forall t \in \mathbf{R}, f(tx, ty) = f(x, y)$, 即 $f(x, y)$ 恒为常数.

CHAPTER 4

2024-2025 学年微积分 (B) (下) 期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 由题可知 $\overrightarrow{M_0M_1} = (1, 3, -2)$, $\overrightarrow{M_0M_2} = (-1, 4, -3)$,

所以 $2\overrightarrow{M_0M_1} - 2\overrightarrow{M_0M_2} = (4, -2, 2)$, $\mathbf{l} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1)$.

$$S = |\mathbf{l} \times \overrightarrow{M_0M_1}| = \frac{1}{\sqrt{6}}|(-1, 5, 7)| = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

2. **Solution.** 由题可知 $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, $B(-3, 3, 3)$, $\overrightarrow{OB} = 3(-1, 1, 1)$.

设 $\overrightarrow{OB}$ 方向上的单位向量为 $\mathbf{u}$, 则 $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$.

故 $\angle AOB$ 的角平分线上的单位向量为 $\frac{\overrightarrow{OA} + \mathbf{u}}{|\overrightarrow{OA} + \mathbf{u}|} = \frac{(0, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$.

3. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1 + 2x^2 + 2y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2} \sin \sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 2. \end{aligned}$$

4. **Solution.** 由题可得 S 的方程为 $z = x^2 + y^2 + 1$, 所以交线为 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 + 1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$

消去 z 得 $x^2 + y^2 + x + y = 0$, 即 $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

$$\text{令 } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta - \frac{1}{2}, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (0 \leq \theta < 2\pi), \text{ 则 } z = 1 - x - y = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \theta + \sin \theta) = 2 - \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right).$$

因此交线的参数方程为
$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta - \frac{1}{2}, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta - \frac{1}{2}, \\ z = 2 - \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \end{cases} \quad (0 \leq \theta < 2\pi).$$

5. **Solution.** 方程 $f(x, y) = x^2(y-3) + (x-1) \arctan \sqrt{\frac{x}{y}}$ 两边全微分, 得

$$\begin{aligned} df &= 2x dx \cdot (y-3) + x^2 dy + dx \cdot \arctan \sqrt{\frac{x}{y}} + (x-1) \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}} \cdot \left(\frac{y dx - x dy}{y^2} \right) \\ &= 2x(y-3) dx + x^2 dy + \arctan \sqrt{\frac{x}{y}} dx + (x-1) \cdot \frac{y dx - x dy}{2y^2 \sqrt{\frac{x}{y}} \left(1 + \frac{x}{y} \right)}. \end{aligned}$$

所以 $df|_{(1,3)} = dy + \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} dx = \frac{\pi}{6} dx + dy$.

6. **Solution.** 令 $F(x, y) = e^{xy} - xy - 2$,

注意到当 $xy = 0$ 时, 方程 $e^{xy} = xy + 2$ 不成立, 所以 $F(x, y)$ 的定义域为 $x \neq 0, y \neq 0$. 故

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{ye^{xy} - y}{xe^{xy} - x} = -\frac{y}{x}.$$

令 $G(x, z) = e^x - \int_0^{x-z} e^{t^2} dt$,

注意到当 $x - z = 0$ 时, 方程 $e^x = \int_0^{x-z} e^{t^2} dt$ 不成立, 所以 $G(x, z)$ 的定义域为 $x \neq z$. 故

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{G'_x}{G'_z} = -\frac{e^x - e^{(x-z)^2}}{e^{(x-z)^2}}.$$

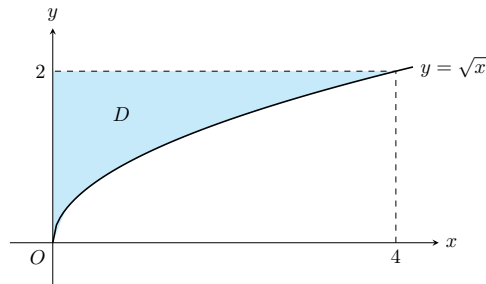
所以

$$\frac{du}{dx} = f'_1 \cdot 1 + f'_2 \cdot \frac{dy}{dx} + f'_3 \cdot \frac{dz}{dx} = f'_1 - f'_2 \cdot \frac{y}{x} + f'_3 \cdot \frac{e^x - e^{(x-z)^2}}{e^{(x-z)^2}}, x \neq 0, y \neq 0, x \neq z.$$

7. **Solution.**

积分区域 D 如右图所示. 交换积分次序得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 dy \int_0^{y^2} \frac{1}{\sqrt{1+y^3}} dx = \int_0^2 \frac{y^2}{\sqrt{1+y^3}} dy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^2 \frac{d(1+y^3)}{\sqrt{1+y^3}} \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{1+y^3} \Big|_0^2 = \frac{2}{3} (\sqrt{9} - 1) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$



8. **Solution.**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = g' \left(\frac{y}{x} \right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2} \right) + f'_1 \cdot y + f'_2 \cdot \frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left[-\frac{1}{x^2} g' \left(\frac{y}{x} \right) - \frac{y}{x^2} \cdot \frac{1}{x} g'' \left(\frac{y}{x} \right) \right] + \left[f'_1 + y \left(x f''_{11} - \frac{x}{y^2} f''_{12} \right) \right] + \left[-\frac{1}{y^2} f'_2 + \frac{1}{y} \left(x f''_{21} - \frac{x}{y^2} f''_{22} \right) \right].$$

由于 $f(u, v)$ 二阶偏导数连续, 所以 $f''_{12} = f''_{21}$, 整理得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2} g' \left(\frac{y}{x} \right) - \frac{y}{x^3} g'' \left(\frac{y}{x} \right) + f'_1 - \frac{1}{y^2} f'_2 + xy f''_{11} - \frac{x}{y^3} f''_{22}.$$

9. **Solution.** 积分区域 D 是以点 $(1, 0)$ 为圆心, 半径 1 的圆盘.

由于 D 关于 x 轴对称, 且 $x^2 y$ 与 $y^3 \sqrt{x^2 + y^2}$ 关于 y 均为奇函数, 所以

$$\iint_D x^2 y \, dx \, dy = \iint_D y^3 \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = 0.$$

$$\text{故 } I = \iint_D x \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy.$$

用极坐标代换, D 的极坐标方程为 $r = 2 \cos \theta$, 其中 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, 所以

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} r \cos \theta \cdot r^2 \, dr = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta \, d\theta \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta \, d\theta = 8 \cdot \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{64}{15}. \end{aligned}$$

10. **Solution.** 由积分区域 V 的对称性易知 $\iiint_V y \, dV = 0$, 所以

$$I = 2 \iiint_V z \, dV = 2 \iint_{D_{xy}} dx \, dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z \, dz,$$

其中 D_{xy} 是锥面和半球面的交线在 xOy 平面上的投影区域, 即 $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}$.

用柱坐标代换, 锥面的方程为 $z = r$, 半球面的方程为 $z = \sqrt{1-r^2}$, 所以

$$\begin{aligned} I &= 2 \iint_{D_{xy}} dx \, dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z \, dz \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r \, dr \int_r^{\sqrt{1-r^2}} z \, dz \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r(1-r^2-r^2) \, dr = \pi(r^2-r^4) \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

2 综合题 (每小题 8 分, 共 40 分)

11. **Solution.** $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-5, -5, 5)$, 取 $\mathbf{d} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1)$.

$\nabla u = (y + 3z, x + 2, 3x)$, 所以 $\nabla u|_{M_0} = (1, 3, 3)$.

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{d}} = \nabla u|_{M_0} \cdot \mathbf{d} = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} + \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

12. **Solution.** 设 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{l}$, π 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}$.

$$\text{令 } F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6, \quad G(x, y, z) = x + y + z, \quad H(x, y, z) = xy + z,$$

$$\text{则 } \nabla F|_Q = (2x, 2y, 4z)|_Q = (2, 2, 4), \quad \nabla G|_Q = (1, 1, 1), \quad \nabla H|_{P_0} = (y, x, 1) = (1, 2, 1).$$

$$\nabla F|_Q \times \nabla G|_Q = (6, -6, 0), \text{ 取 } \boldsymbol{l} = (1, -1, 0), \text{ 所以 } l \text{ 的方程为 } \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{0}, \text{ 即 } \begin{cases} x+y=2, \\ z=-2. \end{cases}$$

$$\text{取 } \boldsymbol{n} = \nabla H|_{P_0} = (1, 2, 1), \text{ 所以 } \pi \text{ 的方程为 } x + 2y + z - 2 = 0.$$

设经过 l 的平面束的方程为 $x + y - 2 + \lambda(z + 2) = 0$, 令其与 π 垂直, 得 $1 + 2 + \lambda = 0$, 解得 $\lambda = -3$,

$$\text{所以直线方程为 } \begin{cases} x + y - 3z - 8 = 0, \\ x + 2y + z - 2 = 0. \end{cases}$$

13. **Solution.** 先求曲面在区域 D 上的最低点.

考虑 D 的内部. 令 $z'_x = 2x - y + 1 = z'_y = 2y - x + 1 = 0$, 解得唯一驻点 $(-1, -1)$, $z(-1, -1) = -1$.

考虑 D 的坐标轴边界. 由对称性不妨只考虑在 y 轴上时, 此时

$$x = 0, z = y^2 + y = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \in \left[-\frac{1}{4}, 6\right].$$

考虑 D 的斜边边界, 即直线 $x + y = -3$, 此时

$$z = x^2 + (-3 - x)^2 - x(-3 - x) + x - 3 - x = 3x^2 + 9x + 6 = 3\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \in \left[-\frac{3}{4}, 6\right].$$

综上所述, 曲面在区域 D 上的最低点为 $Q(-1, -1)$, $z(Q) = -1$.

取平面的法向量为 $\boldsymbol{n} = (2, 1, -1) \times (1, 2, -1) = (1, 1, 3)$,

所以平面方程为 $x + 1 + y + 1 + 3(z + 1) = 0$, 即 $x + y + 3z + 5 = 0$.

14. **Solution.**

由于当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, $\left|\frac{\sin(xy^2)}{x^2 + y^2}\right| \leq \left|\frac{xy^2}{x^2 + y^2}\right| \leq |x|$, 且 $|x| \rightarrow 0$,

所以由夹逼定理可知 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy^2)}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0)$, 因此函数 $f(x, y)$ 在原点处连续.

又 $f(x, 0) = f(0, y) \equiv 0$, 所以 $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, 因此函数 $f(x, y)$ 在原点处的偏导数存在.

考察

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy^2)}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

当 $y = x, x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ 时,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy^2)}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y^3}{2y^2 \cdot \sqrt{2}|y|} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{|y|}$$

不存在, 所以函数 $f(x, y)$ 在原点处不可微.

15. **Solution.** 令 $\varphi(t) = f(tx, ty) - f(x, y)$, 则 $\varphi'(t) = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$,

所以 $\varphi(t) \equiv \varphi(1) = f(x, y) - f(x, y) = 0$, $f(x, y) \equiv f(tx, ty)|_{t=0} = f(0, 0)$,

因此 $\forall t \in \mathbf{R}$, $f(tx, ty) = f(x, y)$, 即 $f(x, y)$ 恒为常数 $f(0, 0)$.

CHAPTER 5

2023-2024 学年微积分（一）（下）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 已知 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = \mathbf{b} - 2\mathbf{a}$, 且 $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 4$, 求 $|\mathbf{b} + \mathbf{a}|$.

2. 已知单位向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴正向的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 与 y 轴正向的夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 且在 z 轴上的坐标是负的. $\overrightarrow{OB} = (1, -\sqrt{2}, -1)$, 求 $\angle AOB$ 的角平分线上的单位向量.

3. 求圆锥面 $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$ 与旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 的交线在 $P(1, 1, 2)$ 处的切线与法平面方程.

4. 设 $u = f(x, y, z)$ 具有连续的偏导数, $z = z(x, y)$ 是由方程 $z^5 - xz^4 + yz^3 = 1$ 确定的隐函数, 其中 $5z^2 - 4xz + 3y \neq 0$, 又 $f'_1(0, 0, 1) = 2$, $f'_2(0, 0, 1) = 4$, $f'_3(0, 0, 1) = 1$, 求 $\mathrm{d}u|_{(0,0)}$.

5. 设 $z = yf(x^2 - y^2)$, 其中 f 可导, 求 $\frac{1}{x}z_x + \frac{1}{y}z_y$.

6. 求积分 $I = \int_1^3 \mathrm{d}x \int_{x-1}^2 \sin y^2 \mathrm{d}y$.

7. 设平面区域 $D = \{(x, y) | -2x \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$, 求二重积分 $I = \iint_D (y \cos x + \sqrt{x^2 + y^2}) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$.

8. 设有直线 $L: \begin{cases} x + 5y + z = 0, \\ x - z + 4 = 0 \end{cases}$, 平面 $\pi: x - 4y - 8z + 12 = 0$, 求直线 L 在平面 π 上的投影直线的方程.

9. 将空间曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases}$ 化为参数方程.

10. 计算三重积分 $I = \iiint_{\Omega} e^{1-z} dx dy dz$, 其中 Ω 是三坐标面与平面 $x + y + z = 1$ 所围成的四面体.

2 综合题 (每小题 8 分, 共 40 分)

11. 若函数 $u = az^4 - bxz + x^2 + y^2$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l} = (2, 1, 2)$ 的方向导数最大, 求 a, b 的值, 并求出最大方向导数.

12. 已知函数 $f(x, y) = x^3 + y^3 - (x + y)^2 + 2$, D 是由 $x + y = 3$, $x = 0$, $y = 0$ 所围成的平面区域, 求 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值与最小值.

13. 设 $z(x, y) = x^y + \int_0^x x e^{-(y+t)^2} dt$, 求 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(1,0)}$.

14. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}, & x^4 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^4 + y^2 = 0. \end{cases}$ 讨论函数 $f(x, y)$ 在原点处的连续性、偏导数存在性及可微性.

15. 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[0, b]$ 上连续且单调增加, 其中 $b > 0$, 用二重积分证明:

$$b \int_0^b f(x)g(x) dx \geq \int_0^b f(x) dx \int_0^b g(x) dx$$

CHAPTER 6

2023-2024 学年微积分（一）（下）期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 由题意可得

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a})) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} - 2\mathbf{a}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 2|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 2. \end{aligned}$$

所以 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2$.

$$|\mathbf{b} + \mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{b} + \mathbf{a})^2} = \sqrt{|\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} = \sqrt{16 + 1 + 4} = \sqrt{21}.$$

2. **Solution.** 设 α, β, γ 分别为 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴、 y 轴、 z 轴的夹角,

则由题意可得 $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 因 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, 所以 $\cos \gamma = \pm \frac{1}{2}$,

又 $\overrightarrow{OA}$ 在 z 轴上的坐标是负的, 所以 $\cos \gamma = -\frac{1}{2}$. 从而 $\overrightarrow{OA} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{OB} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \text{ 所以 } \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

即所求的 $\angle AOB$ 的角平分线上的单位向量为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3. **Solution.** 设 $F(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - z^2$, $G(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$.

法一. 因

$$\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \right|_P = \begin{vmatrix} 4y & -2z \\ 2y & -1 \end{vmatrix} \bigg|_P = -4y + 2yz \big|_P = 4 \neq 0,$$

所以方程组 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 可以唯一确定两个具有连续导数的隐函数 $y = y(x), z = z(x)$.

方程组 $\begin{cases} F(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0, \\ G(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0 \end{cases}$ 两边对 x 求导, 得

$$\begin{cases} 4x + 4y \frac{dy}{dx} - 2z \frac{dz}{dx} = 0, \\ 2x + 2y \frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} = 0. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \\ \frac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$, 所以切线的方向向量可取为 $\left(1, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right)_P = (1, -1, 0)$,

切线的方程为 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{0}$,

法平面的方程为 $1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (y-1) + 0 \cdot (z-2) = 0$, 即 $x - y = 0$.

法二. $\nabla F = (4x, 4y, -2z)$, $\nabla G = (2x, 2y, -1)$,

取两个曲面的法向量分别为 $\mathbf{n}_F = \frac{1}{4} \nabla F|_P = (1, 1, -1)$, $\mathbf{n}_G = \nabla G|_P = (2, 2, -1)$,

所以切线的方向向量可取为 $\mathbf{n}_F \times \mathbf{n}_G = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (1, -1, 0)$,

切线的方程为 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{0}$,

法平面的方程为 $1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (y-1) + 0 \cdot (z-2) = 0$, 即 $x - y = 0$.

4. **Solution.** 方程 $z^5 - xz^4 + yz^3 = 1$ 两边全微分, 得

$$5z^4 dz - z^4 dx - 4xz^3 dz + z^3 dy + 3yz^2 dz = 0,$$

将 $x = 0, y = 0, z = 1$ 代入上式, 得 $5dz - dx + dy = 0$. 所以

$$\begin{aligned} du|_{(0,0)} &= f'_1 dx + f'_2 dy + f'_3 dz \\ &= 2dx + 4dy + dz \\ &= 2dx + 4dy + \frac{1}{5}(dx - dy) \\ &= \frac{11}{5}dx + \frac{19}{5}dy. \end{aligned}$$

5. **Solution.** 因为

$$z_x = yf'(x^2 - y^2) \cdot 2x, \quad z_y = f(x^2 - y^2) + yf'(x^2 - y^2) \cdot (-2y),$$

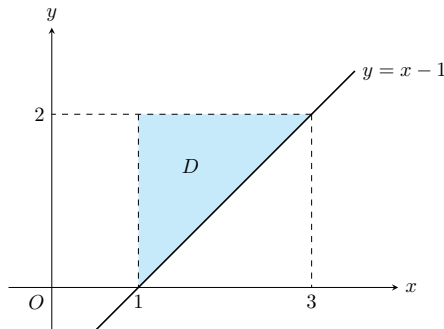
所以

$$\frac{1}{x}z_x + \frac{1}{y}z_y = 2yf'(x^2 - y^2) + \frac{f(x^2 - y^2)}{y} - 2yf'(x^2 - y^2) = \frac{f(x^2 - y^2)}{y}.$$

6. **Solution.**

积分区域 D 如右图所示. 交换积分次序得

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 dx \int_{x-1}^2 \sin y^2 dy = \int_0^2 dy \int_1^{y+1} \sin y^2 dx \\ &= \int_0^2 y \sin y^2 dy = -\frac{1}{2} \cos y^2 \Big|_0^2 \\ &= -\frac{1}{2} \cos 4 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos 4). \end{aligned}$$

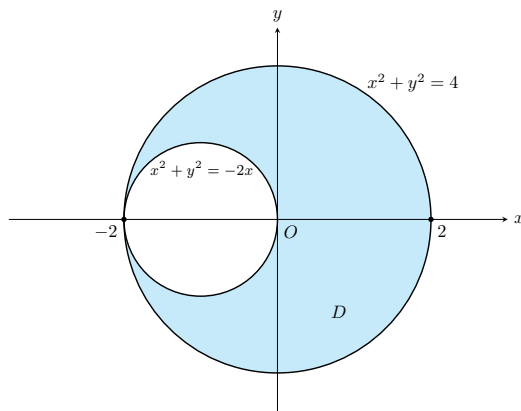


7. **Solution.** 由于积分区域 D 关于 x 轴对称, 所以 $\iint_D y \cos x dx dy = 0$.

记 $D' = \{(x, y) | -2x \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$, 则 $I = 2 \iint_{D'} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$.

用极坐标代换, 则

$$\begin{aligned} I &= 2 \iint_{D'} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\ &= 2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 r^2 dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_{-2\cos\theta}^2 r^2 dr \right) \\ &= \frac{8}{3}\pi + \frac{16}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 + \cos^3 \theta) d\theta \\ &= \frac{16}{3}\pi + \frac{16}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3 \theta d\theta \\ &= \frac{16}{9}(3\pi - 2). \end{aligned}$$



8. **Solution.** 设过直线 $L: \begin{cases} x + 5y + z = 0, \\ x - z + 4 = 0 \end{cases}$ 的平面束方程为 $x + 5y + z + \lambda(x - z + 4) = 0$,

即 $(1 + \lambda)x + 5y + (1 - \lambda)z + 4\lambda = 0$.

令其与平面 $\pi: x - 4y - 8z + 12 = 0$ 垂直, 得

$$(1 + \lambda) \cdot 1 + 5 \cdot (-4) + (1 - \lambda) \cdot (-8) = 0,$$

解得 $\lambda = 3$. 所以直线 L 在平面 π 上的投影直线的方程为

$$\begin{cases} 4x + 5y - 2z + 12 = 0, \\ x - 4y - 8z + 12 = 0. \end{cases}$$

9. **Solution.** 在方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ (x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1 \end{cases}$ 中消去 y , 得 $(x - 1)^2 + (z - 1)^2 = x^2 + z^2$,

即 $x + z = 1$. 将 $z = 1 - x$ 代入 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 得曲线在 xOy 平面上的投影柱面方程: $2x^2 - 2x + y^2 = 0$,

即 $4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2y^2 = 1$. 令 $\begin{cases} x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cos \theta, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta, \end{cases} \quad (0 \leq \theta < 2\pi),$ 则 $z = 1 - x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \theta$,

故曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta, \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \theta. \end{cases} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

10. **Solution.** 用截面法,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} e^{1-z} dx dy dz = \int_0^1 e^{1-z} dz \iint_{D_z} dx dy \quad (D_z = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1 - z\}) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-z)^2 e^{1-z} dz = \frac{1}{2} \int_0^1 z^2 e^z dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 z^2 de^z = \frac{1}{2} \left(z^2 e^z \Big|_0^1 - \int_0^1 2ze^z dz \right) \\ &= \frac{e}{2} - \int_0^1 ze^z dz = \frac{e}{2} - \int_0^1 z de^z \\ &= \frac{e}{2} - \left(ze^z \Big|_0^1 - \int_0^1 e^z dz \right) = \frac{e}{2} - (e - (e - 1)) \\ &= \frac{1}{2}e - 1. \end{aligned}$$

2 综合题 (每小题 8 分, 共 40 分)

11. **Solution.** $\frac{\partial u}{\partial x} = -bz + 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 4az^3 - bx$.

所以 $\nabla u|_P = (-bz + 2x, 2y, 4az^3 - bx)|_{(1,1,1)} = (-b + 2, 2, 4a - b)$.

由于函数沿梯度方向的方向导数最大, 所以 $\nabla u|_P / |\nabla u|_P$, 有

$$\frac{-b+2}{2} = \frac{2}{1} = \frac{4a-b}{2},$$

解得 $a = \frac{1}{2}$, $b = -2$. 此时 $\nabla u|_P = (4, 2, 4)$, 所以最大方向导数为 $|\nabla u|_P| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = 6$.

12. **Solution.** 先考虑 D 的内部. 令 $f'_x = 3x^2 - 2(x+y) = f'_y = 3y^2 - 2(x+y) = 0$,

解得唯一驻点 $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$, 且

$$f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 + \left(\frac{4}{3}\right)^3 - \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right)^2 + 2 = -\frac{10}{27}.$$

考虑 D 的坐标轴边界. 由对称性不妨只考虑在 y 轴上时,

此时 $x = 0$, $f(x, 0) = x^3 - x^2 + 2$, 令 $(x^3 - x^2 + 2)' = 3x^2 - 2x = 0$, 解得 $x = 0$ 或 $\frac{2}{3}$, 且

$$f(0, 0) = 2, \quad f\left(\frac{2}{3}, 0\right) = f\left(0, \frac{2}{3}\right) = \frac{50}{27}.$$

再考虑 D 的斜边边界, 即直线 $x + y = 3$,

此时 $f = x^3 + (3-x)^3 - 7$, 令 $(x^3 + (3-x)^3 - 7)' = 3x^2 - 3(3-x)^2 = 0$, 解得 $x = \frac{3}{2}$, 且

$$f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}, \quad f(3, 0) = f(0, 3) = 20.$$

比较得函数 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值为 20, 最小值为 $-\frac{10}{27}$.

13. **Solution.** 令 $u = y + t$, 则 $du = dt$, $\int_0^x x e^{-(y+t)^2} dt = x \int_y^{y+x} e^{-u^2} du$.

所以

$$\begin{aligned} z(x, y) &= x^y + x \int_y^{y+x} e^{-u^2} du, \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= yx^{y-1} + \int_y^{y+x} e^{-u^2} du + x \cdot e^{-(y+x)^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(yx^{y-1} + \int_y^{y+x} e^{-u^2} du + x \cdot e^{-(y+x)^2} \right) \\ &= x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x + e^{-(y+x)^2} - e^{-y^2} + x \cdot e^{-(y+x)^2} \cdot (-2)(y+x) \\ &= x^{y-1} (1 + y \ln x) + e^{-(y+x)^2} (1 - 2x(y+x)) - e^{-y^2}. \end{aligned}$$

$$\text{从而 } \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(1,0)} = -\frac{1}{e}.$$

14. **Solution.** 利用 $(x^2 - y^2)^2 \geq 0$ 可得 $\left| \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} \right| \leq \frac{|x|}{2}$. 所以当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, $\left| \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} \right| \leq \frac{|x|}{2} \rightarrow 0$,

由夹逼定理可知 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} = 0 = f(0, 0)$, 因此函数 $f(x, y)$ 在原点处连续.

又 $f(x, 0) = f(0, y) \equiv 0$, 所以 $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, 因此函数 $f(x, y)$ 在原点处的偏导数存在.

考察

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{(x^4 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

当 $y = x^2, x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ 时,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^5}{2x^4 \sqrt{x^2 + x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2|x| \cdot \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$$

不存在, 所以函数 $f(x, y)$ 在原点处不可微.

15. **Solution.** 记区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq b\}$, $I = b \int_0^b f(x)g(x) dx - \int_0^b f(x) dx \int_0^b g(x) dx$, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^b dy \int_0^b f(x)g(x) dx - \int_0^b f(x) dx \int_0^b g(y) dy \\ &= \iint_D f(x)g(x) dx dy - \iint_D f(x)g(y) dx dy \\ &= \iint_D f(x)(g(x) - g(y)) dx dy. \end{aligned}$$

注意到区域 D 关于直线 $y = x$ 对称, 具有轮换对称性, 所以

$$\begin{aligned} I &= \iint_D f(x)(g(x) - g(y)) \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{2} \left[\iint_D f(x)(g(x) - g(y)) \, dx \, dy + \iint_D f(y)(g(y) - g(x)) \, dx \, dy \right] \\ &= \frac{1}{2} \iint_D (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

由于函数 $f(x), g(x)$ 在 $[0, b]$ 上单调增加, 所以 $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$, 因此 $I \geq 0$, 即

$$b \int_0^b f(x)g(x) \, dx \geq \int_0^b f(x) \, dx \int_0^b g(x) \, dx.$$

CHAPTER 7

2022-2023 学年微积分（一）（下）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 已知 $y_1 = x + \cos x$, $y_2 = x + \sin x$, $y_3 = x$ 是某个二阶常系数非齐次线性微分方程的三个解, 求该微分方程及其通解.
2. 已知单位向量 $\overrightarrow{OA}$ 与三个坐标轴正向的夹角相等, $\overrightarrow{OA}$ 的方向余弦为正, 点 B 是点 $M(1, -2, 2)$ 关于点 $N(-1, 2, 1)$ 的对称点, 求以 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 为邻边的平行四边形的面积.
3. 求二重极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{y}$, 其中 a 为常数.

4. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 50$ 与锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 所截出的曲线在 $(3, 4, 5)$ 处的切线与法平面方程.

5. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(z + y)^x = x + 2y$ 确定, 求 $\mathrm{d}z|_{(1,2)}$.

6. 设 $u = f(x, y, z)$, $\varphi(x^2, e^y, z) = 0$, $y = \cos x$, 其中 f, φ 具有一阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$, 求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

7. 设 $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} - \frac{4}{\pi} \iint_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$, 其中平面区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f(x, y)$ 为区域 D 上的连续函数, 求 $f(x, y)$.

8. 求积分 $I = \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^x x \sqrt{1-x^2+y^2} dy$.

9. 设函数 $z = f(x^2 - y, \varphi(xy))$, 其中 $f(u, v)$ 具有二阶连续的偏导数, $\varphi(u)$ 二阶可导, 试求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

10. 设平面区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \geq 2y, x^2 + y^2 \geq -2y, x \geq 0\}$, 求二重积分 $I = \iint_D (y^3 + \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$.

2 综合题 (每小题 8 分, 共 40 分)

11. 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, $z = f(e^x \cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y) e^{2x}.$$

若 $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, 求 $f(x)$ 的表达式.

12. 求直线 $L: \begin{cases} x + y + z - 1 = 0, \\ 2x + y + 4z - 2 = 0 \end{cases}$ 在曲面 $xy + z = 0$ 的点 $P_0(2, 1, -2)$ 处切平面上的投影直线的方程.

13. 设曲面 Σ 为曲线 $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 12, \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转曲面, 求函数 $u = z^4 - 3xz + x^2 + y^2$ 沿 Σ 上点 $P(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ 处指向外侧的法向量方向的方向导数.

14. 讨论函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|xy|} \sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在原点 $(0, 0)$ 处的连续性、偏导数存在性及可微性.

15. 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为光滑曲面 $S: \varphi(x, y, z) = 0$ 外的一固定点, $P(x, y, z)$ 为 S 上任意一点. 证明: 若 $|\overrightarrow{P_0P}|$ 最短, 则 $\overrightarrow{P_0P}$ 必是曲面 S 在点 P 处的法向量.

CHAPTER 8

2022-2023 学年微积分（一）（下）期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 由题意可知 $y_1 - y_3 = \cos x$, $y_2 - y_3 = \sin x$ 是方程对应的齐次方程的两个线性无关的解, 它们构成了齐次方程的一个基础解系, 且齐次方程的特征根为 $\pm i$, 所以齐次方程为 $y'' + y = 0$.
设该微分方程的非齐次项为 $f(x)$, 将特解 $y_3 = x$ 代入方程 $y'' + y = f(x)$, 得 $f(x) = x$.
所以该二阶常系数非齐次线性微分方程为 $y'' + y = x$,
其通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

2. **Solution.** 由题意可知 $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, $\overrightarrow{OB} = (-3, 6, 0)$.
所以平行四边形的面积 $S = |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \sqrt{3} \cdot \sqrt{14} = \sqrt{42}$.

3. **Solution.**

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{y} &= \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{xy} \cdot x \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} \cdot a = a.\end{aligned}$$

4. **Solution.** 设 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 50$, $G(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

法一. 因 $\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \right|_{(3, 4, 5)} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 2y & -2z \end{vmatrix}_{(3, 4, 5)} = -8yz|_{(3, 4, 5)} = -160 \neq 0$,

所以方程组 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 可以唯一确定两个具有连续导数的隐函数 $y = y(x)$, $z = z(x)$.

方程组 $\begin{cases} F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 50 = 0, \\ G(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$ 两边对 x 求导, 得

$$\begin{cases} 2x + 2y \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx} = 0, \\ 2x + 2y \frac{dy}{dx} - 2z \frac{dz}{dx} = 0. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \\ \frac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$, 所以切线的方向向量可取为 $4 \left(1, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx} \right)_{(3,4,5)} = (4, -3, 0)$,

切线的方程为 $\frac{x-3}{4} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-5}{0}$,

法平面的方程为 $4 \cdot (x-3) - 3 \cdot (y-4) + 0 \cdot (z-5) = 0$, 即 $4x - 3y = 0$.

