

北 京 交 通 大 学

2019-2020-1- 《概率论与数理统计 B》期末考试 参考答案

一、单选题 (本题满分 30 分, 共有 10 道小题, 每道小题 3 分)

1、设随机事件 A 与 B 互不相容, 且 $P(A \cup B) < 1$, $P(A) > 0$, $P(B) > 0$. 则在下列四个等式中, 错误的式子为 【 D 】.

(A) $P(B\bar{A}) = P(B)$

(B) $P(\bar{A}B \cup A\bar{B}) = P(\bar{A}B) + P(A\bar{B})$

(C) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1$

(D) $P(\bar{A}\bar{B}) = 0$.

解: 由于 $AB = \emptyset$, 所以 $B \subset \bar{A}$, 因此 $\bar{A}B = B$, 所以有 $P(\bar{A}B) = P(B)$, 即选项 (A) 正确.

由于 $\bar{A}B$ 与 $A\bar{B}$ 互不相容, 所以 $P(\bar{A}B \cup A\bar{B}) = P(\bar{A}B) + P(A\bar{B})$, 即选项 (B) 正确.

由于 $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{AB}$, 再由 $AB = \emptyset$, 得 $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - 0 = 1$.

故选项 (D) 正确.

由于 $\bar{A}\bar{B} = \overline{A \cup B}$, 所以 $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$.

再由于 $P(A \cup B) < 1$, 所以, $P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(A \cup B) > 0$, 即选项 (C) 错误.

2、设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为取自总体 X 的简单随机样本, $\bar{X}$ 为样本均值, S^2 为样本方差, 则有 【 B 】

(A) $E(\bar{X}^2 - S^2) = \mu^2 - \sigma^2$

(B) $E(\bar{X} - S^2) = \mu - \sigma^2$

(C) $E(\bar{X}^2 + S^2) = \mu^2 + \sigma^2$

(D) $E(\bar{X} - S^2) = \mu^2 + \sigma^2$.

3、随机变量 $X \sim t(n) (n > 1)$, $Y = \frac{1}{X^2}$, 则 【 C 】.

(A) $Y \sim \chi^2(n)$ (B) $Y \sim \chi^2(n-1)$ (C) $Y \sim F(n, 1)$ (D) $Y \sim F(1, n)$.

4、 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为取自总体 $N(0, 1)$ 的简单随机样本, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, $T = (\bar{X} + 1)(S^2 + 1)$, 则 $E(T) =$ 【 C 】.

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 4.

5、 X 的密度函数为 $f(x)$, $f(-x) = f(x)$, $F(x)$ 为 X 的分布函数, 则对任意 a , 必有 【 B 】.

(A) $F(-a) = 1 - \int_0^a f(x)dx$

(B) $F(-a) = \frac{1}{2} - \int_0^a f(x)dx$

(C) $F(-a) = F(a)$

(D) $F(-a) = 2F(a) - 1$.

解: $F(-a) = \int_{-\infty}^{-a} f(x)dx = \frac{1}{2} - \int_{-a}^0 f(x)dx = \frac{1}{2} - \int_0^a f(x)dx;$

$$F(a) + F(-a) = 1 \Rightarrow F(-a) = 1 - F(a).$$

6、设随机变量 X, Y 相互独立, 且 $X \sim N(0, 2), Y \sim N(0, 3)$, 则 $D(X^2 + Y^2) =$ 【 D 】.

- (A) 5 (B) 13 (C) 18 (D) 26.

7、随机变量 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$, 边缘分布为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 则概率 $P(X > x, Y > y)$ 等于 【 C 】.

- (A) $1 - F(x, y)$ (B) $1 - F_X(x) - F_Y(y)$
(C) $F(x, y) - F_X(x) - F_Y(y) + 1$ (D) $F(x, y) + F_X(x) + F_Y(y) - 1.$

解: $P(X > x, Y > y) = 1 - P(X \leq x) - P(Y \leq y) + P(X \leq x, Y \leq y)$

$$= 1 - F(x) - F(y) + F(x, y).$$

8、设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布, 记 $Y = \max\{X, 1\}$, 则 $EY =$ 【 B 】.

- (A) 1 (B) $1 + e^{-1}$ (C) $1 - e^{-1}$ (D) $e^{-1}.$

解: 随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, 因此

$$\begin{aligned} EY &= E[\max\{X, 1\}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \max(x, 1) \cdot f(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} \max(x, 1) \cdot e^{-x} dx \\ &= \int_0^1 e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} xe^{-x} dx = 1 + e^{-1}. \end{aligned}$$

9、总体 X 服从区间 $(\theta, \theta + 1)$ 上的均匀分布, $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是取自该总体中的一个样本,

则未知参数 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta} =$ 【 A 】.

- (A) $\bar{X} - \frac{1}{2}$ (B) $\bar{X} + \frac{1}{2}$ (C) $\bar{X} - 1$ (D) $\bar{X} + 1.$

解: 总体 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} 1 & \theta < x < \theta + 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$, 则

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{\theta}^{\theta+1} xdx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_{\theta}^{\theta+1} = \frac{1}{2}[(\theta+1)^2 - \theta^2] = \frac{1}{2}(2\theta+1) = \theta + \frac{1}{2}.$$

所以, $\theta = E(X) - \frac{1}{2}$. 将 $E(X)$ 用样本均值 $\bar{X}$ 来替换, 得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta} = \bar{X} - \frac{1}{2}$.

10、设 $X \sim U[-1, 1]$, 则 $U = \arcsin X$ 和 $V = \arccos X$ 的相关系数等于 【 A 】.

- (A) -1 (B) 0 (C) 0.5 (D) 1.

解: 由于 $U = \arcsin X$ 和 $V