法二. $\nabla F = (2x, 2y, 2z)$, $\nabla G = (2x, 2y, -2z)$,

取两个曲面的法向量分别为 $\mathbf{n}_F = \frac{1}{2} \nabla F|_{(3,4,5)} = (3, 4, 5)$, $\mathbf{n}_G = \frac{1}{2} \nabla G|_{(3,4,5)} = (3, 4, -5)$,

所以切线的方向向量可取为 $-\frac{1}{10} \mathbf{n}_F \times \mathbf{n}_G = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix} = (4, -3, 0)$,

切线的方程为 $\frac{x-3}{4} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-5}{0}$,

法平面的方程为 $4 \cdot (x-3) - 3 \cdot (y-4) + 0 \cdot (z-5) = 0$, 即 $4x - 3y = 0$.

5. **Solution.** 将 $x = 1$, $y = 2$ 代入方程 $(z+y)^x = x+2y$ 得 $z = 3$. 原方程两边全微分, 得

$$d e^{x \ln(z+y)} = d(x+2y)$$

$$(z+y)^x d(x \ln(z+y)) = dx + 2dy$$

$$(z+y)^x \left(\ln(z+y) dx + x \cdot \frac{dz+dy}{z+y} \right) = dx + 2dy$$

将 $x = 1, y = 2, z = 3$ 代入上式, 得 $5 \left(\ln 5 dx + \frac{dz+dy}{5} \right) = dx + 2dy$,

整理得 $dz|_{(1,2)} = (1 - 5 \ln 5) dx + dy$.

6. **Solution.** 方程 $\varphi(x^2, e^y, z) = 0$ 两边对 x 求导, 得

$$\varphi'_1 \cdot 2x + \varphi'_2 \cdot e^y \cdot \frac{dy}{dx} + \varphi'_3 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

且 $\frac{dy}{dx} = -\sin x$, 所以 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x\varphi'_1 + \varphi'_2 \cdot e^y \sin x}{\varphi'_3}$.

从而

$$\frac{du}{dx} = f'_1 + f'_2 \cdot \frac{dy}{dx} + f'_3 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 - f'_2 \sin x + f'_3 \cdot \frac{-2x\varphi'_1 + \varphi'_2 \cdot e^y \sin x}{\varphi'_3}.$$

7. **Solution.** 设 $\iint_D f(x, y) dx dy = C$, 方程 $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} - \frac{4}{\pi} C$ 两边在区域 D 上积分, 得

$$\begin{aligned} C &= \iint_D \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \right) dx dy - \frac{4}{\pi} C \iint_D dx dy \\ &= \frac{5}{12} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy - 4C \\ &= \frac{5}{12} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr - 4C \\ &= \frac{5}{12} \cdot \frac{2\pi}{4} - 4C = \frac{5}{24} \pi - 4C. \end{aligned}$$

解得 $C = \frac{1}{24}\pi$, 所以 $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{24}\pi = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} - \frac{1}{6}$.

8. **Solution.** 积分区域如图所示, 其中 $D_1 = \{(x, y) | -1 \leq y \leq 0, y \leq x \leq -y\}$,

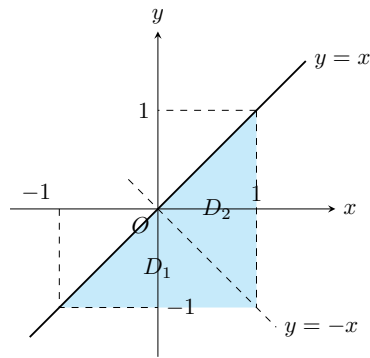
$D_2 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq x\}$. 则 $I = \iint_{D_1+D_2} x\sqrt{1-x^2+y^2} dx dy$.

由于 D_1 关于 y 轴对称, 被积函数 $y = x\sqrt{1-x^2+y^2}$ 关于 x 是奇函数,

所以 $\iint_{D_1} x\sqrt{1-x^2+y^2} dx dy = 0$.

又 D_2 关于 x 轴对称, 被积函数 $y = x\sqrt{1-x^2+y^2}$ 关于 y 是偶函数, 所以

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_2} x\sqrt{1-x^2+y^2} dx dy = 2 \int_0^1 dy \int_y^1 x\sqrt{1-x^2+y^2} dx \\ &= -\int_0^1 \left[\frac{2}{3} (1-x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{x=y}^{x=1} dy \\ &= -\frac{2}{3} \int_0^1 (y^3-1) dy = -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



9. **Solution.** $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot 2x + f'_2 \cdot \varphi'(xy) \cdot y$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (2xf'_1 + yf'_2\varphi'(xy)) \\ &= 2x(-f''_{11} + xf''_{12}\varphi'(xy)) + f'_2\varphi'(xy) + y\varphi'(xy)(-f''_{21} + xf''_{22}\varphi'(xy)) + xyf'_2\varphi''(xy) \\ &= -2xf''_{11} + (2x^2 - y)f''_{12}\varphi'(xy) + f'_2\varphi'(xy) + xy(f''_{22}\varphi'^2(xy) + f'_2\varphi''(xy)). \end{aligned}$$

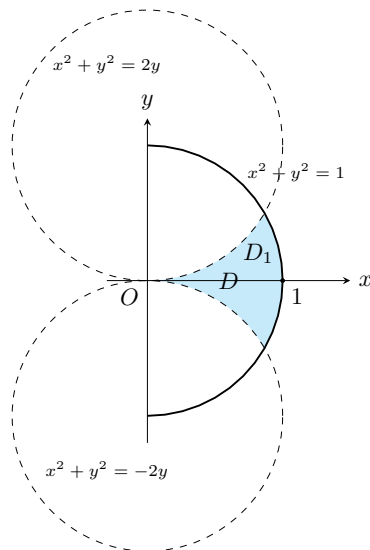
其中由 $f(u, v)$ 二阶偏导数的连续性可得 $f''_{12} = f''_{21}$.

10. **Solution.** 积分区域如图所示, 由对称性可得 $I = \iint_D y^3 dx dy + \iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy = 2 \iint_{D_1} \sqrt{x^2+y^2} dx dy$,

其中 $D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \geq 2y, x \geq 0, y \geq 0\}$.

用极坐标代换, 则

$$\begin{aligned} I &= 2 \iint_{D_1} \sqrt{x^2+y^2} dx dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_{2\sin\theta}^1 r^2 dr \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[\frac{r^3}{3} \right]_{2\sin\theta}^1 d\theta = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - 8\sin^3\theta) d\theta \\ &= \frac{\pi}{9} - \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3\theta d\theta = \frac{\pi}{9} + \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos^2\theta) d\cos\theta \\ &= \frac{\pi}{9} + \frac{16}{3} \left[\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{9} + \frac{16}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} - 1 + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{\pi}{9} + \frac{16}{3} \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{2}{3} \right) = \frac{\pi}{9} - \frac{32}{9} + 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$



2 综合题 (每小题 8 分, 共 40 分)

11. **Solution.** $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(\mathrm{e}^x \cos y) \cdot \mathrm{e}^x \cos y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'(\mathrm{e}^x \cos y) \cdot (-\mathrm{e}^x \sin y),$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(\mathrm{e}^x \cos y) \cdot \mathrm{e}^{2x} \cos^2 y + f'(\mathrm{e}^x \cos y) \cdot \mathrm{e}^x \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(\mathrm{e}^x \cos y) \cdot \mathrm{e}^{2x} \sin^2 y - f'(\mathrm{e}^x \cos y) \cdot \mathrm{e}^x \cos y.$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(\mathrm{e}^x \cos y) \cdot \mathrm{e}^{2x} = (4f'(\mathrm{e}^x \cos y) + \mathrm{e}^x \cos y) \mathrm{e}^{2x},$$

即 $f''(u) = 4f'(u) + u$. 齐次方程 $f'' - 4f' = 0$ 的特征方程为 $r^2 - 4 = 0$, 解得 $r = \pm 2$,

所以齐次方程的通解为 $C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{-2x}$.

对于 $y = x$, $\lambda = 0$ 不是特征方程的根, 故可设特解为 $y^* = cx$, 代入得 $0 = 4cx + x$, 解得 $c = -\frac{1}{4}$,

所以非齐次方程的通解为 $f(x) = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{4}x$.

将 $f(0) = 0, f'(0) = 0$ 代入上式, 得 $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ 2C_1 - 2C_2 - \frac{1}{4} = 0 \end{cases}$, 解得 $C_1 = \frac{1}{16}, C_2 = -\frac{1}{16}$.

因此 $f(x) = \frac{1}{16} \mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{16} \mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{4}x$.

12. **Solution.** 令 $F(x, y, z) = xy + z, \nabla F = (y, x, 1)$,

则曲面 $xy + z = 0$ 在点 $P_0(2, 1, -2)$ 处切平面的法向量可以取为 $\nabla F|_{P_0} = (1, 2, 1)$,

切平面为 $1 \cdot (x - 2) + 2 \cdot (y - 1) + 1 \cdot (z + 2) = 0$, 即 $x + 2y + z = 2$.

设经过直线 L 的平面束方程为 $x + y + z - 1 + \lambda(2x + y + 4z - 2) = 0$,

即 $(2\lambda + 1)x + (\lambda + 1)y + (4\lambda + 1)z - (2\lambda + 1) = 0$,

令其与切平面垂直, 即 $(2\lambda + 1, \lambda + 1, 4\lambda + 1) \cdot (1, 2, 1) = 8\lambda + 4 = 0$, 解得 $\lambda = -\frac{1}{2}$,

所以切平面上的投影直线的方程为 $\begin{cases} x + 2y + z = 2, \\ y - 2z = 0. \end{cases}$

13. **Solution.** 由题意可知曲面 Σ 的方程为 $3(x^2 + z^2) + 2y^2 = 12$,

$$\nabla(3(x^2 + z^2) + 2y^2)|_P = (6x, 4y, 6z)|_P = (0, 4\sqrt{3}, 6\sqrt{2}).$$

所以 Σ 在点 $P(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ 处指向外侧的单位法向量 $\mathbf{n} = \left(0, \frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right)$.

又 $\nabla u = (-3z + 2x, 2y, 4z^3 - 3x)$, 所以 $\nabla u|_P = (-3\sqrt{2}, 2\sqrt{3}, 8\sqrt{2})$,

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u|_P \cdot \mathbf{n} = \frac{\sqrt{10}}{5} \cdot 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{15}}{5} \cdot 8\sqrt{2} = 2\sqrt{30}.$$

14. **Solution.** 因为

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|xy|} \sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|xy|} \cdot (x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sqrt{|xy|} = 0 = f(0, 0),$$

因此函数 $f(x, y)$ 在原点处连续.

又 $f(x, 0) = f(0, y) \equiv 0$, 所以 $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, 因此函数 $f(x, y)$ 在原点处的偏导数存在.

考察

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|xy|} \sin(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

当 $y = x, x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ 时,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sqrt{\frac{|xy|}{x^2 + y^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{x^2}{2x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|xy|} \sin(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}} \neq 0$, 函数 $f(x, y)$ 在原点处不可微.

15. **Solution.** 考虑距离平方函数

$$f(x, y, z) = \left| \overrightarrow{P_0 P} \right|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$

若 P 是 S 上使得 $\left| \overrightarrow{P_0 P} \right|$ 最小的点, 则等价于 $f(x, y, z)$ 在约束条件 $\varphi(x, y, z) = 0$ 下取得最小值.

由于曲面光滑, 根据 Lagrange 乘数法, 存在实数 λ 使得在点 P 处

$$\nabla f = \lambda \nabla \varphi,$$

其中 $\nabla f = 2(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 2\overrightarrow{P_0 P}$, 于是得到 $\overrightarrow{P_0 P} = \frac{\lambda}{2} \nabla \varphi$.

注意到 $\nabla \varphi$ 即为曲面 S 在点 P 处的一个法向量, 上式表明 $\overrightarrow{P_0 P}$ 与 $\nabla \varphi$ 平行,

所以 $\overrightarrow{P_0 P}$ 必然也是曲面 S 在点 P 处的法向量.

CHAPTER 9

2021-2022 学年微积分（一）（下）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 求微分方程 $y'' + 9y = x \cos 3x$ 对应齐次方程的通解, 并写出非齐次特解的待定特解形式.
2. 设二阶线性微分方程 $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$ 有三个特解 $y_1 = x$, $y_2 = x + 2e^x$, $y_3 = x + (2 + 3x)e^x$, 求其通解.
3. 已知两直线 $L_1 : \begin{cases} x - 3y + z = 0, \\ 2x - 4y + z = -1 \end{cases}$ 和 $L_2 : x = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$, 求 L_1 与 L_2 之间的距离 d .

4. 设由方程 $F(x-y, y-z, z-x) = 0$ 可以确定隐函数 $z = z(x, y)$, F 具有连续的偏导数, 且 $F'_2 - F'_3 \neq 0$, 求 dz .

5. 求曲线 $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ 在点 $P(1, 1, \sqrt{2})$ 处的法平面方程.

6. 求椭圆曲线 $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x + y + z = 4 \end{cases}$ 上距离原点最近的点.

7. 计算 $I = \iint_D (x^2 y^2 + x \sin(x^2 + y^2)) \, dx \, dy$, 其中 $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\}$.

8. 设平面区域 D 由直线 $y = x$, 圆弧 $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$ 及 y 轴所围成, 计算 $I = \iint_D xy \, d\sigma$.

9. 求二次积分 $I = \int_0^1 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy$.

10. 求 $I = \iiint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dv$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = 1$ 所围成的区域.

2 综合题 (每小题 8 分, 共 40 分)

11. 设 z 具有二阶连续偏导数, 已知变换 $\begin{cases} u = x - 2\sqrt{y}, \\ v = x + 2\sqrt{y} \end{cases}$ 将方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ 化为以 u, v 为自变量的方程, 求新方程形式.

12. 讨论二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在原点 $(0, 0)$ 处的连续性、偏导数存在性及可微性.

13. 求常数 a, b, c 的值, 使得函数 $f(x, y, z) = axy^2 + byz + cx^3z^2$ 在点 $M(1, 2, -1)$ 处的所有方向导数中, 沿 x 轴正向的方向导数最大, 且该最大值为 64.

14. 求 $I = \iiint_{\Omega} z \, dv$, 其中 Ω 是由平面曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z, \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所得的旋转曲面与平面 $z = 1$, $z = 2$ 所围成的区域.

15. 已知曲面 $x^2 + y^2 + z = 4$ 将球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z$ 分为两部分, 求这两部分的体积比.

CHAPTER 10

2021-2022 学年微积分（一）（下）期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 方程对应的齐次方程为 $y'' + 9y = 0$, 其特征方程为 $r^2 + 9 = 0$, 解得 $r = \pm 3i$,

所以齐次方程的通解为 $C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$.

对于 $y = x \cos 3x$, $\lambda = 3i$ 是特征方程的单根,

所以非齐次特解的待定特解形式为 $y^* = x[(Ax + B) \cos 3x + (Cx + D) \sin 3x]$,

其中 A, B, C, D 为待定常数.

2. **Solution.** 由题意可知 $y_2 - y_1 = 2e^x$, $y_3 - y_2 = 3xe^x$ 是齐次方程 $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ 的两个特解, 将其代入, 得

$$\begin{cases} 2e^x + 2a(x)e^x + 2b(x)e^x = 0, \\ 3(x+2)e^x + 3a(x)(x+1)e^x + 3xb(x)e^x = 0. \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a(x) \equiv -2, \\ b(x) \equiv 1. \end{cases} \quad \text{所以齐次方程为 } y'' - 2y' + y = 0,$$

对应的特征方程为 $r^2 - 2r + 1 = 0$, 解得二重根 $r = 1$, 因此通解为 $(Ax + B)e^x$,

故原方程的通解为 $y = (Ax + B)e^x + x$, 其中 A, B 为任意常数.

3. **Solution.** 取直线 L_1 的方向向量 $\mathbf{s}_1 = (1, -3, 1) \times (2, -4, 1) = (1, 1, 2)$, 直线 L_2 的方向向量 $\mathbf{s}_2 = (1, 3, 4)$.

$$\text{在方程组 } \begin{cases} x - 3y + z = 0, \\ 2x - 4y + z = -1 \end{cases} \quad \text{中令 } y = 0, \text{ 取 } L_1 \text{ 上的点 } P(-1, 0, 1), \text{ 取 } L_2 \text{ 上的点 } Q(0, -1, 2).$$

$$\text{平行六面体 } \overrightarrow{PQ}\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2 \text{ 的体积 } V = \left| \overrightarrow{PQ} \cdot (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2) \right| = \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \right| = 2,$$

$$\text{又 } V = h \cdot |\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2|, \text{ 其中 } h \text{ 为两直线之间的距离, 所以 } h = \frac{V}{|\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2|} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4. **Solution.** 方程 $F(x-y, y-z, z-x) = 0$ 两边全微分, 得

$$F'_1(dx - dy) + F'_2(dy - dz) + F'_3(dz - dx) = 0,$$

$$\text{解得 } dz = \frac{F'_1 - F'_3}{F'_2 - F'_3} dx + \frac{F'_2 - F'_1}{F'_2 - F'_3} dy.$$

5. **Solution.** 设 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$, $G(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 - 1$.

$$\text{法一. 因 } \left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \right|_P = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 2y & 0 \end{vmatrix}_P = -4yz|_{(1, 1, \sqrt{2})} = -4\sqrt{2} \neq 0,$$

所以方程组 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 可以唯一确定两个具有连续导数的隐函数 $y = y(x), z = z(x)$.

$$\text{方程组 } \begin{cases} F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0, \\ G(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{两边对 } x \text{ 求导, 得}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx} = 0, \\ 2(x-1) + 2y \frac{dy}{dx} = 0. \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{y}, \\ \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{z} \end{cases}, \text{ 所以法平面的法向量可取为 } \sqrt{2} \left(1, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx} \right)_P = (\sqrt{2}, 0, -1),$$

法平面的方程为 $\sqrt{2} \cdot (x-1) - 0 \cdot (y-1) + (-1) \cdot (z-\sqrt{2}) = 0$, 即 $\sqrt{2}x - z = 0$.

法二. $\nabla F = (2x, 2y, 2z)$, $\nabla G = (2(x-1), 2y, 0)$,

取两个曲面的法向量分别为 $\mathbf{n}_F = \frac{1}{2} \nabla F|_P = (1, 1, \sqrt{2})$, $\mathbf{n}_G = \frac{1}{2} \nabla G|_P = (0, 1, 0)$,

$$\text{所以法平面的法向量可取为 } \mathbf{n}_F \times \mathbf{n}_G = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-\sqrt{2}, 0, 1),$$

法平面的方程为 $-\sqrt{2} \cdot (x-1) - 0 \cdot (y-1) + 1 \cdot (z-\sqrt{2}) = 0$, 即 $\sqrt{2}x - z = 0$.

6. **Solution.** 设 $P(x, y, z)$ 为椭圆曲线上的任意一点,

即在约束条件 $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x + y + z = 4 \end{cases}$ 下, 求距离平方函数 $x^2 + y^2 + z^2$ 的最小值.

用 Lagrange 乘数法, 设 $L(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(x + y + z - 4)$, 则

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda x + \mu = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 2\lambda y + \mu = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 2z - \lambda + \mu = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - z = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \mu} = x + y + z - 4 = 0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = 2(\lambda + 1)(x - y) = 0, \text{ 若 } \lambda = -1, \text{ 则 } \frac{\partial L}{\partial x} = \mu = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2z - \lambda + \mu = 2z + 1 = 0, \text{ 解得 } z = -\frac{1}{2}, \text{ 方程组 } \begin{cases} -\frac{1}{2} = x^2 + y^2, \\ x + y = \frac{9}{2} \end{cases} \text{ 无解.}$$

$$\text{因此 } x = y, \text{ 故 } \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x^2 - z = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \mu} = 2x + z - 4 = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = y = 1, \\ z = 2. \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = y = -2, \\ z = 8. \end{cases}$$

比较可知距离原点最近的点为 $(1, 1, 2)$.

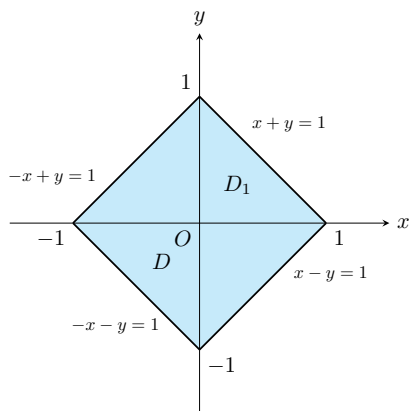
7. Solution.

积分区域如图所示, 其中 $D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$.

由于 D 关于 y 轴对称, 函数 $y = x \sin(x^2 + y^2)$ 关于 x 是奇函数,

所以 $\iint_D x \sin(x^2 + y^2) dx dy = 0$. 再由对称性可得

$$\begin{aligned} I &= \iint_D x^2 y^2 dx dy = 4 \iint_{D_1} x^2 y^2 dx dy \\ &= 4 \int_0^1 x^2 dx \int_0^{1-x} y^2 dy = \frac{4}{3} \int_0^1 x^2 (1-x)^3 dx \\ &= \frac{4}{3} \int_0^1 (1-x)^2 x^3 dx = \frac{4}{3} \int_0^1 (x^5 - 2x^4 + x^3) dx \\ &= \frac{4}{3} \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{45}. \end{aligned}$$

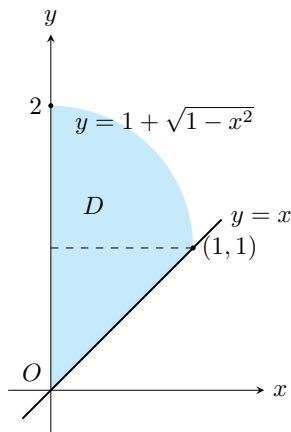


8. Solution.

积分区域如图所示.

用极坐标代换, 圆弧 $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$ 对应的极坐标方程为 $r = 2 \sin \theta$, 所以

$$\begin{aligned} I &= \iint_D xy dx dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \sin \theta} r^3 \cos \theta \sin \theta dr \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2 \sin \theta} r^3 dr = 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin^5 \theta d\theta \\ &= 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta d \sin \theta = \frac{2}{3} \sin^6 \theta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{8} \right) = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$



9. Solution. 交换积分次序,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy = \int_0^1 dy \int_0^y e^{-y^2} dx \\ &= \int_0^1 y e^{-y^2} dy = -\frac{1}{2} \int_0^1 e^{-y^2} d(-y^2) \\ &= -\frac{1}{2} e^{-y^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right). \end{aligned}$$

10. **Solution.** 用球坐标代换, 锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 对应的球坐标方程为 $\varphi = \frac{\pi}{4} (z \geq 0)$, 所以

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi}} \frac{\rho^2 \sin \varphi}{\rho} d\rho \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi}} \rho d\rho = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi \\ &= -\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 \varphi} d(\cos \varphi) = \pi \cdot \frac{1}{\cos \varphi} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi(\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

2 综合题 (每小题 8 分, 共 40 分)

11. **Solution.** $\begin{cases} u = x - 2\sqrt{y}, \\ v = x + 2\sqrt{y} \end{cases}$ 两边全微分, 得 $\begin{cases} du = dx - \frac{1}{\sqrt{y}} dy, \\ dv = dx + \frac{1}{\sqrt{y}} dy \end{cases}$,

所以 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{y}}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}}$.

由链式法则,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ &= \frac{1}{2y\sqrt{y}} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{y}} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{1}{2y\sqrt{y}} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{y}} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2y\sqrt{y}} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \right) + \frac{1}{y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right). \end{aligned}$$

所以 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial y} =$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) - y \left[\frac{1}{2y\sqrt{y}} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \right) + \frac{1}{y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) \right] \\ &- \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \right] \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ &= 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}. \end{aligned}$$

因此 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$.

12. **Solution.** 当 $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ 时, $\frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \leq x^2 \sqrt{|y|}$, 而 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} x^2 \sqrt{|y|} = 0$,

所以由夹逼定理可知 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 = f(0, 0)$, 函数 $f(x, y)$ 在原点处连续.

又 $f(x, 0) = f(0, y) \equiv 0$, 所以 $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, 因此函数 $f(x, y)$ 在原点处的偏导数存在.

考察

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

当 $y = x, x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ 时,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{(2x^2)^2} = \frac{1}{4},$$

所以 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \neq 0$, 因此函数 $f(x, y)$ 在原点处不可微.

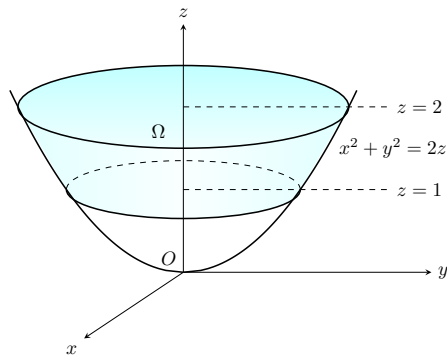
13. **Solution.** $\nabla F|_M = (ay^2 + 3cx^2z^2, 2axy + bz, 2cx^3z + by)|_{(1, 2, -1)} = (4a + 3c, 4a - b, 2b - 2c)$,

由题意可知 $\nabla F|_M // (1, 0, 0)$, 所以 $\begin{cases} 4a - b = 0, \\ 2b - 2c = 0, \\ 4a + 3c = 64 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = 4, \\ b = 16, \\ c = 16. \end{cases}$

14. **Solution.**

由题可知旋转曲面的方程为 $x^2 + y^2 = 2z$, 积分区域 Ω 如图所示.
用截面法,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} z \, dv = \int_1^2 dz \iint_{x^2 + y^2 \leq 2z} z \, dx \, dy \\ &= 2\pi \int_1^2 z^2 \, dz \\ &= \frac{2\pi}{3} (8 - 1) = \frac{14\pi}{3}. \end{aligned}$$



15. **Solution.** 如图所示, 联立 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z = 4, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4z \end{cases}$ 得 $4 - z + z^2 = 4z$,

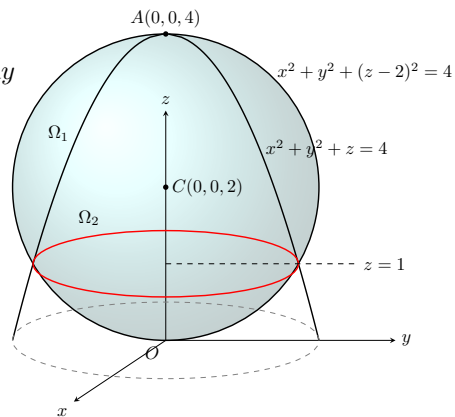
解得 $z = 1$ 或 $z = 4$, 因此抛物面和球面的交线为 $x^2 + y^2 = 3$.

抛物面 $x^2 + y^2 + z = 4$ 将球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z$ 分为 Ω_1 和 Ω_2 两部分.

用截面法,

$$\begin{aligned}
 V_2 &= \iiint_{\Omega_2} dv = \int_0^1 dz \iint_{x^2+y^2 \leq 4z-z^2} dx dy + \int_1^4 dz \iint_{x^2+y^2 \leq 4-z} dx dy \\
 &= \pi \int_0^1 (4z - z^2) dz + \pi \int_1^4 (4 - z) dz \\
 &= \pi \left[\left(2z^2 - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^1 + \left(4z - \frac{z^2}{2} \right) \Big|_1^4 \right] \\
 &= \pi \left[\left(2 - \frac{1}{3} \right) + \left(16 - 8 - 4 + \frac{1}{2} \right) \right] \\
 &= \pi \left(\frac{5}{3} + \frac{9}{2} \right) = \frac{37\pi}{6}.
 \end{aligned}$$

故 $V_1 = \frac{4\pi}{3} \cdot 2^3 - V_2 = \frac{32\pi}{3} - \frac{37\pi}{6} = \frac{27\pi}{6}$, 所以体积比 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{27}{37}$.



CHAPTER 11

2020-2021 学年微积分（一）（下）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 求 $xy' - y = x^2 \cos x$ 的通解.

2. 求微分方程 $y'' - xy'^2 = 0$ 满足初始条件 $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$ 的特解.

3. 计算顶点为 $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$, $C(1, 2, 2)$, $D(0, 1, 2)$ 的四面体 $ABCD$ 的体积.

4. 设函数 f 有二阶连续偏导数, $z = yf(x, x^2y)$, 计算混合偏导 z_{xy} .

5. 设 $w = x^2yz$, $z = x^2 + y^2$, $x + y + z = 4$, 求 $x = 1$, $y = 1$ 时导数 $\frac{dw}{dx}$ 的值.

6. 求 $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ 在 $(1, 1, 1)$ 处沿曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ 的外法线方向的方向导数.

7. 交换二次积分 $I = \int_0^1 dy \int_{1-y}^{1+y^2} f(x, y) dx$ 的积分次序.

8. 计算 $I = \iiint_{\Omega} (x + 2y + 3z) \, dx \, dy \, dz$, 其中 Ω 是由平面 $x + y + z = 1$ 与三个坐标面所围成的空间区域.

9. 计算 $I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = 1$ 所围成的区域.

10. 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $z^2 = 2x$ 所割下部分的面积 S .

2 综合题 (每小题 8 分, 共 40 分)

11. 设 $f(x)$ 为连续函数, 且满足积分方程 $f(x) = e^x - \int_0^x (x-t)f(t) \, dt$, 试求 $f(x)$.

12. 设 S 是曲线 $L: \begin{cases} z = 1 - x^2, \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴的旋转曲面, 求 S 的切平面, 使其与已知平面 $x + y + z = 1$ 平行.

13. 已知曲线 $C: \begin{cases} x^2 + 2y^2 - z = 6, \\ 4x + 2y + z = 30 \end{cases}$, 求 C 上的点到 xOy 坐标面的距离的最大值.

14. 计算 $I = \iint_D (ye^x + \sqrt{x^2 + y^2}) \, dx \, dy$, 其中 D 是由心形线 $r = a(1 + \cos \theta)$ ($a > 0$) 围成的区域.

15. 讨论 $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ 在点 $(0, 0)$ 处的连续性、偏导数存在性与可微性.

CHAPTER 12

2020-2021 学年微积分 (一) (下) 期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 方程变形为 $y' - \frac{1}{x}y = x \cos x$,

由一阶非齐次线性微分方程的通解公式得

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int(-\frac{1}{x})dx} \left(C + \int (x \cos x) e^{\int(-\frac{1}{x})dx} dx \right) \\ &= x \left[C + \int (x \cos x) \cdot \frac{1}{x} dx \right] = x \left(C + \int \cos x dx \right) = x(C + \sin x) \\ &= Cx + x \sin x. \end{aligned}$$

2. **Solution.** 令 $y' = p$, 则方程变形为 $p' - xp^2 = 0$, 分离变量, 得 $\frac{dp}{p^2} = x dx$.

两边积分, 得 $\int \frac{dp}{p^2} = -\frac{1}{p} = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C_1$.

将 $y'(0) = p(0) = -2$ 代入上式, 得 $\frac{1}{2} = C_1$, 所以 $p = -\frac{1}{\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}} = -\frac{2}{x^2 + 1}$.

因此 $\int p dx = y = \int -\frac{2}{x^2 + 1} dx = -2 \arctan x + C_2$.

将 $y(0) = 1$ 代入上式, 得 $C_2 = 1$, 所以特解为 $y = -2 \arctan x + 1$.

3. **Solution.** $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 1)$, $\overrightarrow{AD} = (-1, 0, 1)$, 故

$$V = \frac{1}{6} \left| (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} \right| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}.$$

4. **Solution.**

$$z_x = y(f_1 + f_2 \cdot 2xy) = y(f_1 + 2xyf_2),$$

$$z_{xy} = f_1 + 2xyf_2 + y[x^2f_{12} + 2x(f_2 + yf_{22} \cdot x^2)] = f_1 + 4xyf_2 + x^2yf_{12} + 2x^3y^2f_{22}.$$

5. **Solution.** 设 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$, $G(x, y, z) = x + y + z - 4$.

$$\text{因 } \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \Big|_{((1,1,2))} = \begin{vmatrix} 2y & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Big|_{((1,1,2))} = (2y+1)|_{(1,1,2)} = 3 \neq 0,$$

所以方程组 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 可以唯一确定两个具有连续导数的隐函数 $y = y(x), z = z(x)$.

$$\text{方程组 } \begin{cases} F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0, \\ G(x, y, z) = x + y + z - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{两边对 } x \text{ 求导, 得}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y \frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} = 0, \\ 1 + \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = 0. \end{cases}$$

$$\text{将 } x=1, y=1 \text{ 代入上式, 得 } \begin{cases} 2 \frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} = -2, \\ \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = -1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} \frac{dy}{dx} = -1, \\ \frac{dz}{dx} = 0. \end{cases}$$

所以

$$\frac{dw}{dx} = 2xyz + x^2z \cdot \frac{dy}{dx} + x^2y \cdot \frac{dz}{dx} = 4 + 2 \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = 2.$$

6. **Solution.** 设 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$, 则 $\nabla F = (2x, 2y, 2z)$,

故可以取曲面 $F(x, y, z) = 0$ 在 $(1, 1, 1)$ 处的单位外法线 $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

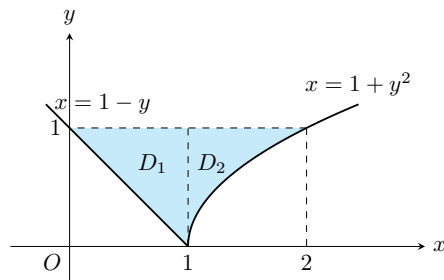
又 $\nabla u|_{(1,1,1)} = (2x, 4y, 6z)|_{(1,1,1)} = (2, 4, 6)$,

所以 u 在 $(1, 1, 1)$ 处沿曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ 的外法线方向的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u \cdot \mathbf{n} = 4\sqrt{3}$.

7. **Solution.**

积分区域如图所示. 所以

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dy \int_{1-y}^{1+y^2} f(x, y) dx \\ &= \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_{1-x}^1 f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{\sqrt{x-1}}^1 f(x, y) dy. \end{aligned}$$



8. **Solution.**

法一. Ω 是由平面 $x + y + z = 1$ 与三个坐标面所围成的四面体, 其体积 $V = \frac{1}{6}$, 形心坐标为 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

故

$$I = \iiint_{\Omega} (x + 2y + 3z) dv = \iiint_{\Omega} x dv + 2 \iiint_{\Omega} y dv + 3 \iiint_{\Omega} z dv = (1 + 2 + 3) \cdot \frac{1}{4} V = \frac{1}{4}.$$

$$\text{法二. 令 } \begin{cases} u = x + y + z, \\ v = \frac{y+z}{x+y+z}, \\ w = \frac{z}{y+z} \end{cases}, \text{ 则 } \begin{cases} x = u(1-v), \\ y = uv(1-w), \\ z = uvw \end{cases}, \quad |J| = \begin{vmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v(1-w) & u(1-w) & -uv \\ vw & uv & uv \end{vmatrix} = u^2v.$$

积分区域 Ω 在 uvw 坐标系中的表示为 $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1$, 所以

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} (x+2y+3z) \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 du \int_0^1 dv \int_0^1 [u(1-v) + 2uv(1-w) + 3uvw] u^2 v \, dw \\ &= \int_0^1 u^3 \, du \int_0^1 v \, dv \int_0^1 (1+v+vw) \, dw = \frac{1}{4} \int_0^1 v \left(1+v+\frac{v}{2}\right) \, dv = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

此代换考虑比例关系, 先确定总量 $u = x + y + z$, 再确定后两项 $y + z$ 占总量的比例 v ,

最后确定 z 占后两项的总和 $y + z$ 的比例 w , 从而把积分限转化为常数.

再考虑一例: 计算 $I = \iint_D x^2 y \, dx \, dy$, 其中 D 是以 $(0,0)$, $(3,0)$, $(0,4)$ 为顶点的三角形及其内部.

Solution. 斜边的方程为 $4x + 3y = 12$, 即 $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = 1$, 令 $\begin{cases} u = \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y, \\ v = \frac{\frac{1}{4}y}{\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y} \end{cases}$,

则 $\begin{cases} x = 3u(1-v), \\ y = 4uv \end{cases}$, $|J| = \begin{vmatrix} 3(1-v) & -3u \\ 4v & 4u \end{vmatrix} = 12u$. 故

$$\begin{aligned} I &= \iint_D x^2 y \, dx \, dy = \int_0^1 du \int_0^1 [3u(1-v)]^2 \cdot 4uv \cdot 12u \, dv \\ &= 432 \int_0^1 u^4 \, du \int_0^1 v(1-v)^2 \, dv = 432 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2!}{4!} = \frac{36}{5}. \end{aligned}$$

9. **Solution.** 用球坐标代换, 锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 对应的球坐标方程为 $\varphi = \frac{\pi}{4} (z \geq 0)$, 所以

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi}} \rho^3 \sin \varphi \, d\rho \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \, d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi}} \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \varphi}{\cos^4 \varphi} \, d\varphi \\ &= -\frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 \varphi} d(\cos \varphi) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3 \cos^3 \varphi} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{6} (2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

10. **Solution.** 联立 $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z^2 = 2x \end{cases}$, 得锥面和柱面的交线满足 $x^2 + y^2 = 2x$, 即 $(x-1)^2 + y^2 = 1$,

在 xOy 平面上的投影为圆域 $D = \{(x,y) | (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$,

锥面上被柱面所割下的部分对应于 D 内的点. 所以

$$\begin{aligned} S &= \iint_S dS = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy \\ &= \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} \, dx \, dy = \sqrt{2} \iint_D dx \, dy \\ &= \sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

2 综合题 (每小题 8 分, 共 40 分)

11. **Solution.** 因为 $f(x)$ 是连续函数, 所以 $\mathbf{e}^x - \int_0^x (x-t)f(t) \mathrm{d}t$ 是可导的, 从而 $f(x)$ 也是可导的.

对方程两边求导, 得 $f'(x) = \mathbf{e}^x - \int_0^x f(t) \mathrm{d}t$. 同理可知 $f'(x)$ 也是可导的,

对方程两边再次求导, 得 $f''(x) = \mathbf{e}^x - f(x)$, 即 $f''(x) + f(x) = \mathbf{e}^x$.

齐次方程 $f''(x) + f(x) = 0$ 的特征方程为 $r^2 + 1 = 0$, 解得 $r = \pm i$,

所以齐次方程的通解为 $C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

对于 $y = \mathbf{e}^x$, $\lambda = 1$ 不是齐次方程的特征根, 所以可设非齐次方程的特解为 $y^* = Ae^x$,

将其代入非齐次方程, 得 $2Ae^x = \mathbf{e}^x$, 所以 $A = \frac{1}{2}$.

因此非齐次方程的通解为 $f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}\mathbf{e}^x$.

在方程 $f(x) = \mathbf{e}^x - \int_0^x (x-t)f(t) \mathrm{d}t$ 中令 $x = 0$, 得 $f(0) = 1$;

在方程 $f'(x) = \mathbf{e}^x - \int_0^x f(t) \mathrm{d}t$ 中令 $x = 0$, 得 $f'(0) = 1$.

将 $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ 代入非齐次方程的通解, 得
$$\begin{cases} C_1 + \frac{1}{2} = 1, \\ C_2 + \frac{1}{2} = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2}, \\ C_2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

因此 $f(x) = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2}\mathbf{e}^x$.

12. **Solution.** 由题可知旋转曲面的方程为 $z = 1 - x^2 - y^2$, 令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 1$,

则 $\nabla F = (2x, 2y, 1)$. 令 $\nabla F // (1, 1, 1)$, 得 $x = y = \frac{1}{2}$,

代入方程可得 $z = \frac{1}{2}$, 所以切平面方程为 $x - \frac{1}{2} + y - \frac{1}{2} + z - \frac{1}{2} = 0$, 即 $2x + 2y + 2z = 3$.

13. **Solution.** 即在约束条件
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - z = 6, \\ 4x + 2y + z = 30 \end{cases}$$
 下, 求 $|z|$ 的最大值.

用 Lagrange 乘数法, 设 $L(x, y, z, \lambda, \mu) = z^2 + \lambda(x^2 + 2y^2 - z - 6) + \mu(4x + 2y + z - 30)$, 则

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2\lambda x + 4\mu = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 4\lambda y + 2\mu = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 2z - \lambda + \mu = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + 2y^2 - z - 6 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \mu} = 4x + 2y + z - 30 = 0. \end{cases}$$

$\frac{\partial L}{\partial x} - 2\frac{\partial L}{\partial y}$, 得 $2\lambda x = 8\lambda y$, 所以 $x = 4y$ 或 $\lambda = 0$.

若 $\lambda = 0$, 则 $\frac{\partial L}{\partial x} = 4\mu = 0$, $\frac{\partial L}{\partial z} = 2z = 0$, 代入约束条件得 $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 6, \\ 4x + 2y = 30 \end{cases}$, 此方程组无解.

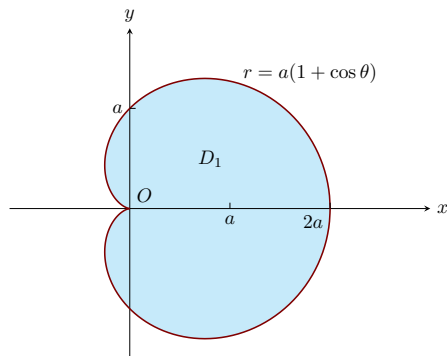
因此 $x = 4y$, 故 $\begin{cases} 16y^2 + 2y^2 - z = 6, \\ 16y + 2y + z = 30 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} y = -2, \\ z = 66. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} y = 1, \\ z = 12. \end{cases}$

比较可知距离 xOy 平面的距离的最大值为 66.

14. Solution.

积分区域如图所示. 由对称性可知 $\iint_D ye^x dx dy = 0$, 所以

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (ye^x + \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy \\ &= 2 \iint_{D_1} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\ &= 2 \int_0^\pi d\theta \int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2 dr = \frac{2a^3}{3} \int_0^\pi (1 + \cos\theta)^3 d\theta \\ &= \frac{2a^3}{3} \int_0^\pi (1 + 3\cos\theta + 3\cos^2\theta + \cos^3\theta) d\theta \\ &= \frac{2a^3}{3} \int_0^\pi (1 + 3\cos^2\theta) d\theta = \frac{2\pi a^3}{3} + 4a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = \frac{5\pi a^3}{3}. \end{aligned}$$



15. **Solution.** $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \sqrt{2}\varepsilon$, 则当 $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ 时, 有

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \sqrt{|xy|} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} < \frac{\delta}{\sqrt{2}} = \varepsilon$$

所以 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sqrt{|xy|} = 0 = f(0, 0)$, 函数 $f(x, y)$ 在原点处连续.

又 $f(x, 0) = f(0, y) \equiv 0$, 所以 $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, 因此函数 $f(x, y)$ 在原点处的偏导数存在.

考察

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sqrt{\frac{|xy|}{x^2 + y^2}}.$$

当 $y = x, x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ 时,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sqrt{\frac{|xy|}{x^2 + y^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{|x^2|}{2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sqrt{\frac{|xy|}{x^2 + y^2}} \neq 0$, 函数 $f(x, y)$ 在原点处不可微.

CHAPTER 13

2018-2019 学年微积分（一）（下）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 求微分方程 $yy'' + (y')^2 = 0$ 满足初始条件 $y(0) = 1$, $y'(0) = \frac{1}{2}$ 的特解.

2. 设 $y = e^x (C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)$ 为某二阶常系数齐次微分方程的通解, 求此微分方程.

3. 已知点 $A = (3, -3, 1)$ 与点 $B(3, -2, 2)$ 满足 $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$, 求向量 $\overrightarrow{OM}$ 的方向余弦.

4. 判断直线 $L_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3}$ 与直线 $L_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-6}{5}$ 是否共面.

5. 讨论二重极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x+y}$ 的存在性. 若极限存在求其值, 若不存在说明理由.

6. 已知平面曲线由方程 $x^2 + y^3 + \ln(x+y) - 3 = 0$ 确定, 求点 $x=2, y=-1$ 处的法线方程.

7. 设 $\varphi(u, v)$ 有连续偏导数, 方程 $\varphi(cx - az, cy - bz) = 0$ 确定隐函数 $z = z(x, y)$. 证明: $az_x + bz_y = c$.

8. 计算 $I = \int_0^2 dy \int_0^2 \max\{xy, 1\} dx$.

9. 计算 $I = \iint_D \cos(x^2 + y^2) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, |x| \geq |y|\}$.

10. 计算 $I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, 其中区域 V 由曲面 $z = 0, z = 4 - x^2 - y^2$ 围成.

2 综合题 (每小题 8 分, 共 40 分)

11. 求解微分方程 $y'' - 3y' + 2y = e^{2x} + e^{3x}$.

12. 求函数 $u = 2x + y^2z$ 在点 $(1, -1, -1)$ 处沿椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ 的外法线方向的方向导数.

13. 求函数 $u = x + 3z$ 在曲线 $\begin{cases} x + 2y - 3z = 2, \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ 上的最大值与最小值.

14. 求积分 $I = \iiint_V x^2 \, dx \, dy \, dz$, 其中区域 $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$.

15. 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

(1) 证明 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微;

(2) 求 $f_{xy}(0, 0)$.

CHAPTER 14

2018-2019 学年微积分（一）（下）期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 令 $y' = p$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$,

所以方程变形为 $yp \cdot \frac{dp}{dy} + p^2 = 0$.

显然 $p \neq 0$, 故 $y \frac{dp}{dy} + p = 0$, 即 $y dp + p dy = d(yp) = 0$.

两边积分, 得 $yp = C_1$, 将 $y(0) = 1$, $y'(0) = p(0) = \frac{1}{2}$ 代入上式, 得 $C_1 = \frac{1}{2}$, 所以 $y \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$,

即 $y dy = \frac{1}{2} dx$, 两边积分, 得 $\frac{y^2}{2} = \frac{x}{2} + C_2$.

将 $y(0) = 1$ 代入上式, 得 $C_2 = \frac{1}{2}$, 所以特解为 $y = \sqrt{x+1}$.

2. **Solution.** 由通解的形式可知特征方程的两个解为 $1 \pm 2i$, 所以特征方程为 $r^2 - 2r + 5 = 0$,

因此二阶常系数齐次微分方程为 $y'' - 2y' + 5y = 0$.

3. **Solution.** 设 $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$, 则 $\overrightarrow{AM} = (x-3, y+3, z-1)$, $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 1)$.

$$\text{因 } \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}, \text{ 所以 } \begin{cases} x-3=0, \\ y+3=3, \\ z-1=3 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x=3, \\ y=0, \\ z=4. \end{cases}$$

故 $\overrightarrow{OM} = (3, 0, 4)$, 其方向余弦为 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \beta = 0$, $\cos \gamma = \frac{4}{5}$.

4. **Solution.** 取 L_1 的方向向量 $\mathbf{s}_1 = (2, -1, 3)$, L_2 的方向向量 $\mathbf{s}_2 = (1, 2, 5)$,

在 L_1 上取点 $A(-1, 2, 4)$, 在 L_2 上取点 $B(1, -3, 6)$, 则 $\overrightarrow{AB} = (2, -5, 2)$. 计算

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2) = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 23 \neq 0, \text{ 所以 } L_1 \text{ 与 } L_2 \text{ 不共面.}$$

5. **Solution.** 因为

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{xy^2}{x+y} = 0,$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x^3-x}} \frac{xy^2}{x+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^3-x)^2}{x+(x^3-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^7-2x^5+x^3}{x^3} = 1,$$

因此 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2}{x+y}$ 不存在.

二重极限存在性问题, 分母为 $x+y$, 常设 $y = x^\alpha - x$ 来寻找不为 0 的极限值.

再考虑一例: 证明极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3y + xy^4 + x^2y}{x+y}$ 不存在.

Solution. 当 $y = 0$ 时, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3y + xy^4 + x^2y}{x+y} = 0$;

令 $y = x^\alpha - x$,

$$\frac{x^3y + xy^4 + x^2y}{x+y} = \frac{x^{\alpha+3} - x^4 + x^{\alpha+2} - x^3 + x(x^\alpha - x)^4}{x^\alpha} = \frac{-x^3 + o(x^3)}{x^\alpha},$$

令 $\alpha = 3$, 则 $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x^3-x}} \frac{x^3y + xy^4 + x^2y}{x+y} = -1$, 因此 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3y + xy^4 + x^2y}{x+y}$ 不存在.

6. **Solution.** 设 $F(x, y) = x^2 + y^3 + \ln(x+y) - 3$,

曲线在点 $(2, -1)$ 处的切线斜率 $k = -\frac{F_x(2, -1)}{F_y(2, -1)} = -\frac{2x + \frac{1}{x+y}}{3y^2 + \frac{1}{x+y}} \bigg|_{(2, -1)} = -\frac{5}{4}$, 所以法线斜率为 $\frac{4}{5}$,

因此法线方程为 $y + 1 = \frac{4}{5}(x - 2)$, 即 $4x - 5y - 13 = 0$.

7. **Solution.** 方程 $\varphi(cx - az, cy - bz) = 0$ 两边对 x 求偏导, 得

$$\varphi_u(c - az_x) + \varphi_v(-bz_x) = 0.$$

所以 $z_x = \frac{c\varphi_u}{a\varphi_u + b\varphi_v}$.

方程 $\varphi(cx - az, cy - bz) = 0$ 两边对 y 求偏导, 得

$$\varphi_u(-az_y) + \varphi_v(c - bz_y) = 0.$$

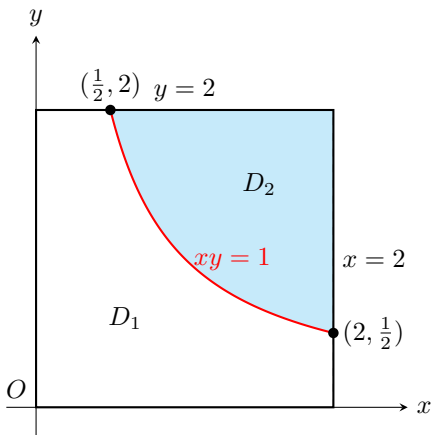
所以 $z_y = \frac{c\varphi_v}{a\varphi_u + b\varphi_v}$.

故 $az_x + bz_y = \frac{c(a\varphi_u + b\varphi_v)}{a\varphi_u + b\varphi_v} = c$.

8. **Solution.**

积分区域如图所示. 所以

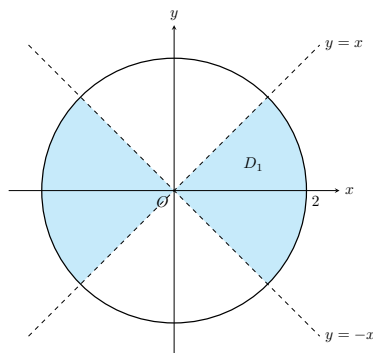
$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{D_1} dx dy + \iint_{D_2} xy dx dy \\
 &= 1 + \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x} dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 xy dy \\
 &= 1 + \ln x \Big|_{\frac{1}{2}}^2 + \int_{\frac{1}{2}}^2 x \left(2 - \frac{1}{2x^2} \right) dx \\
 &= 1 + 2 \ln 2 + \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(2x - \frac{1}{2x} \right) dx = 1 + 2 \ln 2 + \left(x^2 - \frac{1}{2} \ln x \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 \\
 &= 1 + 2 \ln 2 + 4 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{19}{4} + \ln 2.
 \end{aligned}$$



9. Solution.

积分区域如图所示. 所以

$$\begin{aligned}
 I &= 4 \iint_{D_1} \cos(x^2 + y^2) dx dy \\
 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^2 r \cos r^2 dr \\
 &= \pi \cdot \frac{1}{2} \sin r^2 \Big|_0^2 = \frac{\pi}{2} \sin 4.
 \end{aligned}$$



10. **Solution.** 用柱坐标代换, 抛物面 $z = 4 - x^2 - y^2$ 可表示为 $z = 4 - r^2$, 所以

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D dx dy \int_0^{4-r^2} r dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r dr \int_0^{4-r^2} r dz \\
 &= 2\pi \int_0^2 r^2(4-r^2) dr = 2\pi \left(\frac{4}{3}r^3 - \frac{1}{5}r^5 \right) \Big|_0^2 = \frac{128\pi}{15}.
 \end{aligned}$$

2 综合题 (每小题 8 分, 共 40 分)

11. **Solution.** 齐次方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, 解得 $\lambda = 1, 2$,

所以齐次方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

分别求解非齐次项 e^{2x} 和 e^{3x} 对应的特解,

对于 $y_1 = e^{2x}$, $\lambda = 2$ 是齐次方程的特征根, 所以可设特解为 $y_1^* = A x e^{2x}$,

将其代入 $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$, 得 $4A e^{2x}(1+x) - 3A e^{2x}(1+2x) + 2A x e^{2x} = e^{2x}$,

解得 $A = 1$, 所以 $y_1^* = x e^{2x}$.

对于 $y_2 = e^{3x}$, $\lambda = 3$ 不是齐次方程的特征根, 所以可设特解为 $y_2^* = B e^{3x}$,

将其代入 $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$, 得 $9B e^{3x} - 9B e^{3x} + 2B e^{3x} = e^{3x}$,

解得 $B = \frac{1}{2}$, 所以 $y_2^* = \frac{1}{2} e^{3x}$.

因此非齐次方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x e^{2x} + \frac{1}{2} e^{3x}$.

12. **Solution.** 设 $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6$, 则 $\nabla F(1, -1, -1) = (2, -4, -6)$,

所以椭球面外法线方向的单位向量为 $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, -2, -3)$.

因此函数 $u = 2x + y^2z$ 在点 $(1, -1, -1)$ 处沿椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ 的外法线方向的方向导数

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u(1, -1, -1) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2, 2, 1) \cdot (1, -2, -3) = -\frac{5\sqrt{14}}{14}.$$

13. **Solution.** 即在约束条件 $\begin{cases} x + 2y - 3z = 2, \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ 下, 求 $x + 3z$ 的最大值.

用 Lagrange 乘数法, 设 $L(x, y, z, \lambda, \mu) = x + 3z + \lambda(x + 2y - 3z - 2) + \mu(x^2 + y^2 - 2)$, 则

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 1 + \lambda + 2\mu x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2\lambda + 2\mu y = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 3 - 3\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + 2y - 3z - 2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \mu} = x^2 + y^2 - 2 = 0. \end{cases}$$

$\frac{\partial L}{\partial z} = 3 - 3\lambda = 0$, 故 $\lambda = 1$, 将其代入 $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} = 0$, 得 $\mu x + 1 = \mu y + 1 = 0$.

所以 $x = y$, 代入 $\frac{\partial L}{\partial \mu} = x^2 + y^2 - 2 = 0$, 得 $x = y = 1$ 或 $x = y = -1$.

当 $x = y = 1$ 时, $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + 2y - 3z - 2 = 0$, 解得 $z = \frac{1}{3}$, 此时 $x + 3z = 2$;

当 $x = y = -1$ 时, $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + 2y - 3z - 2 = 0$, 解得 $z = -\frac{5}{3}$, 此时 $x + 3z = -6$.

因此函数 $u = x + 3z$ 在曲线 $\begin{cases} x + 2y - 3z = 2, \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ 上的最大值为 2, 最小值为 -6.

14. **Solution.** 用球坐标代换, 球面 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$ 可表示为 $r \leq 2\cos\varphi$, 所以

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V x^2 dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2 \cdot r^2 \sin^2\varphi \cos^2\theta dr \\ &= \frac{32}{5} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi \cos^5\varphi d\varphi \\ &= \frac{32}{5} \cdot \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\varphi - 1) \cos^5\varphi d\cos\varphi \\ &= \frac{32\pi}{5} \left(\frac{1}{8} \cos^8\varphi - \frac{1}{6} \cos^6\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi}{15}. \end{aligned}$$

15. **Solution.**

(1) 显然 $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$,

所以即判断极限

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

是否为 0. 因为

$$0 \leq \left| \frac{xy^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right| = \frac{|x| \cdot |y|^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{|x| \cdot (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = |x|,$$

且当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, $|x| \rightarrow 0$, 由夹逼定理可知 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$,

因此 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微. 所以 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$, $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.

$$(2) \text{ 因为 } f_x(0, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y^3}{x^2 + y^2} = y,$$

所以

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_x(0, y) - f_x(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{y} = 1.$$

CHAPTER 15

2017-2018 学年微积分（一）（下）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 设直线 l 过点 $M_0(1, 2, 0)$, 且平行于平面 $\pi: x - 2y + z - 4 = 0$, 又与直线 $l_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$ 相交, 求此直线的方程.

2. 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$ 在点 $(1, 1, 2)$ 处的切向量、法平面方程.

3. 求空间曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases} \quad (a > 0)$ 分别在 xOy 面和 zOx 面上的投影曲线的方程.

4. 已知 $z(x, y) = \int_0^1 e^{t^2} |x + y^2 - t| dt$, 其中 $0 < x + y^2 < 1$, 求 z_{xy} .

5. 设二元函数 $z = f(x, y)$ 满足方程 $F(x + z, xy) = 0$, 且 $f(x, y)$, $F(s, t)$ 均具有连续的一阶偏导数, $f_2 F_1 + y f_2 F_2 - x f_1 F_2 \neq 0$, 求 $\frac{dx}{dz}$.

6. 求 $I = \int_0^1 dy \int_y^1 x^2 \cos(xy) dx$.

7. 求 $I = \iint_D (2x + 3y - 1)^2 dx dy$, 其中 $D : |x| + |y| \leq 1$.

8. 设 $f(x, y)$ 连续, $f(x, y) = xy + \iint_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$, D 是由 $y = 0, y = x^2$ 和 $x = 1$ 所围成的区域, 求 $f(x, y)$.

9. 求 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \mathrm{d}v$, 其中 Ω 是由平面曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z, \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所得的旋转曲面与平面 $z = 8$ 所围成的区域.

10. 求 $I = \iiint_{\Omega} z^2 \mathrm{d}v$, 其中 $\Omega: 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, a > 0$.

2 综合题 (每小题 8 分, 共 40 分)

11. 设函数 $u = f(x \sin y)$, 其中 $f(t)$ 具有连续的二阶导数, 且 $f'(0) = 5$, 向量 $\boldsymbol{n} = (3, 4)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}, \frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{n} \partial x} \Big|_{(0,0)}$.

12. 在平面曲线 $x^2 + 2y^2 - 2x = 88$ 上求一点, 使函数 $f(x, y) = 3x^2 + y^2$ 在该点处沿方向 $\boldsymbol{n} = (3, 4)$ 的方向导数最大.

13. 求由抛物线 $y^2 = ax$ 与圆 $x^2 + y^2 = 2ax (a > 0)$ 所围的包含一段 x 轴的区域 D 的面积 S .

14. 求 $I = \iint_D |x^2 + y^2 - 1| \, dx \, dy$, 其中 D 是矩形区域: $|x| \leq 2, |y| \leq 2$.

15. 设二元函数 $f(x, y)$ 在原点 $(0, 0)$ 处存在二阶偏导数 $f_{xx}(0, 0)$ 和 $f_{yy}(0, 0)$. 判断下列的结论是否正确, 如果正确, 请给出理由; 如果不正确, 请给出反例:

- (1) $f_x(x, 0)$ 在原点 $(0, 0)$ 处关于 x 连续;
- (2) 二元函数 $f(x, y)$ 在原点 $(0, 0)$ 处连续.

CHAPTER 16

2017-2018 学年微积分（一）（下）期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 设 l 与 l_1 的交点为 Q , 并设 $Q(2+t, 1+2t, 2+t)$.

因此直线 l 的方向向量可取

$$\mathbf{s} = \overrightarrow{M_0Q} = (t+1, 2t-1, t+2).$$

又 l 平行于平面 π , 所以 $\mathbf{s}$ 与 π 的法向量 $\mathbf{n} = (1, -2, 1)$ 垂直, 即

$$(t+1) - 2(2t-1) + (t+2) = 0.$$

解得 $t = \frac{5}{2}$, 故 $\mathbf{s} = \left(\frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}\right)$. 所以所求直线方程为

$$\frac{x-1}{\frac{7}{2}} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{\frac{9}{2}}.$$

2. **Solution.** 令

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6, \quad G(x, y, z) = x^2 + y^2 - z.$$

则

$$\nabla F(1, 1, 2) = 2(1, 1, 2), \quad \nabla G(1, 1, 2) = (2, 2, -1).$$

曲线在点 $(1, 1, 2)$ 处的切向量

$$\boldsymbol{\tau} = (1, 1, 2) \times (2, 2, -1) = -5(1, -1, 0).$$

因此切向量可取 $(1, -1, 0)$, 法平面方程为

$$x - y = 0.$$

3. **Solution.** 该空间曲线在 xOy 面上的投影曲线为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = ax, \\ z = 0. \end{cases}$$

因为 $x^2 + y^2 = ax$, 由 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 得 $z^2 = a^2 - ax$, 所以该空间曲线在 zOx 面上的投影曲线为

$$\begin{cases} z^2 = a^2 - ax, \\ y = 0, \end{cases} \quad (-a \leq z \leq a).$$

4. **Solution.** 记 $s = x + y^2$, 由 $0 < s < 1$ 可得

$$z = \int_0^s e^{t^2}(s-t) dt + \int_s^1 e^{t^2}(t-s) dt.$$

因此

$$z_x = \int_0^s e^{t^2} dt - \int_s^1 e^{t^2} dt.$$

对 y 求偏导, 得

$$z_{xy} = 2e^{s^2} \frac{\partial s}{\partial y} = 4ye^{(x+y^2)^2}.$$

5. **Solution.** 由题设知方程组

$$\begin{cases} z = f(x, y), \\ F(x+z, xy) = 0 \end{cases}$$

确定隐函数 $x = x(z)$, $y = y(z)$.

方程组两边对 z 求导, 得

$$\begin{cases} 1 = f_1 \frac{dx}{dz} + f_2 \frac{dy}{dz}, \\ F_1 \left(1 + \frac{dx}{dz}\right) + F_2 \left(y \frac{dx}{dz} + x \frac{dy}{dz}\right) = 0. \end{cases}$$

解得

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{x F_2 + f_2 F_1}{f_2 F_1 + y f_2 F_2 - x f_1 F_2}.$$

6. **Solution.** 交换积分次序, 得

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x x^2 \cos(xy) dy.$$

所以

$$I = \int_0^1 x \sin x^2 dx = -\frac{1}{2} \cos x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1 - \cos 1).$$

7. **Solution.**

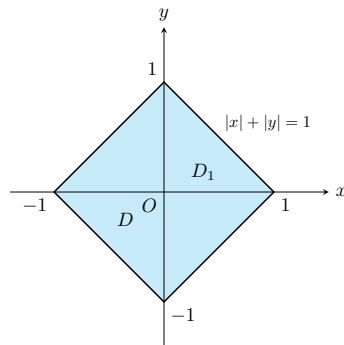
利用奇偶对称性及轮换对称性, 得

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (4x^2 + 9y^2 + 1) dx dy \\ &= 13 \iint_D x^2 dx dy + \iint_D dx dy. \end{aligned}$$

记 D_1 为 D 在第一象限的部分, 则 $D_1: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x$,

且 $\iint_D dx dy = 2$. 因此

$$I = 52 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 dy + 2 = 52 \int_0^1 x^2(1-x) dx + 2 = \frac{19}{3}.$$



8. **Solution.**

设

$$A = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy,$$

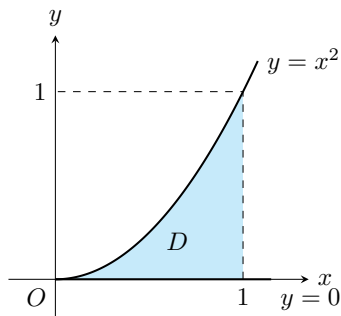
则 $f(x, y) = xy + A$.

于是

$$\begin{aligned} A &= \iint_D xy \, dx \, dy + \iint_D A \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} xy \, dy + A \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \\ &= \frac{1}{12} + \frac{A}{3}. \end{aligned}$$

解得 $A = \frac{1}{8}$, 故

$$f(x, y) = xy + \frac{1}{8}.$$

9. **Solution.** 旋转曲面方程为

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

记 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $D: x^2 + y^2 \leq 16$. 用柱坐标代换, 得

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dv \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 r \, dr \int_{\frac{1}{2}r^2}^8 r^2 \, dz \\ &= 2\pi \int_0^4 r^3 \left(8 - \frac{r^2}{2}\right) \, dr = \frac{1024\pi}{3}. \end{aligned}$$

10. **Solution.** 由题设可知 Ω 为上半球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0$. 先对 z 积分, 得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a z^2 \, dz \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2 - z^2} dx \, dy \\ &= \pi \int_0^a z^2 (a^2 - z^2) \, dz = \frac{2\pi a^5}{15}. \end{aligned}$$

2 综合题 (每小题 8 分, 共 40 分)

11. **Solution.** 因为 $\mathbf{n} = (3, 4)$, 所以其单位方向向量为 $\mathbf{n}^\circ = \frac{1}{5}(3, 4)$.

又

$$u_x = f'(x \sin y) \sin y, \quad u_y = f'(x \sin y) x \cos y,$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{f'(x \sin y)}{5} (3 \sin y + 4x \cos y).$$

利用偏导数定义, 得

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{n} \partial x} \right|_{(0,0)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, 0) - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{5} f'(0)x}{x} = 4.$$

12. **Solution.** 设所求点为 $M(x, y)$, 则 $\nabla f(x, y) = (6x, 2y)$, 且 $\boldsymbol{n}^\circ = \frac{1}{5}(3, 4)$.

函数 $f(x, y)$ 在点 $M(x, y)$ 沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}(x, y) = \frac{1}{5}(18x + 8y) = \frac{2}{5}(9x + 4y).$$

因此在约束 $x^2 + 2y^2 - 2x = 88$ 下求 $9x + 4y$ 的最大值. 构造 Lagrange 函数

$$L(x, y, \lambda) = 9x + 4y + \lambda(x^2 + 2y^2 - 2x - 88).$$

令

$$\begin{cases} L_x = 9 + 2\lambda x - 2\lambda = 0, \\ L_y = 4 + 4\lambda y = 0, \\ L_\lambda = x^2 + 2y^2 - 2x - 88 = 0. \end{cases}$$

由前两个方程可得 $2(x - 1) = 9y$, 代入约束方程得两个受检点

$$M_1(10, 2), \quad M_2(-8, -2).$$

比较方向导数的值, 得 $M_1(10, 2)$ 为所求点.

13. **Solution.**

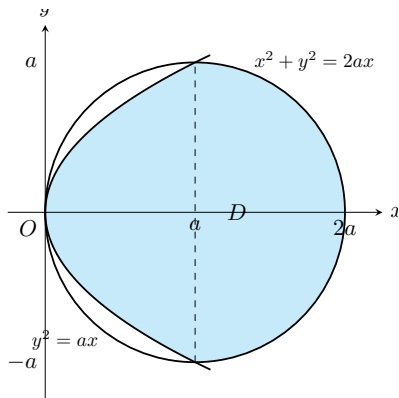
区域 D 由抛物线 $y^2 = ax$ 和圆 $x^2 + y^2 = 2ax$ 围成, 联立

$$\begin{cases} y^2 = ax, \\ y^2 = 2ax - x^2 \end{cases}$$

得交点 $(0, 0), (a, a), (a, -a)$.

所求面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\pi a^2 + 2 \int_0^a dy \int_{\frac{y^2}{a}}^a dx \\ &= \frac{1}{2}\pi a^2 + 2 \int_0^a \left(a - \frac{y^2}{a}\right) dy = \frac{1}{2}\pi a^2 + \frac{4}{3}a^2. \end{aligned}$$



14. **Solution.**

记 $D_1: x^2 + y^2 \leq 1$, $D_2 = D \setminus D_1$, 并设 $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

则

$$\begin{aligned} I &= - \iint_{D_1} g(x, y) \, dx \, dy + \iint_{D_2} g(x, y) \, dx \, dy \\ &= \iint_D g(x, y) \, dx \, dy - 2 \iint_{D_1} g(x, y) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

而

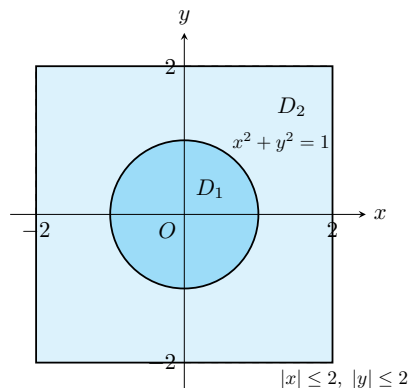
$$\iint_D g(x, y) \, dx \, dy = \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 (x^2 + y^2 - 1) \, dy \, dx = \frac{80}{3},$$

且

$$\iint_{D_1} g(x, y) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r^2 - 1)r \, dr = -\frac{\pi}{2}.$$

所以

$$I = \frac{80}{3} + \pi.$$



15. Solution.

(1) 正确. 因为根据偏导数定义,

$$f_{xx}(0, 0) = \left. \frac{df_x(x, 0)}{dx} \right|_{x=0},$$

而一元函数可导必连续, 所以 $f_x(x, 0)$ 在 $x = 0$ 处连续.

(2) 不正确. 例如

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & xy = 0, \\ 1, & xy \neq 0. \end{cases}$$

该函数在原点 $(0, 0)$ 处不连续. 但是因为 $f(x, 0) = 0$, 所以 $f_x(x, 0) = 0$, 进而 $f_{xx}(0, 0) = 0$;

类似可得 $f_{yy}(0, 0) = 0$. 因此即使 $f_{xx}(0, 0)$ 和 $f_{yy}(0, 0)$ 存在, $f(x, y)$ 也未必在原点连续.

CHAPTER 17

2016-2017 学年微积分（一）（下）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 已知微分方程 $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$, $f(x) \neq 0$ 有三个解 $y_1 = x, y_2 = e^x, y_3 = e^{3x}$, 求此微分方程满足初始条件 $y(0) = 2, y'(0) = 3$ 的特解.

2. 设 $y = y(x)$ 在区间 $|x| < \frac{\pi}{2}$ 满足微分方程 $y'' - (y')^2 = 1$, $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 0$, 求特解.

3. 求过点 $M(2, -2, 3)$ 与直线 $L_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{0}$ 垂直相交的直线 L 的方程.

4. 设曲线 $\begin{cases} x + y - z = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$, 求其在点 $(1, 1, 1)$ 处的切线方程和法平面方程.

5. 设 $z = f(xe^y)$, 其中 f 有一阶导数, $f'(0) = 2$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, 1)$.

6. 设函数 $f(u, v, w)$ 有二阶连续偏导数, $z = f(x, x + y, xy)$, 求混合偏导函数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

7. 计算 $I = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt[3]{y}} e^{x^2} dx$.

8. 计算二重积分

$$I = \iint_D (x^3 \sin y + (x+y)^2) \, dx \, dy,$$

其中 $D: x^2 + y^2 \leq 2y$.

9. 计算三重积分 $I = \iiint_V xy^2 z^3 \, dx \, dy \, dz$, 其中 V 位于第一卦限, 由曲面 $z=0, z=xy, y=x, y=1$ 围成.

10. 计算三重积分 $I = \iiint_V (x+z) \, dv$, 其中 $V: \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{2-x^2-y^2}$.

2 综合计算题 (每小题 8 分, 共 40 分)

11. 设方程组 $\begin{cases} F(x+y, y-z) = 0, \\ z = f(xy) \end{cases}$, 其中 F, f 具有连续的一阶偏导, 且 $F_1 - yf'F_2 \neq 0$, 求 $\frac{dz}{dy}$.

12. 在椭球面 $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1$ 上求一点, 使函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ 在该点处沿方向 $\boldsymbol{n} = (1, -2, 3)$ 的方向导数最大.

13. 设函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) + 3f(x) + 2x \int_0^1 f(xt) dt = e^{-x}$, 且 $f(0) = 1$, 求 $f(x)$.

14. 计算 $I = \iint_D |x + y - 1| dx dy$, 其中 D 是圆域 $D: x^2 + y^2 \leq 1$.

15. 设 $f(x, y) = \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{y^2}$, 讨论 $f(x, y)$ 在原点 $(0, 0)$ 处的

(1) 连续性;

(2) 偏导数存在性;

(3) 可微性;

(4) 沿方向 $\boldsymbol{n} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ 的方向导数的存在性, 对存在情形计算出结果.

CHAPTER 18

2016-2017 学年微积分 (一) (下) 期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 因 $e^x - x, e^{3x} - x$ 是齐次方程 $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ 的两个线性无关解, 所以原微分方程的通解为

$$y = C_1(e^x - x) + C_2(e^{3x} - x) + x.$$

将 $y(0) = 2, y'(0) = 3$ 代入上式, 得 $C_1 = C_2 = 1$, 故所求特解为

$$y = e^x + e^{3x} - x.$$

2. **Solution.** 令 $p(x) = y'$, 则原方程化为 $p' = p^2 + 1, p|_{x=0} = 0$.

分离变量得

$$\frac{dp}{1+p^2} = dx.$$

积分得 $\arctan p = x + C$, 由初始条件得 $C = 0$, 所以 $p = y'(x) = \tan x$. 再积分, 并代入 $y|_{x=0} = 0$, 得

$$y(x) = -\ln(\cos x), \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

3. **Solution.** 过点 $M(2, -2, 3)$ 且与直线 L_1 垂直的平面方程为

$$(x - 2) + 2(y + 2) = 0.$$

将 L_1 的参数方程 $x = -1 + t, y = 2 + 2t, z = 4$ 代入平面方程, 得 $t = -1$, 从而交点为 $P(-2, 0, 4)$.

所求直线为过点 M 和点 P 的直线, 故其方程为

$$\frac{x+2}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z-4}{-1}.$$

4. **Solution.** 令

$$F(x, y, z) = x + y - z - 1, \quad G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3.$$

则

$$\nabla F = (1, 1, -1), \quad \nabla G(1, 1, 1) = 2(1, 1, 1).$$

切线方向向量可取

$$\mathbf{s} = (1, 1, -1) \times (1, 1, 1) = 2(1, -1, 0).$$

所以切线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{0},$$

法平面方程为

$$x - y = 0.$$

5. **Solution.** 因

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^y f'(xe^y),$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, y) = e^y f'(0) = 2e^y.$$

由偏导定义可知

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, 1) = \left. \frac{d}{dy} (2e^y) \right|_{y=1} = 2e.$$

6. **Solution.** 记 f_i, f_{ij} 分别为 $f(u, v, w)$ 关于第 i 个变量的一阶偏导和二阶偏导.

因为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1 + f_2 + yf_3,$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= f_{12} + xf_{13} + f_{22} + xf_{23} + f_3 + yf_{32} + xyf_{33} \\ &= f_{12} + xf_{13} + f_{22} + (x+y)f_{23} + f_3 + xyf_{33}. \end{aligned}$$

7. **Solution.** 交换积分次序, 得

$$I = \int_0^1 e^{x^2} dx \int_{x^3}^x dy = \int_0^1 e^{x^2} (x - x^3) dx.$$

令 $t = x^2$, 则

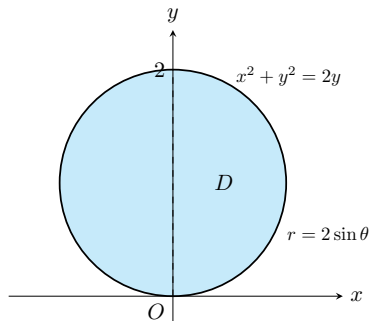
$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 e^t (1-t) dt = \frac{e-2}{2}.$$

8. **Solution.**

由于 D 关于 y 轴对称, $\iint_D x^3 \sin y \, dx \, dy = 0$, $\iint_D 2xy \, dx \, dy = 0$.

因此利用极坐标代换得

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy \\ &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\sin\theta} r^2 \cdot r \, dr \\ &= 4 \int_0^\pi \sin^4 \theta \, d\theta = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \, d\theta = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$



9. **Solution.** 记 D 为 V 在 xOy 面上的投影, 则 D 由直线 $x=0, y=x, y=1$ 围成. 因此

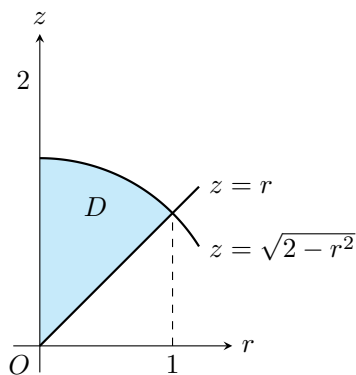
$$\begin{aligned} I &= \iint_D dx dy \int_0^{xy} xy^2 z^3 dz \\ &= \frac{1}{4} \iint_D x^5 y^6 dx dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 dx \int_x^1 x^5 y^6 dy \\ &= \frac{1}{28} \int_0^1 (x^5 - x^{12}) dx = \frac{1}{28} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{13} \right) = \frac{1}{312}. \end{aligned}$$

10. **Solution.**

由对称性可得 $\iiint_V x dv = 0$.

用柱坐标代换, 得

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V z dv \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_r^{\sqrt{2-r^2}} z dz \\ &= \pi \int_0^1 (2 - 2r^2) r dr = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$



2 综合计算题 (每小题 8 分, 共 40 分)

11. **Solution.** 视 x, z 为因变量, 方程组两边对 y 求导, 得

$$\begin{cases} F_1 \left(\frac{dx}{dy} + 1 \right) + F_2 \left(1 - \frac{dz}{dy} \right) = 0, \\ \frac{dz}{dy} = f' \left(x + y \frac{dx}{dy} \right). \end{cases}$$

于是

$$\frac{dz}{dy} = \frac{f' [(x-y)F_1 - yF_2]}{F_1 - yf'F_2}.$$

12. **Solution.** 设所求点为 $M(x, y, z)$, 则 $\nabla f(M) = (2x, 2y, -1)$, 且 $\mathbf{n}^\circ = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, -2, 3)$.

函数 $f(x, y, z)$ 在点 M 处沿方向 $\mathbf{n}$ 的方向导数为

$$\frac{\partial f(M)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2x - 4y - 3).$$

即在约束 $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1$ 下求 $2x - 4y - 3$ 的最大值. 构造 Lagrange 函数

$$L(x, y, z, \lambda) = 2x - 4y - 3 + \lambda(x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 1).$$

令

$$\begin{cases} L_x = 2 + 2\lambda x = 0, \\ L_y = -4 + 4\lambda y = 0, \\ L_z = 4\lambda z = 0, \\ L_\lambda = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

得 $x = -y, z = 0$. 代入约束方程, 得

$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad y = \mp \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad z = 0.$$

比较方向导数的值, 可知所求点为

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right).$$

13. **Solution.** 令 $u = tx$, 则

$$x \int_0^1 f(tx) dt = \int_0^x f(u) du.$$

从而原方程变为

$$f'(x) + 3f(x) + 2 \int_0^x f(u) du = e^{-x}.$$

由上式可知 $f''(x)$ 存在, 两边求导得

$$f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = -e^{-x}. \quad (*)$$

特征方程 $r^2 + 3r + 2 = 0$ 有相异实根 $r = -2, -1$, 对应齐次方程通解为

$$Y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$

设特解为 $y^* = A x e^{-x}$, 代入方程 (*) 得 $A = -1$, 所以

$$f(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} - x e^{-x}.$$

由原方程可得 $f'(0) = -2$, 又 $f(0) = 1$, 代入得 $C_1 = 0, C_2 = 1$. 因此

$$f(x) = (1 - x) e^{-x}.$$

14. **Solution.**

用 $x + y = 1$ 将区域 D 分为

$D_1 = D \cap \{(x, y) \mid x + y \geq 1\}$ 和 $D_2 = D \setminus D_1$.

记 $g = x + y - 1$, 则

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} g \, d\sigma - \iint_{D_2} g \, d\sigma \\ &= 2 \iint_{D_1} g \, d\sigma - \iint_D g \, d\sigma. \end{aligned}$$

因为

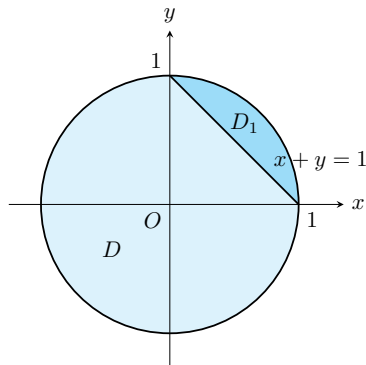
$$\iint_D g \, d\sigma = \iint_D (-1) \, dx \, dy = -\pi,$$

且

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} g \, d\sigma &= \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} (x + y - 1) \, dy \\ &= \frac{5}{6} - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

所以

$$I = \frac{5}{3} + \frac{\pi}{2}.$$



15. Solution.

(1) 由于 $f(x, y) = \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{y^2}$ 是初等函数, 且在全平面有定义, 所以 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续.

(2) 因为 $f(x, 0) = 0$, 所以 $f_x(0, 0) = 0$; 同理 $f_y(0, 0) = 0$.

(3) 考虑极限

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sqrt[3]{x} \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

考虑 $y = x$, $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{2}|x|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ 不存在, 所以 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处不可微.

(4) 利用方向导数的定义, 得

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial \mathbf{n}} = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{f(\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha) - f(0, 0)}{\rho} = \sqrt[3]{\cos \alpha} \sqrt[3]{\sin^2 \alpha}.$$

Part IV

微积分 (B) (下) 期末考试

CHAPTER 1

2024-2025 学年微积分 (B) (下) 期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ 的等值面不可能是 () .

- A. 圆锥面
B. 椭圆抛物面
C. 双叶双曲面
D. 单叶双曲面

2. 设 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - 1}{x^2 + y^2} = 2$, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处 () .

- A. 不存在偏导数
B. 存在偏导数, 但不可微
C. 可微, $f_x(0, 0) \neq 0, f_y(0, 0) \neq 0$
D. 可微, $f_x(0, 0) = 0, f_y(0, 0) = 0$

3. 计算 $I = \iiint_{\Omega} z \, dv$, 其中 Ω 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z = 1$ 所围成的立体, 化为累次积分为:

$$\begin{aligned} (1) \quad I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^1 z \, dz, & (2) \quad I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho \, d\rho \int_{\rho}^1 z \, dz, \\ (3) \quad I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dz \int_0^z z \, d\rho, & (4) \quad I &= \int_0^1 z \, dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \rho \, d\rho. \end{aligned}$$

其中正确的为 () .

- A. (2) (4)
B. (1) (3)
C. (2) (3)
D. (1) (4)

4. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=3$ 处条件收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}(x+1)^n$ 在 $x=-3$ 处 () .

- A. 绝对收敛
B. 条件收敛
C. 发散
D. 敛散性不确定

$$\oint_C P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy = 0,$$

A. $y - \frac{x^2}{y^3}$

B. $\frac{1}{y} - \frac{x^2}{y^3}$

C. $x - \frac{1}{y}$

D. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$

A. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $u_n > \frac{1}{n}$

B. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 收敛

C. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ ($u_n > 0$) 条件收敛, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty} u_{2k-1}$ 都收敛

D. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 绝对收敛

7. 设 S 为上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} (a > 0)$, 则 $\iint_S (x+z)^2 \mathrm{d}S = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 设 $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 点 $P_0(1, 2, -2)$ 为空间曲线 $L: x = t, y = 2t^2, z = -2t^4$ 上的点, 则 u 在点 $P_0(1, 2, -2)$ 处沿曲线 L 的切线方向 $\boldsymbol{l}$ (t 增大方向) 的方向导数为_____.

9. 设 $f(x) = \arctan \frac{1-x}{1+x}$, 则 $f^{(2024)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 设 $f(x) = x - 1 (0 \leq x \leq \pi)$ 展开成傅里叶级数为 $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, -\infty < x < +\infty$, 其中 $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, n = 0, 1, 2, \dots$, 则 $S\left(-\frac{5}{2}\pi\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. 设 Σ 是 xOy 面上的曲线 $C: y^2 = x^2 - 1$ 绕 y 轴旋转一周所形成的曲面, 求曲线 $L: \frac{x}{0} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$ 与曲面 Σ 的交点 P , 并求曲面 Σ 在 P 点处的法线方程.

12. 设函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $\mathrm{d}f|_{(1,1)} = 3\mathrm{d}u + 4\mathrm{d}v$, $y = f(\cos x, 1 + x^2)$, 求 $\left. \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} \right|_{x=0}$.

13. 设 $f(x, y)$ 连续, $D: x^2 + y^2 \leq y$, 若 $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{4}{\pi} \iint_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$, 求 $f(x, y)$.

14. 求圆柱面 $x^2 + y^2 = ay (a > 0)$ 介于平面 $z = 0$ 与圆锥面 $z = \frac{1}{a} \sqrt{x^2 + y^2}$ 之间的柱面面积 S .

15. 下半球面 $S: z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 取上侧, 求积分 $I = \iint_S \frac{x \mathrm{d}y \mathrm{d}z + (z + 1)^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

16. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 - n + 1)}{2^n}$ 的和.

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 已知 $f(u, v) = \oint_L (ux^2 + vy^2) \mathrm{d}s$, 其中曲线 $L: x^2 + y^2 = u^2$, 求 $f_{uv}(1, 1)$.

18. 试求抛物面 $z = 1 + x^2 + y^2$ 的一张切平面, 使得它与该抛物面及圆柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 所围成的立体体积最小.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 设 $f(x)$ 为正值连续函数, 曲线 $L: (x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2 (a > 0)$, 方向取逆时针方向. 证明:

$$\oint_L xf(y) \mathrm{d}y - \frac{y}{f(x)} \mathrm{d}x \geq 2\pi a^2.$$

20. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ 是条件收敛的.

CHAPTER 2

2024-2025 学年微积分 (B) (下) 期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. **Solution.** B.

函数的等值面为

$$x^2 + y^2 - z^2 = C.$$

当 $C = 0$ 时为圆锥面; 当 $C > 0$ 时为单叶双曲面; 当 $C < 0$ 时为双叶双曲面. 它不可能是椭圆抛物面.

2. **Solution.** D.

由 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - 1}{x^2 + y^2} = 2$ 可知, 当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时,

$$f(x, y) - 1 = 2(x^2 + y^2) + o(x^2 + y^2)$$

易知 $f(0, 0) = 1$, 所以

$$f(x, y) - f(0, 0) = o(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

因而 f 在 $(0, 0)$ 处可微, 且线性主部为零, 所以

$$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0.$$

3. **Solution.** A.

该区域在柱坐标下为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad \rho \leq z \leq 1,$$

也可写成

$$0 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq \rho \leq z, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

因此正确的是 (2) 和 (4) .

4. **Solution.** A.

原级数在 $x = 3$ 处条件收敛, 即 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^n$ 条件收敛,

特别地 $a_n 2^n \rightarrow 0$, 故 $\{a_n 2^n\}$ 有界. 于是存在常数 M , 使得

$$|a_n| \leq \frac{M}{2^n}.$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} (x+1)^n$ 在 $x = -3$ 处为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n,$$

且

$$\sum |a_n| \leq M \sum \frac{1}{2^n} < \infty.$$

因此绝对收敛.

5. Solution. C.

在单连通区域 $y > 0$ 内, 任意闭曲线积分为零等价于

$$P_y = Q_x.$$

已知

$$Q = \frac{x}{y^2}, \quad Q_x = \frac{1}{y^2}.$$

C、D 均满足 $P_y = \frac{1}{y^2}$, 但 $P = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ 在 $x = 0$ 处无定义, 故选 C.

6. Solution. D.

对于 A 选项, 考虑 $u_n = \frac{1}{n}$, 则 $\sum u_n$ 发散, 但 $u_n > \frac{1}{n}$ 不成立;

对于 B 选项, 考虑 $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}}$, 则 $\sum u_n^2 = \sum \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 收敛, 但 $\sum (-1)^n u_n = \sum \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ 发散;

对于 C 选项, 考虑 $u_n = \frac{1}{n}$, 则 $\sum (-1)^{n-1} u_n$ 条件收敛,

但 $\sum u_{2k} = \sum \frac{1}{2k}$ 与 $\sum u_{2k-1} = \sum \frac{1}{2k-1}$ 均发散;

对于 D 选项, 若 $\sum a_n^2$ 收敛, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + \frac{1}{n^2} \right) < \infty,$$

因而 $\sum \frac{a_n}{n}$ 绝对收敛.

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. Solution. $\frac{4\pi a^4}{3}$.

由对称性可知

$$\begin{aligned}\iint_S (x+z)^2 \mathrm{d}S &= \iint_S (x^2 + 2xz + z^2) \mathrm{d}S \\ &= \iint_S (x^2 + z^2) \mathrm{d}S = \frac{2}{3} \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) \mathrm{d}S \\ &= \frac{2a^2}{3} \iint_S \mathrm{d}S \\ &= \frac{4\pi a^4}{3}.\end{aligned}$$

8. **Solution.** $\frac{25}{27}$.

$$\nabla u = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

因而

$$\nabla u(P_0) = \frac{1}{3}(1, 2, -2).$$

曲线切向量为

$$\boldsymbol{\tau} = (1, 4t, -8t^3)|_{t=1} = (1, 4, -8), \quad |\boldsymbol{\tau}| = 9.$$

所以方向导数为

$$\nabla u(P_0) \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{\tau}|} = \frac{25}{27}.$$

9. **Solution.** 0.

注意到当 $|x| < 1$ 时,

$$\arctan \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4} - \arctan x.$$

$$\text{而 } \arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

由 Taylor 定理对照可知

$$f^{(2024)}(0) = 0.$$

10. **Solution.** $\frac{\pi}{2} - 1$.

余弦级数对应 $[0, \pi]$ 上函数的偶延拓, 并作 2π 周期延拓. 因为

$$-\frac{5\pi}{2} \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi},$$

所以

$$S\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

3 基本计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. **Solution.** 曲线 $C: y^2 = x^2 - 1$ 绕 y 轴旋转所得曲面为

$$x^2 + z^2 - y^2 = 1.$$

直线 L 可写成

$$x = 0, \quad y = 1 - t, \quad z = t.$$

代入曲面方程得

$$t^2 - (1 - t)^2 = 1,$$

解得 $t = 1$. 因此交点为

$$P = (0, 0, 1).$$

设

$$F(x, y, z) = x^2 + z^2 - y^2 - 1,$$

则

$$\nabla F(P) = (0, 0, 2).$$

故法线方程为

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{2}.$$

12. **Solution.** 由 $df|_{(1,1)} = 3du + 4dv$ 可知

$$f_u(1, 1) = 3, \quad f_v(1, 1) = 4.$$

计算

$$\frac{dy}{dx} = f_u \cdot (-\sin x) + f_v \cdot 2x,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{df_u}{dx} \sin x - f_u \cos x + 2x \frac{df_v}{dx} + 2f_v.$$

将 $x = 0$ 代入上式得

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0} = -f_u(1, 1) + 2f_v(1, 1) = -3 + 8 = 5.$$

13. **Solution.** 记

$$C = \frac{4}{\pi} \iint_D f(x, y) dx dy.$$

则

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - C.$$

两边在 D 上积分并乘以 $\frac{4}{\pi}$, 得

$$C = \frac{4}{\pi} \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy - C.$$

区域 D 在极坐标下为

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq \sin \theta.$$

因而

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{\sin \theta} \sqrt{1-r^2} \, r \, dr \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^\pi (1-r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sin \theta} d\theta \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^\pi (|\cos \theta|^3 - 1) \, d\theta = \frac{\pi}{3} - \frac{4}{9}.\end{aligned}$$

所以

$$C = \frac{2}{3} - \frac{8}{9\pi}.$$

最终

$$f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{2}{3} + \frac{8}{9\pi}.$$

14. **Solution.** 圆柱面 $x^2 + y^2 = ay$ 在极坐标下为

$$r = a \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

其底面圆周弧长为

$$ds = \sqrt{r^2 + (r')^2} \, d\theta = a \, d\theta.$$

圆锥面给出的高度为

$$z = \frac{r}{a} = \sin \theta.$$

因而柱面面积为

$$S = \int_0^\pi z \, ds = a \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta = 2a.$$

15. **Solution.** 下半球面 $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ 上满足 $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 1$, 因此

$$I = \iint_S x \, dy \, dz + (z+1)^2 \, dx \, dy.$$

记 S' 为 $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$ 取下侧, $\Sigma = S \cup S'$, 则

$$\begin{aligned}I &= \oiint_{\Sigma} x \, dy \, dz + (z+1)^2 \, dx \, dy - \iint_{S'} x \, dy \, dz + (z+1)^2 \, dx \, dy \\ &= - \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ z \leq 0}} (1+2z+2) \, dx \, dy \, dz - \iint_{S'} dx \, dy \\ &= -3 \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ z \leq 0}} dx \, dy \, dz - 2 \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ z \leq 0}} z \, dx \, dy \, dz + \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx \, dy \\ &= -2\pi - 2 \int_{-1}^0 z \cdot \pi(1-z^2) \, dz + \pi \\ &= -2\pi + \frac{\pi}{2} + \pi = -\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

16. **Solution.** 当 $|x| < 1$ 时,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} x^n &= \frac{1}{1-x}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} nx^n &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \right)' = x \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \right)' = x \left[\frac{x}{(1-x)^2} \right]' = x \cdot \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{x(1-x^2)}{(1-x)^4}.\end{aligned}$$

得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 - n + 1)}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - n + 1) x^n \Big|_{x=-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{27} + \frac{2}{9} + \frac{2}{3} = \frac{22}{27}.$$

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. **Solution.** 将圆 $L: x^2 + y^2 = u^2$ 参数化为

$$x = u \cos \theta, \quad y = u \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

则 $ds = u d\theta$. 因而

$$f(u, v) = \int_0^{2\pi} (u \cdot u^2 \cos^2 \theta + v \cdot u^2 \sin^2 \theta) u d\theta = \pi u^4 + \pi v u^3.$$

所以

$$f_{uv}(u, v) = 3\pi u^2,$$

从而

$$f_{uv}(1, 1) = 3\pi.$$

18. **Solution.** 抛物面在点 $(a, b, 1 + a^2 + b^2)$ 处的切平面为 $2a(x - a) + 2b(y - b) - (z - 1 - a^2 - b^2) = 0$, 即

$$z = 1 - a^2 - b^2 + 2ax + 2by.$$

圆柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 在 xOy 平面上的投影区域为圆域

$$D: x^2 + y^2 \leq 2x, z = 0.$$

因抛物面是凸曲面, 故所围立体的体积为切平面上方、抛物面下方、圆柱面内侧部分的体积

$$V(a, b) = \iint_D dx dy \int_{1-a^2-b^2+2ax+2by}^{1+x^2+y^2} dz,$$

即

$$V(a, b) = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy - 2a \iint_D x dx dy - 2b \iint_D y dx dy + \pi(a^2 + b^2).$$

因为 D 的形心为 $(1, 0)$, 所以 $\iint_D x dx dy = \pi$, $\iint_D y dx dy = 0$,

故

$$\begin{aligned}
 V(a, b) &= \iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy - 2a\pi + \pi(a^2 + b^2) \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^3 \, dr - 2a\pi + \pi(a^2 + b^2) \\
 &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \, d\theta - 2a\pi + \pi(a^2 + b^2) \\
 &= \frac{3\pi}{2} - 2a\pi + \pi(a^2 + b^2) = \pi \left[(a-1)^2 + b^2 + \frac{1}{2} \right].
 \end{aligned}$$

显然当 $a = 1$ 且 $b = 0$ 时, $V(a, b)$ 取得最小值 $V_{\min} = \frac{\pi}{2}$.

此时切点为 $(1, 0, 2)$, 切平面方程为 $z = 2x + 0 \cdot y + 1 - 1 - 0$, 即

$$z = 2x.$$

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. **Proof.** 记

$$P(x, y) = -\frac{y}{f(x)}, \quad Q(x, y) = xf(y).$$

由 Green 公式,

$$\oint_L xf(y) \, dy - \frac{y}{f(x)} \, dx = \iint_D (Q_x - P_y) \, dx \, dy = \iint_D \left(f(y) + \frac{1}{f(x)} \right) \, dx \, dy,$$

其中 D 是圆盘 $(x-a)^2 + (y-a)^2 \leq a^2$.

由圆盘关于直线 $y = x$ 对称,

$$\iint_D f(y) \, dx \, dy = \iint_D f(x) \, dx \, dy.$$

所以

$$\begin{aligned}
 \oint_L xf(y) \, dy - \frac{y}{f(x)} \, dx &= \iint_D \left(f(y) + \frac{1}{f(x)} \right) \, dx \, dy \\
 &= \iint_D \left(f(x) + \frac{1}{f(x)} \right) \, dx \, dy \\
 &\geq 2 \iint_D dx \, dy = 2\pi a^2.
 \end{aligned}$$

20. **Proof.** 设

$$\alpha_n = \sqrt{n^2 + 1} - n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n}.$$

则

$$\sin(\pi\sqrt{n^2 + 1}) = \sin(n\pi + \pi\alpha_n) = (-1)^n \sin(\pi\alpha_n).$$

因为

$$\alpha_n \sim \frac{1}{2n},$$

所以

$$\sin(\pi\alpha_n) \sim \frac{\pi}{2n}.$$

于是绝对值级数与调和级数同阶, 故发散.

另一方面, α_n 严格单调递减, 且趋于零,

而 $\pi\alpha_n = \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} < \frac{\pi}{2}$, 因此 $\sin(\pi\alpha_n)$ 也严格单调递减, 且趋于零.

由 Leibniz 判别法, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(\pi\alpha_n)$$

收敛. 故原级数条件收敛.

CHAPTER 3

2023-2024 学年微积分（一）（下）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 已知直线 $L_1: x+1=y=\frac{z-1}{2}$ 和 $L_2: x=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{3}$, 则这两直线的位置关系为 ().
- A. 相交
B. 平行
C. 重合
D. 异面
2. 设函数 $F(x, y, z) = xy - z \ln y + e^{xz} - 1$ 在点 $P(0, 1, 1)$ 附近满足方程 $F(x, y, z) = 0$, 则下列说法错误的是 ().
- A. F 在点 P 处可微
B. $\left. \frac{\partial y}{\partial z} \right|_P = 0$
C. $\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_P = -2$
D. $\left. \frac{\partial x}{\partial y} \right|_P = \frac{1}{2}$
3. 设 D 是 xOy 平面上以 $(1, 1), (-1, 1), (-1, -1)$ 为顶点的三角形区域, D_1 是 D 在第一象限的部分, 则 $\iint_D (xy + \cos x \sin y) d\sigma = ()$.
- A. $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y d\sigma$
B. $2 \iint_{D_1} xy d\sigma$
C. $\iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) d\sigma$
D. 0
4. 已知函数 $f(x) = 1 - x (0 \leq x \leq \pi)$, $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx (-\infty < x < \infty)$, 其中 $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx (n = 1, 2, \dots)$, 则 $S\left(-\frac{\pi}{2}\right) = ()$.
- A. $-\frac{\pi}{2} - 1$
B. $-\frac{\pi}{2} + 1$
C. $\frac{\pi}{2} - 1$
D. $\frac{\pi}{2} + 1$

5. 设 Γ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线, 则 $\oint_{\Gamma} (y + 2z) \, ds = (\quad)$.

A. π

B. 2π

C. $-\pi$

D. 0

6. 关于级数的描述, 下列命题中正确的是 ().

A. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛

B. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

C. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛

D. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 收敛

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. 设 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (R > 0)$, 则 $\oiint_S \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} \right) \, dS = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 曲线 $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$ 在点 $P_0(1, 1, 2)$ 的法平面方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

9. 设 $\{x^{2023} + 2xy^3, ax^2y^2 - y^{2024}\}$ 在整个 xOy 平面内是某一函数 $u(x, y)$ 的梯度, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! 2^n} x^{2n+1}$ 的和函数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3 基本计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 一直线过点 $B(1, 2, 3)$ 且与向量 $s = (6, 6, 7)$ 平行, 求点 $A(3, 4, 2)$ 到此直线的距离 d .

12. 设 $z = (x^2 + y^2)e^{-\arctan \frac{x}{y}}$, 求 dz , $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(0,1)}$.

13. 求曲线积分 $I = \int_L (y^2 - \cos y) dx + x \sin y dy$, 其中有向曲线 L 为沿着正弦曲线 $y = \sin x$, 由点 $O(0, 0)$ 到点 $A(\pi, 0)$.

14. 求由曲面 $2z = x^2 + y^2$ 和 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围成的立体 Ω 的体积 V .

15. 设 S 是上半球面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 与锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 围成的闭曲面的外侧, $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ 是 S 外法线的方向余弦, 求

$$I = \oiint_S [(x^3 + z^2) \cos \alpha + (y^3 + x^2) \cos \beta + (z^3 + y^2) \cos \gamma] dS.$$

16. 设 $f(x) = \frac{1}{(4-x)^2}$, 将 $f(x)$ 展开成关于 x 的幂级数, 并求 $f^{(20)}(0)$.

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 设函数 $u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, 空间曲线 $L: x = t, y = 2t^2, z = -2t^4$, $P_0(1, 2, -2)$ 为曲线 L 上的一点, 求 u 在 P_0 处沿曲线 L 的切向量方向 (t 增大的方向) $\boldsymbol{l}$ 的方向导数 $\left. \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}} \right|_{P_0}$, 并求函数 u 在 $P_0(1, 2, -2)$ 处的最大变化率.

18. 设函数 $f(x, y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}f(x, y) = (2ax + by) \mathrm{d}x + (2by + ax) \mathrm{d}y$ (a, b 为常数), 且 $f(0, 0) = -3$, $f'_x(1, 1) = 3$, 求点 $(-1, -1)$ 到曲线 $f(x, y) = 0$ 上的点的距离的最大值.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 设 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 证明: $1 \leq \iint_D (\cos y^2 + \sin x^2) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \leq \sqrt{2}$.

20. 设 $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}}$ ($n = 2, 3, \dots$), 证明: $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ 收敛.

CHAPTER 4

2023-2024 学年微积分（一）（下）期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. **Solution.** A.

显然 L_1 与 L_2 不平行、重合. 联立

$$L_1 : (x, y, z) = (-1, 0, 1) + t(1, 1, 2), \quad L_2 : (x, y, z) = (0, -1, 2) + s(1, 3, 3)$$

$$\text{解得 } \begin{cases} s = 1, \\ t = 2 \end{cases}, \text{ 所以两直线相交于点 } (1, 2, 5).$$

2. **Solution.** C.

在 $P(0, 1, 1)$ 处,

$$F_x = 2, \quad F_y = -1, \quad F_z = 0.$$

因为 $F_y \neq 0$, 可把 y 看作 x, z 的函数, 且

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_y} = 2.$$

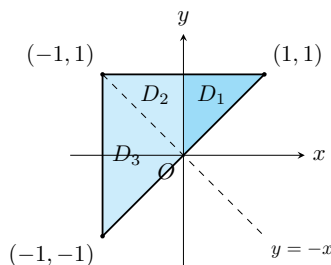
故选项 C 中的 -2 错误.

3. **Solution.** A.

如图, 用直线 $y = -x$ 将三角形区域 D 分为 D_2 和 D_3 ,

则由对称性可知

$$\begin{aligned} \iint_D (xy + \cos x \sin y) \, d\sigma &= \iint_{D_2} (xy + \cos x \sin y) \, d\sigma \\ &\quad + \iint_{D_3} (xy + \cos x \sin y) \, d\sigma \\ &= \iint_{D_2} \cos x \sin y \, d\sigma \\ &= 2 \iint_{D_1} \cos x \sin y \, d\sigma. \end{aligned}$$



4. **Solution.** C.

该正弦级数表示函数 $f(x) = 1 - x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 的奇延拓. 因而

$$S\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\left(1 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

5. **Solution.** D.

由轮换对称性可知

$$\oint_{\Gamma} x \, ds = \oint_{\Gamma} y \, ds = \oint_{\Gamma} z \, ds$$

所以

$$\oint_{\Gamma} (y + 2z) \, ds = \oint_{\Gamma} (x + y + z) \, ds = 0.$$

6. **Solution.** D.

对于 A 选项, 考虑 $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 则 $\sum u_n$ 收敛, 但 $u_n^2 = \frac{1}{n}$, $\sum u_n^2$ 发散;

对于 B 选项, 考虑 $u_n = \frac{1}{n}$, 则 $\sum u_n^2 = \sum \frac{1}{n^2}$ 收敛, 但 $\sum u_n$ 发散;

对于 C 选项, 考虑 $u_n = (-1)^n$, $v_n = (-1)^{n-1}$, 则 $\sum (u_n + v_n) \equiv 0$ 收敛, 但 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 均发散;

但 $\sum u_{2k} = \sum \frac{1}{2k}$ 与 $\sum u_{2k-1} = \sum \frac{1}{2k-1}$ 均发散;

对于 D 选项, 若 $\sum a_n^2$ 收敛, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + \frac{1}{n^2} \right) < \infty,$$

因而 $\sum \frac{|a_n|}{n}$ 收敛.

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. **Solution.** $\frac{13\pi R^4}{9}$.

由对称性可知

$$\oiint_S x^2 \, dS = \oiint_S y^2 \, dS = \oiint_S z^2 \, dS = \frac{1}{3} \oiint_S (x^2 + y^2 + z^2) \, dS.$$

又球面上 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 而 $|S| = 4\pi R^2$, 所以

$$\oiint_S x^2 \, dS = \frac{4\pi R^4}{3}.$$

因而

$$\iint_S \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} \right) \, dS = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \frac{4\pi R^4}{3} = \frac{13\pi R^4}{9}.$$

8. **Solution.** $x - y = 0$.

令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$, $G(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - z^2$, 则两曲面的法向量可取为

$$\nabla F = (2x, 2y, -1), \quad \nabla G = (4x, 4y, -2z).$$

在 $P_0(1, 1, 2)$ 处切线的方向向量可取为 $\mathbf{s} = \nabla F \times \nabla G = (2, 2, -1) \times 4(1, 1, -1) = 4(-1, -1, 0)$,

因此法平面方程为

$$x - y = 0.$$

9. **Solution.** 3.

记 $P = x^{2023} + 2xy^3$, $Q = ax^2y^2 - y^{2024}$, 则 $\text{grad}u(x, y) = \{P, Q\}$ 等价于 $\text{d}u = P \text{d}x + Q \text{d}y$, 所以

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^{2023} + 2xy^3) = \frac{\partial}{\partial x}(ax^2y^2 - y^{2024}),$$

即

$$6xy^2 = 2axy^2.$$

因此 $a = 3$.

10. **Solution.** $xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^n} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{x^2}{2}\right)^n = xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

3 基本计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. **Solution.** 计算

$$\overrightarrow{BA} = (2, 2, -1), \quad |\mathbf{s}| = \sqrt{6^2 + 6^2 + 7^2} = \sqrt{121} = 11.$$

则点到直线的距离为

$$\begin{aligned} d &= \frac{|\overrightarrow{BA} \times \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|} = \frac{|(2, 2, -1) \times (6, 6, 7)|}{11} \\ &= \frac{|4(1, -1, 0)|}{11} = \frac{20\sqrt{2}}{11}. \end{aligned}$$

12. **Solution.** 由链式法则,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2xe^{-\arctan \frac{x}{y}} + (x^2 + y^2)e^{-\arctan \frac{x}{y}} \cdot \frac{-\frac{1}{y}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = (2x - y)e^{-\arctan \frac{x}{y}}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 2ye^{-\arctan \frac{x}{y}} + (x^2 + y^2)e^{-\arctan \frac{x}{y}} \cdot \frac{\frac{x}{y^2}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = (2y + x)e^{-\arctan \frac{x}{y}}. \end{aligned}$$

因而

$$\text{d}z = \frac{\partial z}{\partial x} \text{d}x + \frac{\partial z}{\partial y} \text{d}y = e^{-\arctan \frac{x}{y}} [(2x - y) \text{d}x + (2y + x) \text{d}y].$$

由 $z_x(x, y) = (2x - y)e^{-\arctan \frac{x}{y}}$ 可知 $z_x(0, y) = -y \cdot e^{-\arctan 0} = -y$, 所以 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(0,1)} = -1$.

13. **Solution.** 设

$$P = y^2 - \cos y, \quad Q = x \sin y.$$

将曲线 L 与有向线段 AO 补成闭曲线, 围成区域记为 D . 由 Green 公式,

$$\oint_{L+AO} P \text{d}x + Q \text{d}y = - \iint_D (Q_x - P_y) \text{d}x \text{d}y.$$

因为

$$Q_x - P_y = \sin y - (2y + \sin y) = -2y,$$

故

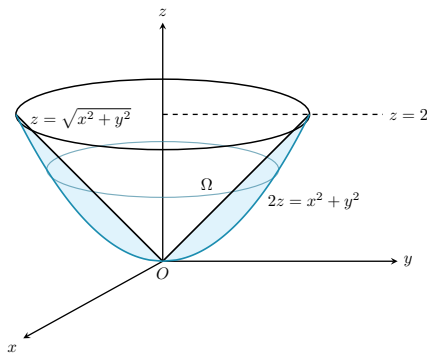
$$\begin{aligned} I &= 2 \iint_D y \, dx \, dy - \int_{\pi}^0 (-1) \, dx \\ &= 2 \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} y \, dy - \pi \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx - \pi = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

14. **Solution.** 联立 $2z = x^2 + y^2$ 与 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 得 $z = 0$ 或 $z = 2$,

所以 Ω 在 xOy 平面上的投影为圆盘 $D: x^2 + y^2 \leq 4$,

积分区域 Ω 如图所示. 用柱坐标代换,

$$\begin{aligned} V &= \iint_D dx \, dy \int_{\frac{r^2}{2}}^r dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \left(r - \frac{r^2}{2} \right) r \, dr \\ &= \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$



15. **Solution.** 记 S 所围成的区域为 Ω . 由 Gauss 公式,

$$\begin{aligned} I &= \oint_S [(x^3 + z^2) \cos \alpha + (y^3 + x^2) \cos \beta + (z^3 + y^2) \cos \gamma] \, dS \\ &= \oint_S (x^3 + z^2) \, dy \, dz + (y^3 + x^2) \, dz \, dx + (z^3 + y^2) \, dx \, dy \\ &= \iiint_{\Omega} [3x^2 + 3y^2 + 3z^2] \, dx \, dy \, dz. \end{aligned}$$

用球坐标代换,

$$\begin{aligned} I &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \, d\varphi \int_0^1 r^4 \, dr \\ &= \frac{6\pi}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \, d\varphi = \frac{6\pi}{5} (1 - \cos \frac{\pi}{4}) = \frac{3(2 - \sqrt{2})\pi}{5}. \end{aligned}$$

16. **Solution.** 由

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad |t| < 1,$$

令 $t = \frac{x}{4}$, 并对两边求导, 得

$$\frac{1}{(4-x)^2} = \frac{1}{16} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{x}{4} \right)^n, \quad |x| < 4.$$

因此

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{n+1}{4^{n+2}},$$

所以

$$f^{(20)}(0) = \frac{21!}{4^{22}}.$$

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. **Solution.** 点 $P_0(1, 2, -2)$ 对应参数 $t = 1$. 曲线 L 的切向量为

$$\boldsymbol{\tau} = (1, 4, -8), \quad \boldsymbol{\tau}_0 = \frac{1}{9}(1, 4, -8).$$

计算

$$\nabla u = \left(\frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right).$$

在 P_0 处

$$\nabla u(P_0) = \left(\frac{8}{27}, -\frac{2}{27}, \frac{2}{27} \right).$$

因而沿切线方向的方向导数为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{P_0} = \nabla u(P_0) \cdot \boldsymbol{\tau}_0 = \left(\frac{8}{27}, -\frac{2}{27}, \frac{2}{27} \right) \cdot \frac{1}{9}(1, 4, -8) = -\frac{16}{243}.$$

最大变化率即

$$|\nabla u(P_0)| = \frac{1}{27} \sqrt{8^2 + 2^2 + 2^2} = \frac{2\sqrt{2}}{9}.$$

18. **Solution.** 由题意

$$f_x = 2ax + by, \quad f_y = 2by + ax.$$

因为 $f_{xy} = f_{yx}$, 故 $a = b$. 又

$$f_x(1, 1) = 2a + b = 3,$$

所以 $a = b = 1$. 于是

$$df = (2x + y)dx + (x + 2y)dy = d(x^2 + xy + y^2),$$

并由 $f(0, 0) = -3$ 得

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3.$$

曲线 $f(x, y) = 0$ 即

$$x^2 + xy + y^2 = 3.$$

在曲线 $f(x, y) = 0$ 上任取一点 (x, y) , 则 $(-1, -1)$ 到该点的距离为 $d = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}$.

用 Lagrange 乘数法, 设 $F(x, y, \lambda) = (x+1)^2 + (y+1)^2 + \lambda(x^2 + xy + y^2 - 3)$, 令

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2(x+1) + \lambda(2x+y) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y+1) + \lambda(x+2y) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + xy + y^2 - 3 = 0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \end{cases}, \begin{cases} x = -1, \\ y = -1, \end{cases}, \begin{cases} x = -1, \\ y = 2, \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases}$$

计算 $d(1, 1) = 2\sqrt{2}$, $d(-1, -1) = 0$, $d(2, -1) = 3$, $d(-1, 2) = 3$, 所以最大值为 3.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. **Proof.** 由轮换对称性,

$$\iint_D \cos y^2 \, dx \, dy = \iint_D \cos x^2 \, dx \, dy.$$

所以

$$\iint_D (\cos y^2 + \sin x^2) \, dx \, dy = \iint_D (\cos x^2 + \sin x^2) \, dx \, dy = \sqrt{2} \iint_D \sin \left(x^2 + \frac{\pi}{4} \right) \, dx \, dy.$$

当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin \left(x^2 + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1.$$

所以

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \, dx \, dy &\leq \iint_D \sqrt{2} \sin \left(x^2 + \frac{\pi}{4} \right) \, dx \, dy \leq \iint_D \sqrt{2} \cdot 1 \, dx \, dy, \\ 1 &\leq \iint_D (\cos y^2 + \sin x^2) \, dx \, dy \leq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

20. **Proof.** $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^{-\frac{1}{2}},$

利用 Taylor 公式 $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

由于 $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 和 $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ 都收敛, 所以 $\sum a_n$ 收敛.

CHAPTER 5

2022-2023 学年微积分（一）（下）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 在空间直角坐标系中, 方程 $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ 表示 () .
- A. 半球面
B. 柱面
C. 锥面
D. 单叶双曲面
2. 设 $z = f(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 处有 $f_x(1, 1) = f_y(1, 1) = 1$, 则必有 () .
- A. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} f(x, y)$ 存在
B. $\mathrm{d}z|_{(1,1)} = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y$
C. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x, 1)$ 及 $\lim_{y \rightarrow 1} f(1, y)$ 都存在
D. $f(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 沿方向 $\boldsymbol{n} = \{\cos \theta, \sin \theta\}$ 的方向导数存在
3. 设函数 $z = f(x, y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}z = 2x\mathrm{d}x + 3y\mathrm{d}y$, 则点 $(0, 0)$ () .
- A. 不是 $f(x, y)$ 的连续点
B. 不是 $f(x, y)$ 的驻点
C. 是 $f(x, y)$ 的极大值点
D. 是 $f(x, y)$ 的极小值点
4. 设 Ω 是由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和平行 $z = 1$ 所围成的空间区域, 将 $I = \iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 化为柱坐标系下的累次积分, 下列结果正确的是 () .
- A. $I = 2\pi \int_0^1 r\mathrm{d}r \int_0^1 f(\sqrt{r^2 + z})\mathrm{d}z$
B. $I = 2\pi \int_0^1 r\mathrm{d}r \int_r^1 f(\sqrt{r^2 + z})\mathrm{d}z$
C. $I = 2\pi \int_0^1 \mathrm{d}r \int_r^1 f(\sqrt{r^2 + z})\mathrm{d}z$
D. $I = 2\pi \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^z f(\sqrt{r^2 + z})\mathrm{d}r$

5. 设 S 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ($z \geq 0, R > 0$), $abc \neq 0$, 则 $\iint_S (ax + by + cz) dS = (\quad)$.

A. $c\pi R^2$

B. $\frac{1}{4}c\pi R^3$

C. $c\pi R^3$

D. $(a + b + c)\pi R^2$

6. 下列命题中, 正确的是 ().

A. 若 $a_n \leq b_n \leq c_n$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛

B. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

C. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散

D. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{\sqrt{n}}$ 收敛

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. 设曲线 $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, 则 $\oint_{\Gamma} (x^2 + 2y^2 + 3z) ds = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. $z = x + 3y + \ln(1 + x^2 + y^2)$ 在点 $(0, 0, 0)$ 的切平面方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

9. 设 $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) \Big|_{(1, -1, 2)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ 2x, & 0 < x < \pi \end{cases}$, 将 $f(x)$ 展开成以 2π 为周期的傅里叶级数, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数在 $x = -3\pi$ 处的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3 基本计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 求过点 $P(2, 1, 3)$ 且与 $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-1}$ 垂直的平面方程, 并求该平面与 L_1 的交点.

12. 设 $z = e^{-x} \sin \frac{y}{x}$, 求 $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(2, \pi)}$, $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right|_{(2, \pi)}$.

13. 求曲面 $z = xy$ 包含在圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 内的那部分面积 S .

14. 求 $I = \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, 其中 Ω 由 $\begin{cases} y^2 + \frac{z^2}{2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所形成的曲面所围成的立体.

15. 设 S 是上半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ($R > 0$), 取上侧, 求 $I = \iint_S \frac{(x^2 + y) dy dz + z dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

16. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}$ 的收敛域与和函数 $S(x)$.

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 设 L 是 xOy 面上任意的光滑曲线, $f(x)$ 具有二阶连续的导数, 且 $f(0) = 4$, $f'(0) = 3$, 若曲线积分 $\int_L (-xe^x + f''(x))y dx + f(x)dy$ 与路径无关, 求 $f(x)$.

18. 求 $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$ 在椭圆域 $D = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 \leq 4\}$ 上的最大值和最小值.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x) dx = A$, 证明: $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy = \frac{1}{2}A^2$.

20. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $2a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n^2 + u_n}$, 其中 $u_n > 0$, $\{a_n\}$ 有上界, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

CHAPTER 6

2022-2023 学年微积分（一）（下）期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. **Solution.** D.

方程 $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ 等价于

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1, z \geq 0,$$

表示单叶双曲面的上半部分.

2. **Solution.** C.

多元函数偏导存在无法保证函数连续, 全微分 $dz = f_x dx + f_y dy$ 仅在函数可微时成立,

偏导数存在不能保证沿任意方向的方向导数存在.

对于 C 选项, $f(x, 1)$ 是 x 的一元函数, 由 $f_x(1, 1)$ 存在知该一元函数在 $x = 1$ 处可导, 必然连续,

即 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x, 1) = f(1, 1)$ 存在; 同理 $\lim_{y \rightarrow 1} f(1, y)$ 也存在.

3. **Solution.** D.

由题可知 $dz = d\left(x^2 + \frac{3}{2}y^2\right)$, 所以 $z = x^2 + \frac{3}{2}y^2 + C$, 因此 $f(x, y)$ 显然在 $(0, 0)$ 处可微, 且

$$f_x(0, 0) = 2x|_{(0,0)} = 0, \quad f_y(0, 0) = 3y|_{(0,0)} = 0,$$

所以点 $(0, 0)$ 是驻点. 又 $f_{xx}(0, 0) = 2$, $f_{yy}(0, 0) = 3$, $f_{xy}(0, 0) = 0$, 所以

$$f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) = 6 > 0,$$

因此点 $(0, 0)$ 是极小值点.

4. **Solution.** B.

由柱坐标代换

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z,$$

可得

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_r^1 f(\sqrt{r^2 + z}) dz.$$

5. Solution. C.

由对称性可知

$$\iint_S x \, dS = \iint_S y \, dS = 0,$$

$$\text{故 } \iint_S (ax + by + cz) \, dS = c \iint_S z \, dS.$$

用球坐标代换, $dS = R^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta$, 因此

$$\begin{aligned} c \iint_S z \, dS &= c \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cos \varphi R^2 \sin \varphi \, d\varphi \\ &= c\pi R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi \, d\varphi \\ &= c\pi R^3 \left[-\frac{\cos 2\varphi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= c\pi R^3. \end{aligned}$$

6. Solution. A.

对于 A 选项, 根据已知条件 $a_n \leq b_n \leq c_n$, 可知 $0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n$.

令 $u_n = b_n - a_n$, $v_n = c_n - a_n$, 则 $v_n \geq u_n \geq 0$ 均为正项级数的通项.

因为 $\sum a_n$ 和 $\sum c_n$ 都收敛, 它们的差级数 $\sum v_n = \sum (c_n - a_n)$ 也必然收敛,

根据正项级数的比较判别法, 由于 $\sum v_n$ 收敛, 所以 $\sum u_n$ 也收敛.

因 $b_n = u_n + a_n$, 而 $\sum u_n$ 和 $\sum a_n$ 都是收敛级数, 所以它们的和级数 $\sum b_n$ 必然收敛.

对于 B 选项, 令 $a_n = \frac{1}{n}$, 显然 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1$, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

对于 C 选项, 令 $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{(-1)^n \sqrt{n}} \right) = 1$,

但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

对于 D 选项, 令 $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. Solution. 2π .

显然曲线 Γ 具有轮换对称性, 因此

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} x^2 \, ds &= \oint_{\Gamma} y^2 \, ds = \oint_{\Gamma} z^2 \, ds, \\ \oint_{\Gamma} x \, ds &= \oint_{\Gamma} y \, ds = \oint_{\Gamma} z \, ds = 0. \end{aligned}$$

从而

$$\oint_{\Gamma} (x^2 + 2y^2 + 3z) \, ds = \oint_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) \, ds + \oint_{\Gamma} (x + y + z) \, ds = 2\pi.$$

8. **Solution.** $x + 3y - z = 0$.

由 $z = x + 3y + \ln(1 + x^2 + y^2)$ 可得

$$z_x = 1 + \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \quad z_y = 3 + \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}.$$

因此

$$z_x(0, 0) = 1, \quad z_y(0, 0) = 3.$$

曲面在点 $(0, 0, 0)$ 处切平面的法向量可取作 $(z_x(0, 0), z_y(0, 0), -1) = (1, 3, -1)$, 因此切平面方程为

$$x + 3y - z = 0.$$

9. **Solution.** $\frac{1}{6}$.

$$u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2 + z^2).$$

因此 $\mathbf{grad} u = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$, 所以

$$\operatorname{div}(\mathbf{grad} u) = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{x^2 + z^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{x^2 + y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

代入 $(1, -1, 2)$ 得

$$\Delta u = \frac{1}{1 + 1 + 4} = \frac{1}{6}.$$

10. **Solution.** $\frac{\pi}{2}$.

因为

$$-3\pi \equiv -\pi \equiv \pi \pmod{2\pi},$$

根据 Dirichlet 收敛定理可知

$$S(-3\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{2\pi + (-\pi)}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

3 基本计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. **Solution.** 与直线

$$L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-1}$$

垂直的平面法向量可取 $(2, 1, -1)$. 过点 $P(2, 1, 3)$ 的平面方程为

$$2(x-2) + (y-1) - (z-3) = 0,$$

即

$$2x + y - z - 2 = 0.$$

将

$$x = 2t + 1, \quad y = t + 2, \quad z = -t + 2$$

代入该平面方程, 可得 $t = 0$, 故交点为 $(1, 2, 2)$.

12. **Solution.** 先求

$$z_y = e^{-x} \cos \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^{-x}}{x} \cos \frac{y}{x}.$$

所以

$$z_y(2, \pi) = \frac{e^{-2}}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

再对 x 求偏导, 可得

$$z_{yx} = e^{-x} \left(\frac{y}{x^2} \sin \frac{y}{x} - \frac{x+1}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right) \frac{1}{x}.$$

在 $(2, \pi)$ 处, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, 故

$$z_{yx}(2, \pi) = \frac{\pi}{8e^2}.$$

13. **Solution.** 曲面面积为

$$S = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} \, dx \, dy.$$

由于 $z = xy$, 故

$$z_x = y, \quad z_y = x.$$

所以

$$S = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1+x^2+y^2} \, dx \, dy.$$

用极坐标代换,

$$S = 2\pi \int_0^1 r \sqrt{1+r^2} \, dr = \frac{2\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$

14. **Solution.** 绕 z 轴旋转后得到椭球体

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{2} \leq 1.$$

对固定 z , 截面是圆

$$x^2 + y^2 \leq 1 - \frac{z^2}{2},$$

因而

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} z^2 \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} z^2 \, dz \iint_{x^2+y^2 \leq 1-\frac{z^2}{2}} dx \, dy \\ &= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} z^2 \left(1 - \frac{z^2}{2} \right) dz = \frac{8\sqrt{2}\pi}{15}. \end{aligned}$$

15. **Solution.** 上半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 上满足 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R$, 因此

$$I = \frac{1}{R} \iint_S (x^2 + y^2) \, dy \, dz + z \, dx \, dy.$$

记 S' 为 $x^2 + y^2 \leq R^2, z = 0$ 取下侧, $\Sigma = S \cup S'$, 则

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{R} \left(\oint_{\Sigma} (x^2 + y) \, dy \, dz + z \, dx \, dy - \iint_{S'} (x^2 + y) \, dy \, dz + z \, dx \, dy \right) \\ &= \frac{1}{R} \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \\ z \geq 0}} (2x+1) \, dx \, dy \, dz \\ &= \frac{1}{R} \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \\ z \geq 0}} dx \, dy \, dz = \frac{2\pi R^2}{3}. \end{aligned}$$

16. **Solution.** 令 $y = x^2$, 则级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} y^n$.

用比值判别法,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{(n+1)(2n+1)} = 0, \end{aligned}$$

故级数关于 y 的收敛半径为 $R_y = +\infty$, 关于 x 的收敛半径也为 $R_x = +\infty$, 即收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

下面求和函数 $S(x)$.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}.$$

其中

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{2n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n-1)!} = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} = x^2 e^{x^2}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} - 1 = e^{x^2} - 1. \end{aligned}$$

所以

$$S(x) = (2x^2 + 1)e^{x^2} - 1.$$

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. **Solution.** 记

$$P(x, y) = (-xe^x + f''(x))y, \quad Q(x, y) = f(x).$$

由曲线积分与路径无关得 $P_y = Q_x$, 即

$$-xe^x + f''(x) = f'(x).$$

于是

$$f''(x) - f'(x) = xe^x.$$

上述方程对应的齐次微分方程的特征方程为 $r^2 - r = 0$, 其根为 $r = 0$ 和 $r = 1$,

因此齐次方程的通解为 $y = C_1 + C_2 e^x$.

$r = 1$ 是该特征方程的单根, 故可设非齐次方程的特解为 $f^*(x) = x(ax + b)e^x$,

代入得 $(2ax + 2a + b)e^x = xe^x$, 比较系数可得 $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$, 因此非齐次方程的通解为

$$f(x) = C_1 + C_2 e^x + \left(\frac{1}{2}x - 1\right) x e^x.$$

将 $f(0) = 4$, $f'(0) = 3$ 代入可得 $\begin{cases} C_1 + C_2 = 4, \\ C_2 - 1 = 3 \end{cases}$, 解得 $C_1 = 0$, $C_2 = 4$, 因此

$$f(x) = 4e^x + \left(\frac{1}{2}x - 1\right) x e^x.$$

18. **Solution.** 在区域内部令 $\begin{cases} f_x = 2x = 0, \\ f_y = -2y = 0 \end{cases}$, 解得唯一驻点 $(0, 0)$, 且 $f(0, 0) = 2$.

在边界 $4x^2 + y^2 = 4$ 上有 $y^2 = 4 - 4x^2$, 代入原函数得

$$f = x^2 - (4 - 4x^2) + 2 = 5x^2 - 2, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

所以边界上最大值为 3, 最小值为 -2. 比较可知 $f(x, y)$ 在区域 D 上的最大值为 3, 最小值为 -2.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. **Proof.** 法一. 记 $f(x)$ 的一个原函数为

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

则 $F(0) = 0$, $F(1) = A$. 因此

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy &= \int_0^1 f(x) (F(1) - F(x)) dx \\ &= A \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 F(x) dF(x) \\ &= A^2 - \frac{1}{2} F^2(x) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} A^2. \end{aligned}$$

法二. 交换积分次序, 有

$$\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy = \int_0^1 dy \int_0^y f(x)f(y) dx.$$

将右端的积分变量 x, y 对换, 得

$$\int_0^1 dy \int_0^y f(x)f(y) dx = \int_0^1 dx \int_0^x f(x)f(y) dy.$$

所以

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy + \int_0^1 dx \int_0^x f(x)f(y) dy \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^1 f(x)f(y) dy \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 f(x) dx \right) \left(\int_0^1 f(y) dy \right) = \frac{1}{2} A^2. \end{aligned}$$

法三. 记

$$I = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy.$$

由于被积函数 $f(x)f(y)$ 关于 x, y 对称,

积分区域 $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y \leq 1\}$ 与 $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ 面积相同且无公共内点, 因此

$$I = \int_0^1 dy \int_y^1 f(y)f(x) dx = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x)f(y) dx.$$

将两个积分相加, 并合并积分区域为正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$, 得

$$2I = \iint_{[0,1]^2} f(x)f(y) dx dy = \left(\int_0^1 f(x) dx \right) \left(\int_0^1 f(y) dy \right) = A \cdot A = A^2.$$

因此

$$I = \frac{1}{2} A^2.$$

20. **Proof.** 由递推关系 $2a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n^2 + u_n}$ 可得

$$u_n = 4a_{n+1}(a_{n+1} - a_n).$$

由 $a_{n+1} = \frac{1}{2} (a_n + \sqrt{a_n^2 + u_n})$ 可得 $a_{n+1} \geq a_n$, 又 a_n 有上界, 所以 $\{a_n\}$ 收敛.

注意到

$$0 < \frac{u_n}{4} = a_{n+1}^2 - a_n a_{n+1} \leq a_{n+1}^2 - a_n^2,$$

因为 $\{a_n\}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}^2 - a_n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}^2 - a_1^2$ 收敛,

由正项级数的比较判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

CHAPTER 7

2021-2022 学年微积分（一）（下）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 微分方程 $y'' + y = x^2 + 1 + \sin x$ 的待定特解形式可设为 () .

- A. $y^* = ax^2 + bx + c + x(A \sin x + B \cos x)$ B. $y^* = ax^2 + bx + c + A \sin x$
C. $y^* = x(ax^2 + bx + c + A \sin x + B \cos x)$ D. $y^* = ax^2 + bx + c + A \cos x$

2. 在下列极限结果中, 正确的是 () .

- A. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0$ B. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$
C. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x + y} = 0$ D. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x + y} = 0$

3. 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 则 $F'(2)$ 等于 () .

- A. $2f(2)$ B. $f(2)$
C. $-f(2)$ D. 0

4. 设曲线 $L: f(x, y) = 1$ ($f(x, y)$ 具有一阶连续偏导数), 过第 II 象限内的点 M 和第 IV 象限内的点 N , T 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧, 则下列积分小于零的是 () .

- A. $\int_T f(x, y) ds$
B. $\int_T f(x, y) dx$
C. $\int_T f(x, y) dy$
D. $\int_T f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy$

5. 设 L 为空间曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, 则 $\oint_L x^2 ds = ()$.

A. 0

B. $2\pi a^3$ C. $\frac{1}{3}\pi a^2$ D. $\frac{2}{3}\pi a^3$

6. 设两个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则 () .

A. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛

B. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散

C. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛

D. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. 经过点 $A(1, -2, 3)$ 并且包含 x 轴的平面方程为 _____.

8. 设向量场 $\mathbf{A} = x^2 \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + zx \mathbf{k}$, 则 $\text{rot} \mathbf{A} \Big|_{(1,1,2)} =$ _____.

9. $u = xe^y z^3$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的全微分 $du =$ _____.

10. 若将函数 $f(x) = \pi - x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 展开成正弦级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, 则系数 b_4 的值为 _____.

3 基本计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 设方程组 $\begin{cases} u + v = x, \\ u^2 + v^2 = y \end{cases}$ 确定隐函数 $u = u(x, y), v = v(x, y)$, 且 $u \neq v$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$.

12. 设 $\mathbf{n}$ 是曲面 $S: z = x^2 + y^2$ 在点 $P_0(1, 1, 2)$ 处指向上侧的法向量, 求函数 $u = xz^3 - 3yz$ 在点 P_0 处沿方向 $\mathbf{n}$ 的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$.

13. 计算 $I = \iint_D \max\{xy, 1\} dx dy$, 其中 D 是正方形区域 $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$.

14. 计算 $I = \iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) dS$, 其中 Σ 为 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所截得的有限部分.

15. 设 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ($R > 0$) 的外侧, 求 $I = \iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z dx dy$.

16. 确定幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$ 的收敛域并求其和函数 $S(x)$.

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^x$, 求非齐次方程 $y'' + ay' + by = x$ 满足条件 $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$ 的解.

18. 求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2$ 在区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ 上的最大值和最小值.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - (-1)^n}$ 是条件收敛的.

20. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有一阶连续导数, L 是上半平面 ($y > 0$) 内的有向分段光滑曲线, 其始点为 (a, b) , 终点为 (c, d) . 记 $I = \int_L \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy$, (1) 证明曲线积分 I 与路径 L 无关; (2) 当 $ab = cd$ 时, 求 I 的值.

CHAPTER 8

2021-2022 学年微积分（一）（下）期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. **Solution.** A.

方程对应的齐次方程 $y'' + y = 0$ 的特征方程 $r^2 + 1 = 0$ 有两个单根 $r = i, -i$, 所以齐次方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

对于非齐次项 $x^2 + 1$, 特解可以设为 $y_1 = ax^2 + bx + c$;

对于非齐次项 $\sin x$, 由于 $\lambda = i$ 是特征方程的根, 所以特解可以设为 $y_2 = x(A \sin x + B \cos x)$,

由解的叠加原理, 非齐次方程的特解可以设为

$$y^* = ax^2 + bx + c + x(A \sin x + B \cos x).$$

2. **Solution.** B.

对于 A 选项, 当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 且 $y = x$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$;

当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 且 $y = -x$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$, 所以 A 选项错误;

对于 B 选项, 因为

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq |y|,$$

所以由夹逼准则可知 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$, 所以 B 选项正确;

对于 C 选项, 当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 且 $y = x^2 - x$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - x)}{x^2} = -1$;

当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 且 $y = x$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x} = 0$, 所以 C 选项错误;

对于 D 选项, 当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 且 $y = x^3 - x$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x^3 - x)}{x^3} = -1$;

当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 且 $y = x$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{2x} = 0$, 所以 D 选项错误.

3. **Solution.** B.

先交换积分顺序

$$F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx = \int_1^t dx \int_1^x f(x) dy = \int_1^t (x-1)f(x) dx.$$

因而

$$F'(t) = (t-1)f(t),$$

所以

$$F'(2) = f(2).$$

4. **Solution.** C.

因为在曲线 $L: f(x, y) = 1$ 上恒有 $f(x, y) = 1$, 故

$$\int_T f(x, y) dy = \int_T dy = y_N - y_M < 0,$$

其中因 M 在第二象限、 N 在第四象限, 所以 $y_N < y_M$.

5. **Solution.** D.

交线 L 是球面与过原点平面相交得到的大圆, 因此半径为 a . 由对称性可知

$$\oint_L x^2 ds = \oint_L y^2 ds = \oint_L z^2 ds.$$

又

$$\oint_L (x^2 + y^2 + z^2) ds = a^2 \oint_L ds = a^2 \cdot 2\pi a = 2\pi a^3.$$

三者相等, 所以

$$\oint_L x^2 ds = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

6. **Solution.** C.

对于 A 选项, 令 $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,

但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 所以 A 选项错误;

对于 B 选项, 令 $a_n = b_n = \frac{1}{n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散,

但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 所以 B 选项错误;

对于 C 选项, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则对于充分大的 N_1 , 当 $n > N_1$ 时, 有 $|a_n| < 1$;

且 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛, 根据级数收敛的必要条件可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 0$,

于是同理存在充分大的 N_2 , 当 $n > N_2$ 时, 有 $|b_n| < 1$, 所以当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时, $a_n^2 b_n^2 \leq b_n^2 \leq |b_n|$,

由比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛, 所以 C 选项正确;

对于 D 选项, 令 $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散,

但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 所以 D 选项错误.

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. **Solution.** $3y + 2z = 0$.

由于所求平面向量包含 x 轴, 所以它含有方向向量 $(1, 0, 0)$. 又它经过点 $A(1, -2, 3)$, 故还含有向量 $(1, -2, 3)$.

两向量叉积可取法向量

$$(1, 0, 0) \times (1, -2, 3) = (0, -3, -2),$$

所以平面方程为

$$3y + 2z = 0.$$

8. **Solution.** $-i - 2j$.

$$\mathbf{A} = (x^2, yz, zx),$$

因而

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & yz & zx \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(zx)}{\partial y} - \frac{\partial(yz)}{\partial z}, \frac{\partial(x^2)}{\partial z} - \frac{\partial(zx)}{\partial x}, \frac{\partial(yz)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2)}{\partial y} \right) \\ &= (-y, -z, 0). \end{aligned}$$

在 $(1, 1, 2)$ 处取值即得

$$-i - 2j.$$

9. **Solution.** $e dx + e dy + 3e dz$.

$$u = xe^y z^3, \quad u_x = e^y z^3, \quad u_y = xe^y z^3, \quad u_z = 3xe^y z^2.$$

在 $(1, 1, 1)$ 处有 $u_x = u_y = e$, $u_z = 3e$, 故

$$du = e dx + e dy + 3e dz.$$

10. **Solution.** $\frac{1}{2}$.

由

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi - x) \sin nx \, dx,$$

当 $n = 4$ 时

$$\begin{aligned}
 b_4 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi - x) \sin 4x \, dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin 4(\pi - x) \, dx \\
 &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin 4x \, dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[x \cos 4x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos 4x \, dx \right] = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

3 基本计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. **Solution.** 对方程组 $\begin{cases} u + v = x, \\ u^2 + v^2 = y \end{cases}$ 关于 x 求偏导, 得

$$\begin{cases} u_x + v_x = 1, \\ 2uu_x + 2vv_x = 0. \end{cases}$$

解得

$$u_x = \frac{v}{v-u}, \quad v_x = -\frac{u}{v-u}.$$

12. **Solution.** 曲面写成

$$z - x^2 - y^2 = 0,$$

所以上侧法向量可取

$$\mathbf{n} = (-2x, -2y, 1).$$

在 $P_0(1, 1, 2)$ 处,

$$\mathbf{n} = (-2, -2, 1), \quad \mathbf{n}_0 = \frac{1}{3}(-2, -2, 1).$$

又

$$u = xz^3 - 3yz, \quad \nabla u = (z^3, -3z, 3xz^2 - 3y),$$

所以

$$\nabla u(P_0) = (8, -6, 9).$$

因而方向导数为

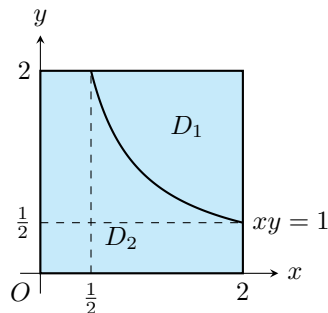
$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{P_0} = \nabla u(P_0) \cdot \mathbf{n}_0 = \frac{-16 + 12 + 9}{3} = \frac{5}{3}.$$

13. **Solution.** 如图, 按曲线 $xy = 1$ 将区域 D 分为 $D_1 = \{(x, y) \in D \mid xy \geq 1\}$ 和 $D_2 = \{(x, y) \in D \mid xy < 1\}$. 当 $xy < 1$ 时 $\max\{xy, 1\} = 1$, 当 $xy \geq 1$ 时 $\max\{xy, 1\} = xy$. 故

$$I = \iint_{D_1} xy \, dx \, dy + \iint_{D_2} dx \, dy.$$

逐段积分得

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\frac{1}{2}}^2 x \, dx \int_{\frac{1}{x}}^2 y \, dy + \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_0^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_0^{\frac{1}{x}} dy \\
 &= \frac{19}{4} + \ln 2.
 \end{aligned}$$



14. **Solution.** 曲面 $\Sigma: z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 关于 xOz 面对称, 而 xy 与 yz 都关于 y 为奇函数, 因此

$$\iint_{\Sigma} xy \, dS = \iint_{\Sigma} yz \, dS = 0.$$

从而

$$I = \iint_{\Sigma} zx \, dS.$$

投影到 xOy 面, 因

$$z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

所以

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy = \sqrt{2} \, dx \, dy.$$

用极坐标 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 区域为

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 2a \cos \theta.$$

又 $z = r$, 故

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} r^3 \cos \theta \, dr \\ &= 4\sqrt{2}a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta \, d\theta = 8\sqrt{2}a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta \, d\theta \\ &= 8\sqrt{2}a^4 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{64\sqrt{2}}{15} a^4. \end{aligned}$$

15. **Solution.** 由 Gauss 公式可得

$$I = \iiint_V \left(\frac{\partial x^3}{\partial x} + \frac{\partial y^3}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dv = \iiint_V (3x^2 + 3y^2 + 1) dv.$$

再利用球域的轮换对称性,

$$\iiint_V (3x^2 + 3y^2) dv = 2 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dv.$$

因而

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi \, d\varphi \int_0^R r^4 \, dr + \frac{4}{3} \pi R^3 \\ &= \frac{8\pi R^5}{5} + \frac{4\pi R^3}{3}. \end{aligned}$$

16. **Solution.** 用比值判别法, 令 $a_n = \frac{n}{n+1}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)}{(n+2)} \cdot \frac{n+1}{n} \right| = 1,$$

因此级数的收敛半径为 1. 当 $x = 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \neq 0$, 所以级数发散;

当 $x = -1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} (-1)^n$ 不存在, 所以级数发散. 故级数的收敛域为 $(-1, 1)$.

当 $x = 0$ 时, $S(0) = 0$. 当 $-1 < x < 1$ 时,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \\ &= \frac{x}{1-x} - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^n dt \\ &= \frac{x}{1-x} - \frac{1}{x} \int_0^x \frac{t}{1-t} dt \\ &= \frac{x}{1-x} - \frac{1}{x} [-x - \ln(1-x)] = \frac{x}{1-x} + 1 + \frac{\ln(1-x)}{x}.\end{aligned}$$

$$\text{综上所述, } S(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{x}{1-x} + 1 + \frac{\ln(1-x)}{x}, & -1 < x < 1. \end{cases}$$

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. **Solution.** 由齐次方程通解

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x$$

可知特征方程有二重根 $r = 1$, 于是

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

因而原非齐次方程为

$$y'' - 2y' + y = x.$$

设特解为 $y^* = Ax + B$, 代入得

$$Ax + B - 2A = x,$$

比较系数得 $A = 1, B = 2$. 所以通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + x + 2.$$

由条件

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$$

解得 $C_1 = 0, C_2 = -1$. 因而

$$y = -xe^x + x + 2.$$

18. **Solution.** 在区域内部, 令

$$\begin{cases} f_x = 2x(1 - y^2) = 0, \\ f_y = 2y(2 - x^2) = 0, \end{cases}$$

解得驻点为 $(0, 0), (\pm\sqrt{2}, 1)$, 其函数值分别为

$$f(0, 0) = 0, \quad f(\pm\sqrt{2}, 1) = 2.$$

边界分两部分考察. 当 $y = 0$ 时, $f(x, 0) = x^2, -2 \leq x \leq 2$, 所以最小值为 0, 最大值为 4.

当 $x^2 + y^2 = 4$ 时, 代入 $y^2 = 4 - x^2$ 得 $f = x^4 - 5x^2 + 8 = \left(x^2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$, $-2 \leq x \leq 2$,

所以最小值为 $\frac{7}{4}$, 最大值为 8.

比较边界与内部函数值, 得全区域上

$$\max f = 8, \quad \min f = 0.$$

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. **Proof.** 设

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n - (-1)^n}.$$

先看绝对收敛性. 注意到

$$|a_n| = \frac{1}{n - (-1)^n} \sim \frac{1}{n} \quad (n \rightarrow \infty),$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散. 当 $n \geq 2$ 时, 设

$$a_n = \frac{(-1)^n (n + (-1)^n)}{(n - (-1)^n)(n + (-1)^n)} = (-1)^n \frac{n}{n^2 - 1} + \frac{1}{n^2 - 1} = u_n + v_n,$$

其中 $u_n = (-1)^n \frac{n}{n^2 - 1}$ 由 Leibniz 判别法可知收敛, $v_n = \frac{1}{n^2 - 1} \sim \frac{1}{n^2}$ 也收敛.

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛.

20. **Proof.** 记

$$P(x, y) = \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)], \quad Q(x, y) = \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1].$$

直接计算得

$$P_y = f(xy) - \frac{1}{y^2} + xyf'(xy), \quad Q_x = f(xy) - \frac{1}{y^2} + xyf'(xy),$$

即 $P_y = Q_x$. 因而在上半平面 $y > 0$ 内该积分与路径无关.

下面求势函数 $\Phi(x, y)$. 设 $F'(t) = f(t)$, 由

$$\Phi_x = P(x, y) = \frac{1}{y} + yf(xy)$$

对 x 积分, 得

$$\Phi(x, y) = \int \left(\frac{1}{y} + yf(xy) \right) dx = \frac{x}{y} + F(xy) + \varphi(y),$$

其中 $\varphi(y)$ 只与 y 有关. 再对 y 求偏导,

$$\Phi_y = -\frac{x}{y^2} + xf(xy) + \varphi'(y).$$

与

$$Q(x, y) = xf(xy) - \frac{x}{y^2}$$

比较可得 $\varphi'(y) = 0$, 故可取

$$\Phi(x, y) = \frac{x}{y} + F(xy).$$

因而

$$I = \Phi(c, d) - \Phi(a, b) = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} + F(cd) - F(ab).$$

当 $ab = cd$ 时, 最后两项相消, 所以

$$I = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}.$$

CHAPTER 9

2020-2021 学年微积分（一）（下）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2x - 2e^x$ 的特解 y^* 的形式是 () .

A. $y^* = (Ax + B)e^x$

B. $y^* = x(Ax + B)e^x$

C. $y^* = Ax + B + Ce^x$

D. $y^* = Ax + B + Cxe^x$

2. 设曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2, \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, 点 $M(1, -1, 0)$, 则在点 M 处下列说法**不正确**的是 () .

A. 切向量为 $(-2, -2, 4)$

B. 切向量为 $(-2, 2, 4)$

C. 切线方程为 $x - 1 = y + 1 = -\frac{z}{2}$

D. 法平面方程为 $x + y - 2z = 0$

3. 函数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 $(0, 0)$ 处 () .

A. 可微

B. 偏导数存在

C. 连续

D. 不连续

4. 已知函数 f 连续, 则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r dr = ()$.

A. $\int_0^2 dx \int_0^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y)dy$

B. $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)dy$

C. $\int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y)dx$

D. $\int_0^2 dx \int_0^2 f(x, y)dy$

5. 设 $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, $I = \oint_{\Gamma} x ds$, $J = \oint_{\Gamma} y ds$, $K = \oint_{\Gamma} z^2 ds$. 以下说法中正确的是 () .

A. $K = 0$

B. I, J, K 中有两个等于 0

C. I, J, K 都等于 0

D. I, J, K 全都不等于 0

6. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数且 $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ \pi - x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$, $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数是 $S(x)$. 以下说法中正确的是 ().

A. $S(x)$ 处处连续

B. $S(x) \equiv f(x)$

C. $S(-1) = 0$

D. $S(0) = \pi$

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. 直线 $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1}$ 与平面 $x - y + 2z + 4 = 0$ 的夹角是 _____.

8. 设 $P_0(1, 1, -1)$, $P_1(2, -1, 0)$, 则 $u = x + y^2 + z^3$ 在 P_0 处沿 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 方向的方向导数为 _____.

9. 若 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 确定, 则 $z_x(0, 0) =$ _____.

10. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ ($-\infty < x < \infty$) 的和函数为 _____.

3 基本计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 求微分方程 $x \frac{dy}{dx} = y \ln \frac{y}{x}$ 的通解.

12. 已知函数 $z = f(xy, yg(x))$, 其中 f 有二阶连续偏导数, g 可导, 求 z_x , z_{xy} .

13. 计算二次积分 $I = \int_1^3 dx \int_{x-1}^2 \sin y^2 dy$.

14. 求三重积分 $I = \iiint_V (x^3 + y^2 + z) dv$, 其中 V 为 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $a > 0$.

15. 求 $I = \iint_S (z^2 + x) dy dz - z dx dy$, 其中 S 是 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ($0 \leq z \leq 2$) 下侧.

16. 将 $f(x) = \arctan x$ 展开为 Maclaurin 级数, 并求 $f^{(20)}(0)$, $f^{(21)}(0)$.

4 应用题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 求 $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ 的极值.

18. 已知曲线积分 $\int_L yf(x) \mathrm{d}x + [f(x) - x^2] \mathrm{d}y$ 与路径无关, 其中 $f(x)$ 有一阶连续导数, 且 $f(0) = 1$, 求 $f(x)$ 和 $I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} yf(x) \mathrm{d}x + [f(x) - x^2] \mathrm{d}y$ 的值.

5 综合题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 设 $D: x^2 + y^2 \leq 1$, 证明不等式: $\iint_D \sin \sqrt{(x^2 + y^2)^3} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \leq \frac{2}{5} \pi$.

20. 设 $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(x)$ 在原点的邻域内有界, 证明: $\alpha > \frac{1}{2}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(f\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) - 1 \right)$ 绝对收敛.

CHAPTER 10

2020-2021 学年微积分（一）（下）期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. **Solution.** D.

方程对应的齐次方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的特征方程为

$$r^2 - 3r + 2 = (r - 1)(r - 2) = 0,$$

有两个不同的实根 $r_1 = 1$, $r_2 = 2$.

对于非齐次项 $2x$, 因为 $\lambda = 0$ 不是特征方程的根, 所以可以设特解为 $y_1^* = Ax + B$.

对于非齐次项 $-2e^x$, 因为 $\lambda = 1$ 是特征方程的根, 所以可以设特解为 $y_2^* = Cxe^x$.

由解的叠加原理, 非齐次方程的特解可以设为

$$y^* = y_1^* + y_2^* = Ax + B + Cxe^x.$$

2. **Solution.** B.

两曲面的法向量分别为

$$\nabla(x^2 + y^2 + z^2) = (2x, 2y, 2z), \quad \nabla(x + y + z) = (1, 1, 1).$$

在 $M(1, -1, 0)$ 处取值得

$$\mathbf{n}_1 = (2, -2, 0), \quad \mathbf{n}_2 = (1, 1, 1).$$

因而曲线的切向量可取作

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (2, -2, 0) \times (1, 1, 1) = (-2, -2, 4),$$

所以 A、C、D 都正确, 而 B 不是切向方向.

3. **Solution.** C.

因为

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0, \\ \theta \in [0, 2\pi]}} r \equiv 0,$$

所以函数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在 $(0, 0)$ 处连续. 又因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

极限不存在, 所以偏导数不存在, 更不可微.

4. **Solution.** C.

极坐标区域为

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 2 \sin \theta,$$

即第一象限内圆

$$x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$$

的部分. 改写成直角坐标可得

$$0 \leq y \leq 2, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{2y - y^2},$$

故选 C.

5. **Solution.** B.

由对称性可知

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} x \, ds &= \oint_{\Gamma} y \, ds = \oint_{\Gamma} z \, ds = \frac{1}{3} \oint_{\Gamma} (x + y + z) \, ds = 0, \\ \oint_{\Gamma} z^2 \, ds &= \oint_{\Gamma} y^2 \, ds = \oint_{\Gamma} x^2 \, ds = \frac{1}{3} \oint_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) \, ds = \frac{1}{3} \oint_{\Gamma} ds \neq 0. \end{aligned}$$

所以恰有两个积分为零.

6. **Solution.** C.

傅里叶级数在连续点收敛到原函数值, 在跳跃点收敛到左右极限平均值. 因为 $-1 \in (-\pi, 0)$, 故

$$S(-1) = f(-1) = 0.$$

而

$$S(0) = \frac{0 + \pi}{2} = \frac{\pi}{2} \neq \pi.$$

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. **Solution.** $\frac{\pi}{6}$.

直线方向向量为 $(2, 1, 1)$, 平面法向量为 $(1, -1, 2)$. 设夹角为 θ , 则

$$\sin \theta = \frac{|(2, 1, 1) \cdot (1, -1, 2)|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2}.$$

所以

$$\theta = \frac{\pi}{6}.$$

8. **Solution.** 0.

$$\nabla u = (1, 2y, 3z^2),$$

在 $P_0(1, 1, -1)$ 处为 $(1, 2, 3)$. 又

$$\overrightarrow{P_0 P_1} = (1, -2, 1),$$

二者点积为 0, 故方向导数为 0.

9. **Solution.** $-\frac{1}{3}$.

对方程

$$e^{x+2y+3z} + xyz = 1$$

两边关于 x 求偏导, 得

$$e^{x+2y+3z}(1 + 3z_x) + yz + xy z_x = 0.$$

在 $(0, 0)$ 处有 $z = 0$, 从而有

$$1 + 3z_x(0, 0) = 0, \quad z_x(0, 0) = -\frac{1}{3}.$$

10. **Solution.** $\cos x$.

注意到 $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, 两端求导得

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

3 基本计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. **Solution.** 令

$$u = \frac{y}{x}, \quad y = ux.$$

则

$$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}.$$

原方程化为

$$x \left(u + x \frac{du}{dx} \right) = ux \ln u,$$

即

$$x \frac{du}{dx} = u(\ln u - 1).$$

分离变量并积分得

$$\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln |\ln u - 1| = \ln |x| + C,$$

即

$$\ln \frac{y}{x} = Cx + 1.$$

12. **Solution.** 记

$$u = xy, \quad v = yg(x),$$

则 $z = f(u, v)$. 由链式法则

$$z_x = f'_1 u_x + f'_2 v_x = y(f'_1 + g'(x)f'_2).$$

再对 y 求偏导, 得

$$z_{xy} = f'_1 + g'(x)f'_2 + y[xf''_{11} + (g(x) + xg'(x))f''_{12} + g'(x)g(x)f''_{22}].$$

13. **Solution.** 原积分区域为

$$1 \leq x \leq 3, \quad x - 1 \leq y \leq 2.$$

交换积分次序后可写成

$$0 \leq y \leq 2, \quad 1 \leq x \leq y + 1.$$

因而

$$I = \int_0^2 dy \int_1^{y+1} \sin y^2 dx = \int_0^2 y \sin y^2 dy.$$

令 $t = y^2$, 则

$$I = \frac{1}{2} \int_0^4 \sin t dt = \frac{1}{2}(1 - \cos 4).$$

14. **Solution.** 由对称性知

$$\iiint_V x^3 dv = \iiint_V z dv = 0,$$

所以

$$I = \iiint_V y^2 dv = \frac{1}{3} \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dv.$$

用球坐标代换,

$$I = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^a \rho^4 d\rho = \frac{4\pi a^5}{15}.$$

15. **Solution.** 将 S 与上盖面

$$S_1: z = 2, \quad x^2 + y^2 \leq 4$$

补成闭曲面, 其所围区域记为 V . 因 S 取下侧, 为闭曲面的外侧方向, 因而 S_1 取上侧.

由 Gauss 公式可得

$$\begin{aligned} I &= \oiint_{S+S_1} (z^2 + x) dy dz - z dx dy - \iint_{S_1} (z^2 + x) dy dz - z dx dy \\ &= \iiint_V (1 - 1) dv + 2 \iint_{x^2+y^2 \leq 4} dx dy \\ &= 8\pi. \end{aligned}$$

16. **Solution.** 由

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (|x| < 1)$$

两端积分, 得

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad |x| \leq 1.$$

比较 Maclaurin 展开系数可知

$$f^{(20)}(0) = 0, \quad f^{(21)}(0) = 20!.$$

4 应用题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. **Solution.** 令 $\begin{cases} f_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0, \\ f_y = 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{cases}$ 可得驻点

$$(0, 0), (1, 1), (-1, -1).$$

再由

$$f_{xx} = 12x^2 - 2, \quad f_{yy} = 12y^2 - 2, \quad f_{xy} = -2$$

可知在 $(1, 1)$ 和 $(-1, -1)$ 处 $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$, 所以 $(1, 1)$ 和 $(-1, -1)$ 是 f 的极小值点, 极小值为

$$f(1, 1) = f(-1, -1) = -2.$$

对于驻点 $(0, 0)$, 令 $y = x$, 则 $f(x, y) = 2x^4 - 4x^2 = 2x^2(x^2 - 2)$, 当 $|x| > 0$ 充分小时有 $f(x, y) < 0$;

再令 $y = -x$, 则 $f(x, y) = 2x^4$, 当 $|x| > 0$ 充分小时有 $f(x, y) > 0$,

这意味着在 $(0, 0)$ 的任意邻域内, $f(x, y)$ 既能取到正值也能取到负值,

因此 $f(0, 0) = 0$ 既不是极小值也不是极大值.

18. **Solution.** 记

$$P(x, y) = yf(x), \quad Q(x, y) = f(x) - x^2.$$

由路径无关得

$$P_y = Q_x,$$

即

$$f'(x) - f(x) = 2x.$$

解得

$$f(x) = Ce^x - 2x - 2.$$

再由 $f(0) = 1$ 得 $C = 3$, 故

$$f(x) = 3e^x - 2x - 2.$$

取折线路径 $(0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (1, 1)$, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_{(0,0)}^{(1,0)} yf(x) dx + \int_{(1,0)}^{(1,1)} (3e^x - 2x - 2 - x^2) dy \\ &= (3e - 5) \int_0^1 dy \\ &= 3e - 5. \end{aligned}$$

5 综合题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. **Proof.** 用极坐标代换,

$$\iint_D \sin \sqrt{(x^2 + y^2)^3} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sin(r^3) r dr = 2\pi \int_0^1 r \sin(r^3) dr.$$

由 $\sin t \leq t$ ($t \geq 0$) 得

$$2\pi \int_0^1 r \sin(r^3) dr \leq 2\pi \int_0^1 r \cdot r^3 dr = 2\pi \int_0^1 r^4 dr = \frac{2\pi}{5}.$$

于是原不等式成立.

20. **Proof.** 因 $f''(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内有界, 设

$$|f''(x)| \leq M \quad (|x| < 1).$$

当 n 充分大时, $x_n = \frac{1}{n^\alpha} \in (-1, 1)$. 由 Taylor 公式可得

$$f(x_n) = f(0) + f'(0)x_n + \frac{f''(\theta_n x_n)}{2} x_n^2,$$

其中 $0 < \theta_n < 1$. 利用 $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ 得

$$f\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) - 1 = \frac{f''\left(\frac{\theta_n}{n^\alpha}\right)}{2n^{2\alpha}}.$$

所以

$$\left| f\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) - 1 \right| \leq \frac{M}{2n^{2\alpha}}.$$

当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}$ 收敛, 于是由比较判别法知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) - 1 \right|$$

收敛, 即原级数绝对收敛.

CHAPTER 11

2018-2019 学年微积分（一）（下）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 设 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 都是微分方程 $y'' + a(x)y' + b(x)y = x^2$ 的解, 则以下函数中也是该微分方程的解的是 () .

A. $y_1 + y_2 + y_3$

B. $\frac{3}{2}y_1 - y_2 + \frac{1}{2}y_3$

C. $y_1 - y_2$

D. $2y_3$

2. 以下函数在原点可微的是 () .

A. $z = x^2 + y^2$

B. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

C. $z = |x - y|$

D. $z = \sqrt{|xy|}$

3. 设 $F(x, y) = 0$ 是一条平面光滑曲线, 则以下说法中正确的是 () .

A. (F_x, F_y) 是该曲线的切向量

B. (F_y, F_x) 是该曲线的法向量

C. $(-F_y, F_x)$ 是该曲线的切向量

D. $(-F_x, F_y)$ 是该曲线的法向量

4. 设平面区域 D 由 $x^2 + y^2 \leq 1$ 表示, 区域 D_1 是 D 在第一象限的部分, 则 $\iint_D (xy + \cos x \sin y) \, d\sigma =$ () .

A. 0

B. $4 \iint_{D_1} xy \, d\sigma$

C. $4 \iint_{D_1} \cos x \sin y \, d\sigma$

D. $4 \iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) \, d\sigma$

5. 设区域 Ω 由 $z = x^2 + y^2$ 与 $z = 1$ 围成, $I = \iiint_{\Omega} f(z) \, dv$, 则以下表达式**错误**的是 ().

A. $I = \pi \int_0^1 z f(z) \, dz$

B. $I = 2\pi \int_0^1 r \, dr \int_{r^2}^1 f(z) \, dz$

C. $I = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^1 f(z) \, dz$

D. $I = 2\pi \int_0^1 f(z) \, dz \int_0^z r \, dr$

6. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则以下说法中正确的是 ().

A. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛

B. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 收敛

C. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. 微分方程 $y'' + 2y' + y = x + 2$ 的通解为_____.

8. 设 $z = f(x^2 + y^2, xy)$, 其中 f 有连续偏导数, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.

9. 设 $f(x, y, z) = x + y^3 + z^5$, 则 $\operatorname{div} \operatorname{grad} f =$ _____.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n3^n} =$ _____.

3 基本计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 求点 $A(1, 2, 3)$ 到直线 $L: \frac{x-6}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-2}$ 的距离.

12. 设方程组

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 + \ln z + z^3 = 1, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

在包含点 $(0, 0, 1)$ 的一个邻域上确定隐函数 $y = y(x), z = z(x)$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}, \left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=0}$.

13. 求函数 $f(x, y) = 4x + 2xy - x^2 - 3y^2$ 的极值.

14. 求 $I = \iiint_{\Omega} (x + y + z) \, dx \, dy \, dz$, 其中 Ω 是三坐标面与平面 $x + y + z = 1$ 所围成的四面体.

15. 求曲线积分 $I = \int_L (2xy - y^2 \cos x) \, dx + (x^2 - 2y \sin x) \, dy$, 其中曲线 L 沿抛物线 $y = \pi x - x^2 + 1$ 从 $A(0, 1)$ 到 $B(\pi, 1)$.

16. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-3)^n}{(2n-1)!!}$ 的敛散性, 若收敛指出是绝对收敛还是条件收敛, 并说明理由.

4 应用题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 求曲面 $z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 2$ 的面积.

18. 计算曲面积分 $I = \oint_S 3xz \, dy \, dz + yz \, dz \, dx - z^2 \, dx \, dy$, 其中 S 是曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 所围立体的表面外侧.

5 综合题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 设 L 是圆周曲线 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ (取正向), $f(x)$ 为正值连续函数. 证明:

$$\oint_L x f(y) \, dy - \frac{y}{f(x)} \, dx \geq 2\pi.$$

20. 证明: 当 $-\pi < x < \pi$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin nx}{n} = \frac{x}{2}$.

CHAPTER 12

2018-2019 学年微积分（一）（下）期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. **Solution.** B.

对于非齐次方程 $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$ 的解 y_1, y_2, y_3 ,
其线性组合 $c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3$ 也是该方程的解当且仅当

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1,$$

四个选项中只有 B 满足

$$\frac{3}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 1.$$

2. **Solution.** A.

对于 A 选项, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{z(x,y) - z(0,0) - z_x(0,0)x - z_y(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0,$

因此 $z = x^2 + y^2$ 在原点可微.

对于 B 选项, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{z(x,y) - z(0,0) - z_x(0,0)x - z_y(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1,$

因此 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在原点不可微.

对于 C 选项, 由于 $z(x,0) = |x|$, 显然 $z_x(0,0)$ 不存在, 更不可微.

对于 D 选项, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{z(x,y) - z(0,0) - z_x(0,0)x - z_y(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}},$

考察路径 $y = x$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|x^2|}}{\sqrt{2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; 再考察路径 $y = 0$, 上述极限值为 0,

因此 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 不存在, $z = \sqrt{|xy|}$ 在原点不可微.

3. **Solution.** C.

切向量可取作 $\left(1, \frac{dy}{dx}\right)$, 而由隐函数定理可知 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$,

因此切向量为 $\left(1, -\frac{F_x}{F_y}\right)$, 亦可取 $(-F_y, F_x)$. C 选项正确.

4. **Solution.** A.

已知区域 $D: x^2 + y^2 \leq 1$ 关于 x 轴、 y 轴均对称.

由于函数 xy 关于 x 或 y 都是奇函数, 而 $\cos x \sin y$ 关于 y 是奇函数, 所以

$$\iint_D xy \, d\sigma = 0, \quad \iint_D \cos x \sin y \, d\sigma = 0.$$

因此原积分为 0.

5. **Solution.** D.

由柱坐标可知

$$0 \leq r \leq 1, \quad r^2 \leq z \leq 1,$$

故

$$I = 2\pi \int_0^1 r \, dr \int_{r^2}^1 f(z) \, dz.$$

若先对 z 积分, 则 $0 \leq z \leq 1, 0 \leq r \leq \sqrt{z}$, 所以

$$I = 2\pi \int_0^1 f(z) \, dz \int_0^{\sqrt{z}} r \, dr = \pi \int_0^1 z f(z) \, dz.$$

因此 A、B 正确, C 是直角坐标写法, 也正确; D 中上限应为 $\sqrt{z}$, 故错误.

6. **Solution.** B.

对于 A、C 选项, 令 $a_n = \frac{1}{n}$, 则 $\sum a_n^2$ 收敛, 但 $\sum |a_n|$ 与 $\sum a_n$ 均发散.

对于 B 选项, $|a_n a_{n+1}| \leq \frac{a_n^2 + a_{n+1}^2}{2}$, 由比较判别法可知 $\sum a_n a_{n+1}$ 绝对收敛.

对于 D 选项, 令 $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, 则 $\sum a_n^2 = \sum \frac{1}{n^2}$ 收敛, 但 $\sum (-1)^n a_n = \sum \frac{1}{n}$ 发散.

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. **Solution.** $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + x$.

方程对应的齐次方程 $y'' + 2y' + y = 0$ 的特征方程为

$$r^2 + 2r + 1 = (r + 1)^2 = 0,$$

故齐次解为 $(C_1 + C_2 x)e^{-x}$. 由于 $\lambda = 0$ 不是特征方程的根, 所以可设特解为 $y^* = ax + b$, 代入得

$$ax + b + 2a = x + 2,$$

所以 $a = 1, b = 0$.

8. **Solution.** $2xf_1 + yf_2$.

记

$$u = x^2 + y^2, \quad v = xy,$$

则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1 u_x + f_2 v_x = 2xf_1 + yf_2.$$

9. **Solution.** $6y + 20z^3$.

因为

$$\operatorname{div} \mathbf{grad} f = \Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz},$$

而

$$f_{xx} = 0, \quad f_{yy} = 6y, \quad f_{zz} = 20z^3,$$

所以

$$\operatorname{div} \mathbf{grad} f = 6y + 20z^3.$$

10. **Solution.** $\ln 3$.

由

$$-\ln(1-t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} \quad (|t| < 1),$$

取 $t = \frac{2}{3}$, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n3^n} = -\ln\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \ln 3.$$

3 基本计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. **Solution.** 取直线 L 上一点 $B(6, 1, 6)$, 则 $\overrightarrow{AB} = \{5, -1, 3\}$, 直线的方向向量为 $\mathbf{s} = \{-1, 1, -2\}$.

因此所求距离

$$d = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|} = \frac{|\{-1, 7, 4\}|}{\sqrt{6}} = \sqrt{11}.$$

12. **Solution.** 方程组对 x 求导, 得

$$\begin{cases} 2x - 2 + 2yy' + \frac{z'}{z} + 3z^2z' = 0, \\ 1 + y' + z' = 0. \end{cases}$$

代入点 $(0, 0, 1)$ 得到

$$\begin{cases} -2 + 4z'(0) = 0, \\ 1 + y'(0) + z'(0) = 0. \end{cases}$$

解得

$$y'(0) = -\frac{3}{2}, \quad z'(0) = \frac{1}{2}.$$

13. **Solution.** 令

$$\begin{cases} f_x = 4 + 2y - 2x = 0, \\ f_y = 2x - 6y = 0. \end{cases}$$

解得唯一驻点 $(3, 1)$. 又

$$f_{xx} = -2, \quad f_{yy} = -6, \quad f_{xy} = 2, \quad \Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 8 > 0,$$

故 $f(x, y)$ 在 $(3, 1)$ 处取得极大值

$$f(3, 1) = 6.$$

14. **Solution.** 由轮换对称性可得

$$I = 3 \iiint_{\Omega} z \, dv.$$

用截面法, 对于固定的 z , 截面是底边为 $(1-z)$ 的等腰直角三角形, 面积为 $\frac{(1-z)^2}{2}$, 因此

$$\begin{aligned} I &= 3 \int_0^1 z \cdot \frac{(1-z)^2}{2} \, dz \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 z(1-z)^2 \, dz \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{2!}{4!} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

15. **Solution.** 设

$$P = 2xy - y^2 \cos x, \quad Q = x^2 - 2y \sin x,$$

则

$$P_y = Q_x = 2x - 2y \cos x,$$

所以积分与路径无关, 且

$$(2xy - y^2 \cos x) \, dx + (x^2 - 2y \sin x) \, dy = d(x^2 y - y^2 \sin x).$$

所以

$$I = (x^2 y - y^2 \sin x) \Big|_{(0,1)}^{(\pi,1)} = \pi^2.$$

16. **Solution.** 对正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)!!}$$

与

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n-1)!!}$$

分别用比值判别法,

$$\text{因 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(2n+1)!!} \cdot \frac{(2n-1)!!}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0 < 1, \text{ 所以 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)!!} \text{ 收敛};$$

$$\text{因 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{(2n+1)!!} \cdot \frac{(2n-1)!!}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2n+1} = 0 < 1, \text{ 所以 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n-1)!!} \text{ 收敛}.$$

$$\text{因此 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-3)^n}{(2n-1)!!} \text{ 绝对收敛}.$$

4 应用题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. **Solution.** 曲面面积元

$$dS = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy.$$

投影区域为 $D: x^2 + y^2 \leq 2$, 故

$$S = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r \sqrt{1 + 4r^2} \, dr = \frac{\pi}{6} (1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{13\pi}{3}.$$

18. **Solution.** 由 Gauss 公式,

$$I = \iiint_{\Omega} 2z \, dv.$$

用球坐标代换, 可得

$$I = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \, d\rho = \pi.$$

5 综合题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. **Proof.** 由 Green 公式, 得

$$\oint_L x f(y) \, dy - \frac{y}{f(x)} \, dx = \iint_D \left(f(y) + \frac{1}{f(x)} \right) \, dx \, dy,$$

由区域 $D: (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$ 的轮换对称性, 得

$$\iint_D f(y) \, dx \, dy = \iint_D f(x) \, dx \, dy.$$

又因 $f(x) > 0$, 有

$$f(x) + \frac{1}{f(x)} \geq 2.$$

从而

$$\begin{aligned} \oint_L x f(y) \, dy - \frac{y}{f(x)} \, dx &= \iint_D \left(f(x) + \frac{1}{f(x)} \right) \, dx \, dy \\ &\geq 2 \iint_D \, dx \, dy = 2\pi. \end{aligned}$$

20. **Proof.** 将函数 $f(x) = \frac{x}{2}$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上作 2π 周期延拓并展开为傅立叶级数. 由奇偶性知 $a_n = 0$, 而

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x}{2} \sin nx \, dx = -\frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} x \, d \cos nx = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

因此其正弦级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin nx}{n},$$

由 Dirichlet 收敛定理可得当 $-\pi < x < \pi$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin nx}{n} = \frac{x}{2}.$$

CHAPTER 13

2017-2018 学年微积分（一）（下）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 函数 $f(x, y) = |x| \cos y$ 在原点 $(0, 0)$ 处 () .

A. $f'_x(0, 0)$ 存在, $f'_y(0, 0)$ 存在

B. $f'_x(0, 0)$ 不存在, $f'_y(0, 0)$ 不存在

C. $f'_x(0, 0)$ 存在, $f'_y(0, 0)$ 不存在

D. $f'_x(0, 0)$ 不存在, $f'_y(0, 0)$ 存在

2. 设 $\Omega: \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$, 将

$$I = \iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \, dv$$

化为球坐标系下的逐次积分, 下列结果正确的是 () .

A. $I = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \, d\varphi \int_0^1 f(\rho) \rho^2 \, d\rho$

B. $I = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \, d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi}} f(\rho) \, d\rho$

C. $I = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \, d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi}} f(\rho) \rho^2 \, d\rho$

D. $I = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \, d\varphi \int_0^1 f(\rho) \, d\rho$

3. 设 $\Omega: 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, Ω_1 为 Ω 在第一卦限的部分区域, 则下面式子正确的是 () .

A. $\iiint_{\Omega_1} x \, dv = \iiint_{\Omega_1} z \, dv$

B. $\iiint_{\Omega_1} xy \, dv = \iiint_{\Omega_1} x^2 \, dv$

C. $\iiint_{\Omega} z \, dv = 0$

D. $\iiint_{\Omega} xy \, dv = 4 \iiint_{\Omega_1} xy \, dv$

4. 关于数项级数的敛散性, 下面说法正确的是 () .

A. 若正项级数 $\sum a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$

B. 若 $\sum a_n$ 收敛, 则 $\sum a_n^2$ 收敛

C. 若 $\sum (-1)^n a_n$ 收敛, 则 $\sum (a_{2n-1} - a_{2n})$ 收敛

D. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$, 则 $\sum a_n$ 收敛

5. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 对于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 以下结论正确的是 ().

A. 在 $x=1$ 处条件收敛

B. 在 $x=3$ 处发散

C. 在 $x=2$ 处绝对收敛

D. 在 $x=0$ 处条件收敛

6. 在 xOy 面上, 若积分

$$\int_L (2xe^{x^2}y^3 + ax \cos y) dx + (be^{x^2}y^2 - x^2 \sin y) dy$$

与路径无关, 则 ().

A. $a=2, b=-3$

B. $a=-2, b=3$

C. $a=-2, b=-3$

D. $a=2, b=3$

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. 函数 $u = \ln(xy^2z^3)$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的全微分 $du|_{(1,1,1)} =$ _____.

8. 设区域 $D: |x| + |y| \leq 1$, 则 $\iint_D (1-x)^2 dx dy =$ _____.

9. 设 $f(x) = x + 1, -\pi \leq x \leq \pi$, 将 $f(x)$ 展开成以 2π 为周期的傅立叶级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

则 $a_{2018} =$ _____.

10. 设向量函数 $\mathbf{F} = (x, y, z), \mathbf{G} = (y, z, x)$, 则 $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) =$ _____.

3 基本计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 求曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^2 + y^2 - 5z = 0 \end{cases}$$

在点 $P(1, 2, 1)$ 处的切线方程.

12. 设 $u = f(x + y^2, xy)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

13. 设 $x = r^2 \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ($r \neq 0$) 确定的隐函数为 $r = r(x, y)$, $\theta = \theta(x, y)$, 求 $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial \theta}{\partial x}$.

14. 求 $I = \int_L (x + y^2) \mathrm{d}s$, 其中 L 是圆弧 $y = \sqrt{1 - x^2}$ ($0 \leq x \leq 1$) 与 x 轴和 y 轴所围平面图形的整个边界.

15. 求 $I = \iint_S xy^2 \mathrm{d}y \mathrm{d}z + yz^2 \mathrm{d}z \mathrm{d}x + zx^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}y$, 其中 S 为 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$), 取上侧.

16. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}$ 的和函数, 并求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}$ 的和.

4 应用题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 已知函数 $u = \ln(xy^2z^3)$ 在椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6R^2$ ($R > 0$) 的第一卦限部分上存在最大值. 求出该最大值点, 并由此证明: 对任意正实数 a, b, c , 成立 $ab^2c^3 \leq \left(\frac{a+2b+3c}{6}\right)^6$.

18. 设 Ω 是由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 、柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 以及 xy 坐标面围成的空间区域. 求:

(1) Ω 的体积 V ;

(2) Ω 表面上锥面块的面积 S .

5 分析证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 计算曲线积分 $I = \oint_L \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2}$, 其中 L 是以 $(1, 0)$ 为圆心, 以 R ($R > 0, R \neq 1$) 为半径的圆周, 取逆时针方向.

20. 设 $f(x)$ 是区间 $[0, 1]$ 上的连续函数, 证明

$$\int_0^1 e^{f(x)} dx \int_0^1 e^{-f(x)} dx \geq 1.$$

CHAPTER 14

2017-2018 学年微积分（一）（下）期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. **Solution.** D.

由题意可知 $f(x, 0) = |x|$, 因此

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$$

极限不存在, 即 $f'_x(0, 0)$ 不存在. 又 $f(0, y) \equiv 0$, 所以

$$f'_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0$$

存在.

2. **Solution.** C.

在球坐标下, $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho$, 且 $dv = \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$. 区域条件

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$$

化为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\cos \varphi}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

$$\text{因此 } I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi}} f(\rho) \rho^2 d\rho = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi}} f(\rho) \rho^2 d\rho.$$

3. **Solution.** A.

Ω_1 是第一卦限中的单位球部分, 关于 x, y, z 轮换对称, 故

$$\iiint_{\Omega_1} x dv = \iiint_{\Omega_1} z dv.$$

而由对称性可知 $\iiint_{\Omega} z dv > 0$, $\iiint_{\Omega} xy dv = 0$.

4. **Solution.** C.

对于 A 选项, 令 $a_n = \frac{1}{n^2}$, 则 $\sum a_n$ 收敛, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{2 \ln n}{n}\right) = 1$.

对于 B 选项, 令 $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 则 $\sum a_n$ 收敛, 但 $\sum a_n^2 = \frac{1}{n}$ 发散.

对于 C 选项, 记 $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k$, 则

$$\sum_{k=1}^n (a_{2k-1} - a_{2k}) = -S_{2n}.$$

因为 $\sum (-1)^n a_n$ 收敛, 所以其偶数项部分和 S_{2n} 收敛, 从而 $\sum (a_{2n-1} - a_{2n})$ 收敛.

对于 D 选项, 令 $a_n = (-1)^{n-1}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = -1 < 1$, 但 $\sum a_n$ 发散.

5. **Solution.** B.

由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 可知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=2$ 处收敛但不绝对收敛, 因此收敛半径为 1.

当 $x=3$ 时, $|x-1|=2>1$, 级数发散.

6. **Solution.** D.

记

$$P = 2xe^{x^2}y^3 + ax \cos y, \quad Q = be^{x^2}y^2 - x^2 \sin y.$$

积分与路径无关要求 $P_y = Q_x$, 即

$$6xe^{x^2}y^2 - ax \sin y = 2bxe^{x^2}y^2 - 2x \sin y.$$

比较系数得 $b=3, a=2$.

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. **Solution.** $dx + 2dy + 3dz$.

因为

$$u = \ln x + 2 \ln y + 3 \ln z,$$

所以

$$du|_{(1,1,1)} = \frac{1}{x} dx + \frac{2}{y} dy + \frac{3}{z} dz \Big|_{(1,1,1)} = dx + 2dy + 3dz.$$

8. **Solution.** $\frac{7}{3}$.

区域 D 关于 y 轴对称, 故 $\iint_D x dx dy = 0$. 又 D 的面积为 2, 于是

$$\iint_D (1-x)^2 dx dy = 2 + \iint_D x^2 dx dy.$$

而

$$\iint_D x^2 \, dx \, dy = 4 \int_0^1 x^2 (1-x) \, dx = \frac{1}{3},$$

$$\text{故 } \iint_D (1-x)^2 \, dx \, dy = \frac{7}{3}.$$

9. **Solution.** 0.

当 $n \geq 1$ 时,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x+1) \cos nx \, dx.$$

其中 $x \cos nx$ 为奇函数, 积分为 0; $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = 0$, 故 $a_{2018} = 0$.

10. **Solution.** $x + y + z$.

先算

$$\mathbf{F} \times \mathbf{G} = (xy - z^2, yz - x^2, xz - y^2),$$

因而

$$\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = y + z + x = x + y + z.$$

3 基本计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. **Solution.** 两曲面的法向量分别为

$$\mathbf{n}_1 = (2x, 2y, 2z), \quad \mathbf{n}_2 = (2x, 2y, -5).$$

在 $P(1, 2, 1)$ 处,

$$\mathbf{n}_1 = (2, 4, 2), \quad \mathbf{n}_2 = (2, 4, -5).$$

曲线切向量可取作

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (-28, 14, 0) \sim (-2, 1, 0).$$

故切线方程为

$$\frac{x-1}{-2} = y-2 = \frac{z-1}{0}.$$

12. **Solution.** 先对 x 求偏导, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1 + y f_2.$$

再对 y 求偏导, 得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2y f_{11} + (x + 2y^2) f_{12} + x y f_{22} + f_2.$$

其中 $f_1, f_2, f_{11}, f_{12}, f_{22}$ 均在 $(x + y^2, xy)$ 处取值.

13. **Solution.** 对

$$x = r^2 \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

两边关于 x 求偏导, 得

$$\begin{cases} 1 = 2r \cos \theta \frac{\partial r}{\partial x} - r^2 \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\ 0 = \sin \theta \frac{\partial r}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x}. \end{cases}$$

解得

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\cos \theta}{r(1 + \cos^2 \theta)}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r^2(1 + \cos^2 \theta)}.$$

14. **Solution.** L 由 x 轴线段、 y 轴线段及第一象限单位圆弧组成. 在 x 轴上,

$$I_1 = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}.$$

在 y 轴上,

$$I_2 = \int_0^1 y^2 \, dy = \frac{1}{3}.$$

在圆弧 $x = \cos t$, $y = \sin t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) 上, $ds = dt$, 故

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + \sin^2 t) \, dt = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

所以

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{11}{6} + \frac{\pi}{4}.$$

15. **Solution.** 记 $\Omega: z = 1, x^2 + y^2 \leq 1$ 取下侧, 则由 Gauss 定理,

$$\begin{aligned} I &= \iint_{S+\Omega} xy^2 \, dy \, dz + yz^2 \, dz \, dx + zx^2 \, dx \, dy - \iint_{\Omega} zx^2 \, dx \, dy \\ &= - \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \, dv + \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 \, dx \, dy. \end{aligned}$$

用球坐标代换得

$$\begin{aligned} I_1 &= - \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \, dv \\ &= - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \, d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi}} \rho^4 \, d\rho \\ &= \frac{2\pi}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^5 \varphi} \, d\cos \varphi = -\frac{\pi}{10} \frac{1}{\cos^4 \varphi} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{3\pi}{10}; \end{aligned}$$

$$\text{由对称性可知 } I_2 = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 \, dx \, dy = \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) \, dx \, dy = \pi \int_0^1 r^3 \, dr = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{因此 } I = I_1 + I_2 = -\frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{20}.$$

16. **Solution.** 注意到 $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, $|x| < 1$, 对两边积分得

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}, |x| < 1.$$

当 $0 < |x| < 1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} = \frac{\arctan x}{x}$; 当 $x = 0$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} = 1$.

又注意到当 $|x| = 1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ 也收敛, 因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} = \begin{cases} \frac{\arctan x}{x}, & 0 < |x| \leq 1, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

取 $x = \frac{1}{2}$, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)} = 2 \arctan \frac{1}{2}.$$

4 应用题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. **Solution.** 用 Lagrange 乘数法, 设 $L(x, y, z, \lambda) = \ln(xy^2z^3) - \lambda(x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6R^2)$, $x, y, z > 0$.

令 $\nabla L = 0$, 得

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - 2\lambda x = 0, \\ \frac{2}{y} - 4\lambda y = 0, \\ \frac{3}{z} - 6\lambda z = 0, \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6R^2. \end{cases}$$

解得最大值点为 (R, R, R) , 最大值为

$$\ln(R \cdot R^2 \cdot R^3) = 6 \ln R.$$

对任意正实数 a, b, c , 取

$$R^2 = \frac{a+2b+3c}{6}, \quad x = \sqrt{a}, \quad y = \sqrt{b}, \quad z = \sqrt{c}.$$

则点 (x, y, z) 在椭球面上, 故

$$\ln \sqrt{ab^2c^3} \leq 6 \ln R.$$

因而

$$ab^2c^3 \leq R^{12} = \left(\frac{a+2b+3c}{6} \right)^6.$$

18. **Solution.** 用柱坐标代换. 柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 化为

$$r = 2 \cos \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

区域为

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 2 \cos \theta, \quad 0 \leq z \leq r.$$

因而

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} r dr \int_0^r dz = \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = \frac{16}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{9}.$$

锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的面积元为

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \sqrt{2} dx dy.$$

其投影为圆盘 $x^2 + y^2 \leq 2x$, 故

$$S = \sqrt{2} \iint_{x^2 + y^2 \leq 2x} dx dy = \sqrt{2}\pi.$$

5 分析证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. **Solution.** 记

$$P = -\frac{y}{4x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{4x^2 + y^2}.$$

在不含原点的区域内, 有

$$Q_x - P_y = 0.$$

当 $0 < R < 1$ 时, 圆周 L 内部不含奇点 $(0, 0)$, 由 Green 公式得

$$I = 0.$$

当 $R > 1$ 时, L 包围原点. 考虑充分小的 $\delta > 0$, 使得小椭圆 $E: 4x^2 + y^2 = \delta^2$ 包含在 L 内部.

从而由复合闭路定理,

$$I = \oint_L P dx + Q dy = \oint_E \frac{x dy - y dx}{\delta^2}.$$

由 Green 公式, $\oint_E x dy - y dx = 2 \iint_{4x^2 + y^2 \leq \delta^2} dx dy = \pi\delta^2$. 因此 $I = \pi$.

综上所述,

$$I = \begin{cases} 0, & 0 < R < 1, \\ \pi, & R > 1. \end{cases}$$

20. **Proof.** 记 $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, $I = \int_0^1 e^{f(x)} dx \int_0^1 e^{-f(x)} dx$, 则

$$I = \int_0^1 e^{f(x)} dx \int_0^1 e^{-f(y)} dy = \iint_D e^{f(x)-f(y)} dx dy.$$

由 D 的轮换对称性可知 $I = \iint_D e^{f(y)-f(x)} dx dy$, 因此

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \iint_D \left(e^{f(x)-f(y)} + e^{f(y)-f(x)} \right) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \left(e^{f(x)-f(y)} + \frac{1}{e^{f(x)-f(y)}} \right) dx dy \\ &\geq \iint_D dx dy = 1. \end{aligned}$$

CHAPTER 15

2016-2017 学年微积分（一）（下）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 考虑二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的下面四条性质:

(1) 连续; (2) 两个偏导数存在; (3) 可微; (4) 沿方向 $(1, 0)$ 的方向导数存在.

若用 “ $P \Rightarrow Q$ ” 表示可由性质 P 推出性质 Q , 则成立 ().

A. $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$

B. $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$

C. $(3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$

D. $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (4)$

2. 将 $I = \int_0^1 dy \int_{-y}^y f(x, y) dx$ 化为先对 y 后对 x 的逐次积分, 正确结果是 ().

A. $I = \int_{-1}^0 dx \int_x^1 f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{-x}^1 f(x, y) dy$

B. $I = \int_{-y}^y dx \int_0^1 f(x, y) dy$

C. $I = \int_{-1}^0 dx \int_{-x}^1 f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_x^1 f(x, y) dy$

D. $I = \int_0^1 dx \int_{-x}^x f(x, y) dy$

3. 设 L 表示圆 $x^2 + y^2 = R^2 (R > 0)$, 取顺时针方向, 则积分 $\oint_L -x^2 y dx + xy^2 dy = ()$.

A. πR^4

B. $-\frac{\pi R^4}{2}$

C. $-\pi R^4$

D. $\frac{\pi R^4}{2}$

4. 设 $a_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$, 下列说法中正确的是 ().

A. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 条件收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 发散

B. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 发散

C. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 条件收敛

D. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则当 n 充分大时, $a_n \geq \frac{1}{n}$

5. 二阶常系数线性微分方程 $y'' - 3y' - 4y = x + e^{-x}$ 的特解的待定形式为 () .

A. $y^* = ax + b + ce^{-x}$

B. $y^* = x(ax + b) + (cx + d)e^{-x}$

C. $y^* = ax + b + cxe^{-x}$

D. $y^* = x(ax + b) + cxe^{-x}$

6. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 是将函数 $f(x) = x + 1 (0 \leq x \leq \pi)$ 做奇延拓后展开成的傅立叶级数, 其和函数为

$S(x) (-\infty < x < +\infty)$, 则 $S\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = ()$.

A. $-\frac{\pi}{2} + 1$

B. $\frac{\pi}{2} + 1$

C. $-\frac{\pi}{2} - 1$

D. $\frac{\pi}{2} - 1$

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. 设函数 $z = xe^y$, 则 $dz \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} =$ _____.

8. 设 $D: x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$, 则 $\iint_D [(x+1)^2 + y^2] dx dy =$ _____.

9. 设 L 是圆周 $x^2 + y^2 = 1$, 则 $\oint_L (x^2 + xy) ds =$ _____.

10. 设曲面 $S = \{(x, y, z) : z = 1, |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$, 则 $\iint_S (x + y + z) dS =$ _____.

3 基本计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 求经过直线 $L: \begin{cases} 2x + 3y - z - 8 = 0, \\ y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$ 且与平面 $\pi: x + y + z - 4 = 0$ 平行的平面方程 π_1 .

12. 设 $z = f(e^{2x}, xy)$, 其中 f 具有二阶连续导数, 且 $f'_2(1, 0) = 2$, 求 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=0 \\ y=3}}$.

13. 设变量 x, y, t 满足方程 $x = F(t, y)$ 和 $f(x + y + t) = 3y$, 其中 f 具有一阶连续导数, F 具有一阶连续偏导数, 记 $F_1 = \frac{\partial F(t, y)}{\partial t}$, $F_2 = \frac{\partial F(t, y)}{\partial y}$, 且 $1 + F_1 \neq 0$, $f' \neq 0$, 求 $\frac{dx}{dy}$.

14. 设 L 是依逆时针方向的下半圆周 $x^2 + y^2 = x$ ($y \leq 0$), 求曲线积分

$$I = \int_L (1 - y - e^x \sin y) dx + (1 - e^x \cos y) dy.$$

15. 设 S 为曲面 $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的上侧, 求曲面积分

$$I = \iint_S xyz \, dy \, dz + x^2 y \, dz \, dx + \left(\frac{z^3}{3} + 1 \right) dx \, dy.$$

16. 将 $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$ 展成 x 的幂级数.

4 应用题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 求函数 $f(x, y, z) = xy + z^2$ 在平面 $x = y$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 相交的圆周上的最大值和最小值.

18. 设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的一阶导数, 且满足 $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(x) + \int_0^x \varphi(t) dt = e^x$, 求 $\varphi(x)$.

5 分析证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \sin \left(\frac{(-1)^n}{n^p} \right) - \cos \left(\frac{(-1)^n}{n^p} \right) \right] \quad (p > 0)$$

的敛散性, 收敛时指明是条件收敛还是绝对收敛.

20. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ ($a > 0$) 上连续, 且 $f(x) > 0$, 证明:

$$\int_a^b x f(x) dx \int_a^b \frac{x}{f(x)} dx \geq \frac{(b+a)^2(b-a)^2}{4}.$$

CHAPTER 16

2016-2017 学年微积分 (一) (下) 期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. **Solution.** D.

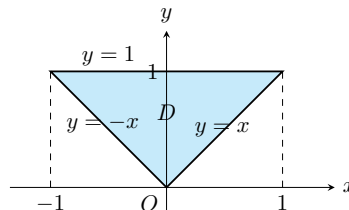
可微必推出两个偏导数存在, 而偏导数是特殊方向的方向导数. 由于方向 $(1, 0)$ 即为 x 轴正方向, 故偏导数存在可直接推出该方向导数存在, 因此 $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (4)$ 成立.

2. **Solution.** C.

如图, 积分区域为

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, -y \leq x \leq y\}.$$

改为先对 y 积分时, $-1 \leq x \leq 1$, 且当 $-1 \leq x \leq 0$ 时, $-x \leq y \leq 1$; 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $x \leq y \leq 1$.



故

$$I = \int_{-1}^0 dx \int_{-x}^1 f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_x^1 f(x, y) dy.$$

3. **Solution.** B.

记 $P = -x^2y$, $Q = xy^2$. 若 L 取逆时针方向, 则由 Green 公式,

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} (Q_x - P_y) dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{\pi R^4}{2}.$$

题中为顺时针方向, 所以积分值为 $-\frac{\pi R^4}{2}$.

4. **Solution.** A.

对于 A, B 选项, 记级数的前 $2N$ 项部分和为 S_{2N} , 绝对值级数的前 $2N$ 项部分和为 T_{2N} , 则

$$\begin{aligned} S_{2N} + T_{2N} &= (-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots - a_{2N-1} + a_{2N}) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2N-1} + a_{2N}) \\ &= 2 \sum_{n=1}^N a_{2n}. \end{aligned}$$

若 $\sum (-1)^n a_n$ 条件收敛, 则 S_{2N} 收敛, 但 T_{2N} 发散, 所以 $\sum a_{2n}$ 发散.

若 $\sum (-1)^n a_n$ 绝对收敛, 则 S_{2N} 和 T_{2N} 都收敛, 所以 $\sum a_{2n}$ 收敛.

对于 C 选项, 令 $a_n = \frac{1}{n^2}$, 则 $\sum a_n$ 收敛, 且 $\sum (-1)^n a_n = \sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ 绝对收敛.

对于 D 选项, 令 $a_n = \begin{cases} 1, & n = 2k, \\ \frac{1}{n^2}, & n = 2k-1 \end{cases}$, 则 $\sum a_n$ 发散, 但当 n 充分大且为奇数时, $a_n < \frac{1}{n}$.

5. Solution. C.

方程对应齐次方程的特征方程为

$$r^2 - 3r - 4 = (r - 4)(r + 1) = 0.$$

所以齐次方程的通解为 $y_h = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}$.

对于非齐次项 $y_1 = x$, 由于 $\lambda = 0$ 不是齐次方程的根, 所以特解为 $y_1^* = ax + b$;

对于非齐次项 $y_2 = e^{-x}$, 由于 $\lambda = -1$ 是齐次方程的单根, 所以特解为 $y_2^* = cxe^{-x}$.

由解的叠加原理, 特解的待定形式为 $y^* = y_1^* + y_2^* = ax + b + cxe^{-x}$.

6. Solution. C.

奇延拓后的和函数是以 2π 为周期的奇函数. 因此

$$S\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = S\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} - 1.$$

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. Solution. $e dx$.

因为

$$dz = e^y dx + xe^y dy,$$

所以 $dz \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = e dx$.

8. Solution. $\frac{3\pi}{4}$.

在上半圆盘 D 上, 由对称性可知 $\iint_D 2x dx dy = 0$. 因此

$$\begin{aligned} \iint_D [(x+1)^2 + y^2] dx dy &= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy + \iint_D dx dy \\ &= \pi \int_0^1 r^3 dr + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

9. Solution. π .

令 $x = \cos t$, $y = \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), 则 $ds = dt$. 因而

$$\oint_L (x^2 + xy) ds = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \cos t \sin t) dt = \pi.$$

10. **Solution.** 4.

曲面为平面方形区域, $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x \mathrm{d}y$, 故由对称性可知

$$\begin{aligned} \iint_S (x+y+z) \mathrm{d}S &= \iint_{\substack{-1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1}} (x+y+1) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\ &= \iint_{\substack{-1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y = 4. \end{aligned}$$

3 基本计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. **Solution.** 因 π_1 与 $\pi: x+y+z-4=0$ 平行, 可设

$$\pi_1: x+y+z+D=0.$$

在方程组中令 $z=0$, 可取直线 L 上一点 $P(10, -4, 0)$, 代入得 $D=-6$, 故

$$\pi_1: x+y+z-6=0.$$

12. **Solution.** 先求

$$z_x = 2e^{2x} f'_1(e^{2x}, xy) + y f'_2(e^{2x}, xy).$$

令

$$G(x, y) = 2e^{2x} f'_1(e^{2x}, xy) + y f'_2(e^{2x}, xy),$$

则 $G(0, y) = 2f'_1(1, 0) + y f'_2(1, 0) = 2f'_1(1, 0) + 2y$, $G_y(0, y) = f'_2(1, 0) \equiv 2$, 因而

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=0 \\ y=3}} = G_y(0, 3) = 2.$$

13. **Solution.** 由

$$\begin{cases} x = F(t, y), \\ f(x+y+t) = 3y \end{cases}$$

确定 $t=t(y)$, $x=x(y)$. 两边对 y 求导, 得

$$\begin{cases} x' = F_1 t' + F_2, \\ (x' + t' + 1) f' = 3. \end{cases}$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{f' F_2 + (3 - f') F_1}{(1 + F_1) f'}.$$

14. **Solution.** 补线段 $L_1: y=0, x: 1 \rightarrow 0$, 则 $L+L_1$ 封闭并取正向. 故

$$I = \oint_{L+L_1} (1-y-e^x \sin y) \mathrm{d}x + (1-e^x \cos y) \mathrm{d}y - \int_{L_1} \mathrm{d}x.$$

由 Green 公式, 记 $D: \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq x, y \leq 0\}$, 则

$$\begin{aligned} I &= \oint_{L+L_1} (1-y-e^x \sin y) dx + (1-e^x \cos y) dy - \int_1^0 dx \\ &= \iint_D [-e^x \cos y - (-1-e^x \cos y)] dx dy + 1 \\ &= \iint_D dx dy + 1 = \frac{\pi}{8} + 1. \end{aligned}$$

15. **Solution.** 记底面 $S_1: z=0, x^2+y^2 \leq 1$ 取下侧, 区域 $\Sigma: \{(x, y, z) | x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \leq 0\}$,

则 $S+S_1$ 封闭并指向内侧. 所以由 Gauss 公式可知

$$\begin{aligned} I &= \oiint_{S+S_1} xyz dy dz + x^2 y dz dx + \left(\frac{z^3}{3} + 1\right) dx dy - \iint_{S_1} \left(\frac{z^3}{3} + 1\right) dx dy \\ &= - \iiint_{\Sigma} (yz + x^2 + z^2) dx dy dz + \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy \\ &= - \iiint_{\Sigma} (yz + x^2 + z^2) dx dy dz + \pi. \end{aligned}$$

由对称性可知 $\iiint_{\Sigma} yz dx dy dz = 0$, $\iiint_{\Sigma} x^2 dx dy dz = \iiint_{\Sigma} y^2 dx dy dz = \iiint_{\Sigma} z^2 dx dy dz$.

因此

$$\begin{aligned} I &= -\frac{2}{3} \iiint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz + \pi \\ &= -\frac{2}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr + \pi \\ &= -\frac{2}{3} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{5} + \pi = \frac{11\pi}{15}. \end{aligned}$$

16. **Solution.** 注意到

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1,$$

上式两端从 0 积分到 x , 并利用 $f(0) = \frac{\pi}{4}$, 得

$$f(x) - \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

又当 $x=1$ 时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛; 当 $x=-1$ 时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^{2n+1}}{2n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 也收敛,

因此

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1.$$

4 应用题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. **Solution.** 用 Lagrange 乘数法, 设 $L(x, y, z, \lambda, \mu) = xy + z^2 + \lambda(x - y) + \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$, 令 $\nabla L = 0$, 得

$$\begin{cases} L_x = y + 2\mu x + \lambda = 0, \\ L_y = x + 2\mu y - \lambda = 0, \\ L_z = 2z + 2\mu z = 0, \\ L_\lambda = x - y = 0, \\ L_\mu = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0. \end{cases}$$

解得四个驻点 $P_1(0, 0, 2)$, $P_2(0, 0, -2)$, $P_3(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, $P_4(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$.

因为 $f(0, 0, 2) = f(0, 0, -2) = 4$, $f(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) = f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0) = 2$,

因此最大值为 4, 最小值为 2.

18. **Solution.** 由 $\varphi'(x) = e^x - \int_0^x \varphi(t) dt$ 可知 $\varphi(x)$ 存在二阶连续导数, 且

$$\varphi''(x) + \varphi(x) = e^x.$$

在原方程两边令 $x = 0$ 可得 $\varphi'(0) = 1$, 再结合 $\varphi(0) = 0$, 得到定解问题

$$\begin{cases} \varphi'' + \varphi = e^x, \\ \varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 1. \end{cases}$$

非齐次方程对应齐次方程的特征方程为 $r^2 + 1 = 0$, 所以齐次方程的通解为 $\varphi_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

对于非齐次项 e^x , 由于 $\lambda = 1$ 不是齐次方程的根, 所以可设特解为 $\varphi^* = ae^x$.

代入方程得 $ae^x + ae^x = e^x$, 故 $a = \frac{1}{2}$, 因此 $\varphi^* = \frac{1}{2}e^x$.

因此非齐次方程的通解为 $\varphi = \varphi_h + \varphi^* = \frac{1}{2}e^x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

将 $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ 代入上式, 得

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{2} + C_1, \\ 1 = \frac{1}{2} + C_2. \end{cases}$$

解得 $C_1 = -\frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{1}{2}$. 因此

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x.$$

5 分析证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. **Solution.** 设

$$u_n = 1 - \cos \frac{(-1)^n}{n^p}, \quad v_n = \sin \frac{(-1)^n}{n^p}.$$

则原级数可视作 $\sum u_n - \sum v_n$. 由

$$1 - \cos t \sim \frac{t^2}{2} \quad (t \rightarrow 0)$$

知 $\sum u_n$ 当且仅当 $p > \frac{1}{2}$ 时收敛. 又

$$v_n = (-1)^n \sin \frac{1}{n^p}$$

是交错级数, 且 $\sin \frac{1}{n^p} \sim \frac{1}{n^p}$, 故当 $p > 0$ 时由 Leibniz 判别法可知该级数收敛;

且当 $p > 1$ 时绝对收敛, 当 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛.

综上, 原级数当 $p > 1$ 时绝对收敛, 当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时条件收敛, 当 $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 时发散.

20. **Proof.** 记 $D = [a, b] \times [a, b]$, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b x f(x) \, dx \int_a^b \frac{x}{f(x)} \, dx \\ &= \int_a^b x f(x) \, dx \int_a^b \frac{y}{f(y)} \, dy \\ &= \iint_D \frac{xy f(x)}{f(y)} \, dx \, dy. \end{aligned}$$

由 D 的轮换对称性可知

$$I = \iint_D \frac{xy f(y)}{f(x)} \, dx \, dy.$$

因此

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \iint_D \left(\frac{xy f(x)}{f(y)} + \frac{xy f(y)}{f(x)} \right) \, dx \, dy \\ &\geq \iint_D xy \, dx \, dy = \int_a^b x \, dx \int_a^b y \, dy \\ &= \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right)^2 = \frac{(a+b)^2 (b-a)^2}{4}. \end{aligned}$$

CHAPTER 17

2015-2016 学年微积分（一）（下）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 曲面 $z = 4 - x^2 - y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x + 2y + z = 1$, 则点 P 的坐标是 () .

A. $(1, -1, 2)$

B. $(-1, 1, 2)$

C. $(1, 1, 2)$

D. $(-1, 1, 1)$

2. 考虑二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的以下 4 条性质:

(1) 两个偏导数存在; (2) 两个偏导函数连续; (3) 可微; (4) 沿任意方向的方向导数存在.

若用 “ $P \Rightarrow Q$ ” 表示可由性质 P 推出性质 Q , 则有 () .

A. $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$

B. $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$

C. $(3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$

D. $(3) \Rightarrow (1) \Rightarrow (4)$

3. 将二次积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 化为直角坐标系下的二次积分, 正确的结果是 () .

A. $I = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

B. $I = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^x f(x, y) dy$

C. $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

D. $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^x f(x, y) dy$

4. 设 S 是圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2 (R > 0)$ 被平面 $z = 0, z = h$ 截下的部分, 则 $\iint_S (x^2 + y^2) dS = ()$.

A. $-2\pi h R^3$

B. $2\pi h R^3$

C. $\pi h R^3$

D. $\frac{\pi}{2} R^4 h$

5. 下列命题中正确的是 () .

A. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

B. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在, 则 $l < 1$

C. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

D. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 绝对收敛

6. 设 $f(x) = x + 1 (0 \leq x \leq \pi)$, 而 $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $-\infty < x < +\infty$, 其中

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx,$$

则 $S\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (\quad)$.

A. $-\frac{\pi}{2} + 1$

B. $\frac{\pi}{2} + 1$

C. $-\frac{\pi}{2} - 1$

D. $\frac{\pi}{2} - 1$

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. 以曲线 $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$ 为准线, 母线平行于 x 轴的柱面方程是_____.

8. 设 $\mathbf{F} = (y, z, xy)$, $\mathbf{G} = (1, 0, x)$, 则 $\text{rot}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) =$ _____.

9. 设 $D: x^2 + y^2 \leq a^2 (a > 0)$, 若 $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy = \pi$, 则 $a =$ _____.

10. 设 L 为从 $A(1, 0)$ 到 $B(2, 1)$ 的曲线弧, 则 $\int_L (2xy - y^4 + 3) \, dx + (x^2 - 4xy^3) \, dy =$ _____.

3 基本计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 求过点 $P(1, 2, 3)$ 且与 z 轴相交、与平面 $x + y + z - 2 = 0$ 平行的直线方程.

12. 设 $z = f\left(\sin x, \frac{x}{y}\right)$, 其中 f 具有二阶连续导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

13. 设函数 $y = y(x), z = z(x)$ 由方程 $z = xf(x+y)$ 以及 $F(x, y, z) = 0$ 所确定, 其中 f 具有一阶连续导数, F 具有一阶连续偏导数, 求 $\frac{dz}{dx}$.

14. 求三重积分 $I = \iiint_V (x^2 + yz + z^2) dv$, 其中 $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

15. 求曲线积分 $I = \oint_L (x^2 - y^2) dx + (x^2 + y^2) dy$, 其中 L 是圆周 $x^2 + y^2 = x + y + 1$, 取正向.

16. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 3^n}$ 的收敛域与和函数 $S(x)$.

4 应用题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 在椭球面 $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1$ 上求一点, 使函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在该点处沿方向 $\mathbf{n} = (0, -1, 1)$ 的方向导数最大.

18. 设速度场 $\mathbf{v} = (2x^3, 2y^3, 3(z^2 - 1))$, S 是曲面 $z = 1 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$ 的上侧, 求单位时间内流过曲面 S 上侧的通量

$$\Phi = \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

5 综合题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 证明 Leibniz 判别法: 若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n (a_n > 0)$ 满足 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; (2) $\{a_n\}$ 单调减少, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛.

20. 设函数 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $f(1, y) = 0, f(x, 1) = 0, \iint_D f(x, y) \, d\sigma = a$, 其中 $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. 计算积分

$$I = \iint_D xy f_{xy}(x, y) \, d\sigma.$$

CHAPTER 18

2015-2016 学年微积分（一）（下）期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. **Solution.** C.

曲面可写成 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 4 = 0$, 其法向量为

$$\nabla F = (2x, 2y, 1).$$

切平面平行于平面 $2x + 2y + z = 1$, 故两平面的法向量平行, 即

$$\frac{2x}{2} = \frac{2y}{2} = \frac{1}{1},$$

解得 $x = 1, y = 1$. 代入曲面方程得 $z = 2$, 故 $P = (1, 1, 2)$.

2. **Solution.** A.

两个偏导函数在点 (x_0, y_0) 处连续可推出函数在该点可微; 可微又必推出两个偏导数存在.

但偏导数存在不能推出可微; 可微也不能推出偏导函数连续. 因此成立的是

$$(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1).$$

3. **Solution.** C.

原积分区域在极坐标下为

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},$$

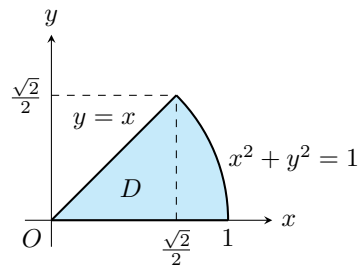
即第一象限中由 x 轴、直线 $y = x$ 和圆 $x^2 + y^2 = 1$ 围成的扇形区域.

改用直角坐标时, $0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, 且对固定的 y , 有

$$y \leq x \leq \sqrt{1-y^2}.$$

因而

$$I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$



4. Solution. B.

在圆柱面上 $x^2 + y^2 = R^2$, 故被积函数恒为 R^2 . 圆柱侧面积为 $2\pi Rh$, 所以

$$\iint_S (x^2 + y^2) dS = R^2 \cdot 2\pi Rh = 2\pi h R^3.$$

5. Solution. D.

对于 A 选项, 令 $a_n = \frac{1}{n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 但调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

对于 B 选项, 令 $a_n = \frac{1}{n^2}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 但 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$.

对于 C 选项, 令

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},$$

则 $\sum b_n$ 由 Leibniz 判别法可知收敛, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) = 1.$$

但 $\sum a_n = \sum b_n + \sum \frac{1}{n}$ 发散.

对于 D 选项, 若 $\sum a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum |a_n|$ 收敛. 又 $\sum |a_{2n}|$ 是 $\sum |a_n|$ 的子级数, 故 $\sum |a_{2n}|$ 收敛, 因而 $\sum a_{2n}$ 绝对收敛, 故 D 正确.

6. Solution. B.

该级数是 $f(x) = x + 1$ ($0 \leq x \leq \pi$) 作偶延拓后的余弦级数, 因此其和函数为周期为 2π 的偶函数.

故

$$S\left(-\frac{\pi}{2}\right) = S\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 1.$$

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. Solution. $3z^2 - y^2 = 16$.

母线平行于 x 轴, 故所求柱面方程中应消去 x . 由

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

得 $x^2 = z^2 - y^2$. 代入 $2x^2 + y^2 + z^2 = 16$, 得

$$2(z^2 - y^2) + y^2 + z^2 = 16,$$

即

$$3z^2 - y^2 = 16.$$

8. **Solution.** $(0, x, 0)$.

先求

$$\mathbf{F} \times \mathbf{G} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ y & z & xy \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = (xz, 0, -z).$$

因此

$$\text{rot}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \left(\frac{\partial(-z)}{\partial y} - \frac{\partial 0}{\partial z}, \frac{\partial(xz)}{\partial z} - \frac{\partial(-z)}{\partial x}, \frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial(xz)}{\partial y} \right) = (0, x, 0).$$

9. **Solution.** $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.

用极坐标代换,

$$\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy = 2\pi \int_0^a r \sqrt{a^2 - r^2} \, dr = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

由题设得 $\frac{2\pi a^3}{3} = \pi$, 故

$$a^3 = \frac{3}{2}, \quad a = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$$

10. **Solution.** 5.

记

$$P = 2xy - y^4 + 3, \quad Q = x^2 - 4xy^3.$$

因为 $P_y = 2x - 4y^3 = Q_x$, 所以该曲线积分与路径无关.

取势函数 Φ , 由 $\Phi_x = P$ 得

$$\Phi = x^2y - xy^4 + 3x + \varphi(y).$$

再由 $\Phi_y = Q$ 可知 $\varphi'(y) = 0$, 故可取 $\Phi = x^2y - xy^4 + 3x$. 因而

$$\int_L P \, dx + Q \, dy = \Phi(2, 1) - \Phi(1, 0) = 6 - 1 = 5.$$

3 基本计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. **Solution.** 设所求直线的方向向量为 $\mathbf{s}$, 并与 z 轴相交于点 $Q(0, 0, c)$, 则

$$\mathbf{s} = \overrightarrow{PQ} = (-1, -2, c-3).$$

由题设知 $\mathbf{s} \perp (1, 1, 1)$, 故 $c = 6$. 所求直线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-3}.$$

12. **Solution.** 记 f_1, f_2, f_{12}, f_{22} 分别表示 f 对其变量的一阶、二阶偏导数, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x f_1 + \frac{1}{y} f_2.$$

因而

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{x \cos x}{y^2} f_{12} - \frac{1}{y^2} f_2 - \frac{x}{y^3} f_{22}.$$

13. **Solution.** 对方程组

$$\begin{cases} z = xf(x+y), \\ F(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

两边对 x 求导, 得

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = f + x \left(1 + \frac{dy}{dx} \right) f', \\ F_1 + \frac{dy}{dx} F_2 + \frac{dz}{dx} F_3 = 0. \end{cases}$$

消去 $\frac{dy}{dx}$ 可得

$$\frac{dz}{dx} = \frac{(f + xf')F_2 - xf'F_1}{F_2 + xf'F_3}.$$

14. **Solution.** 由球域的对称性可知

$$\iiint_V yz \, dv = 0, \quad \iiint_V (x^2 + yz + z^2) \, dv = \frac{2}{3} \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \, dv.$$

用球坐标代换,

$$I = \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \int_0^1 \rho^4 \, d\rho = \frac{8\pi}{15}.$$

15. **Solution.** 由 Green 公式,

$$I = \iint_D \left[\frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial y} \right] dx \, dy = \iint_D 2(x + y) \, dx \, dy.$$

圆周 $x^2 + y^2 = x + y + 1$ 所围区域 D 的圆心为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 半径为 $\sqrt{\frac{3}{2}}$, 故

$$I = 2(\bar{x} + \bar{y})\sigma = 2 \cdot 1 \cdot \frac{3\pi}{2} = 3\pi.$$

16. **Solution.** 记 $a_n = \frac{1}{n3^n}$, 用比值判别法计算

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 3^n}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{3},$$

从而收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = 3$.

当 $x = 6$ 时, 原级数化为调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 因而发散;

当 $x = 0$ 时, 原级数化为交错调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, 因而收敛.

故原级数收敛域为 $[0, 6)$. 下面计算其和函数 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 3^n}$.

对 $S(x)$ 求导, 得

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-3)^{n-1}}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-3}{3} \right)^n,$$

这是一个首项为 $\frac{1}{3}$, 公比为 $\frac{x-3}{3}$ 的几何级数, 因此 $S'(x) = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{x-3}{3}} = \frac{1}{3 - (x-3)} = \frac{1}{6-x}$.

注意到 $S(3) = 0$, 因此

$$S(x) = \int_3^x \frac{1}{6-t} dt = -\ln|6-x| + \ln|3| = \ln\left(\frac{3}{6-x}\right), \quad x \in [0, 6).$$

4 应用题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. **Solution.** 设所求点为 $M(x, y, z)$, 则

$$\nabla f(M) = (2x, 2y, 2z), \quad \mathbf{n}^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1).$$

故方向导数为

$$\frac{\partial f(M)}{\partial \mathbf{n}} = \sqrt{2}(-y + z).$$

即在约束条件 $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1$ 下, 求 $-y + z$ 的最大值.

用 Lagrange 乘数法, 设 $L(x, y, z, \lambda) = -y + z + \lambda(x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 1)$, 令 $\nabla L = 0$, 得

$$\begin{cases} 2\lambda x = 0, \\ 4\lambda y - 1 = 0, \\ 4\lambda z + 1 = 0, \\ x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1. \end{cases}$$

由前两个方程可知 $x = 0$, 且 $z = -y$. 代入约束方程得

$$4y^2 = 1, \quad y = \pm \frac{1}{2}, \quad z = \mp \frac{1}{2}.$$

因而受检点为

$$M_1\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad M_2\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

比较方向导数的值,

$$\frac{\partial f(M_1)}{\partial \mathbf{n}} = -\sqrt{2}, \quad \frac{\partial f(M_2)}{\partial \mathbf{n}} = \sqrt{2},$$

故所求点为

$$\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

18. **Solution.** 取底面 $S_1: z = 0, x^2 + y^2 \leq 1$ 的下侧, 使 $S + S_1$ 封闭并取外侧法向.

由 Gauss 公式,

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint_{S+S_1} (2x^3, 2y^3, 2z^3) \cdot \mathbf{n} dS - \iint_{S_1} 3(z^2 - 1) dx dy \\ &= \iiint_V (6x^2 + 6y^2 + 6z) dv + 3 \iint_{S_1} dx dy. \end{aligned}$$

用柱坐标代换,

$$\begin{aligned}
 \Phi &= 6 \iiint_V (x^2 + y^2 + z) \, dv + 3 \iint_{S_1} dx \, dy \\
 &= 6 \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{1-z}} r(r^2 + z) \, dr - 3 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx \, dy \\
 &= 12\pi \int_0^1 \left[\frac{1}{4}(1-z)^2 + \frac{1}{2}(1-z)z \right] dz - 3\pi \\
 &= 3\pi \int_0^1 (1-z^2) \, dz - 3\pi = -\pi.
 \end{aligned}$$

5 综合题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. **Proof.** 记部分和

$$S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n.$$

对偶数项部分和, 有

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

由于 $\{a_n\}$ 单调减少, 故 $a_{2k-1} - a_{2k} \geq 0$, 从而 $\{S_{2n}\}$ 单调增加.

又

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1,$$

因而 $\{S_{2n}\}$ 单调有界, 故收敛. 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S.$$

对奇数项部分和,

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}.$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = S.$$

因此奇、偶部分和有相同极限 S , 故原级数收敛.

20. **Solution.** 因 $f(1, y) = 0, f(x, 1) = 0$, 所以

$$f_y(1, y) = 0, \quad f_x(x, 1) = 0.$$

由两次分部积分,

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D xy f_{xy}(x, y) \, d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^1 xy f_{xy}(x, y) \, dy \\
 &= \int_0^1 \left[\int_0^1 xy \, df_x(x, y) \right] dx = \int_0^1 \left[xy f_x(x, y) \Big|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 x f_x(x, y) \, dy \right] dx \\
 &= - \int_0^1 \left[\int_0^1 x f_x(x, y) \, dx \right] dy = - \int_0^1 \left[\int_0^1 x \, df(x, y) \right] dy \\
 &= - \int_0^1 \left[x f(x, y) \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 f(x, y) \, dx \right] dy \\
 &= \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) \, dx \right] dy = \iint_D f(x, y) \, d\sigma = a.
 \end{aligned}$$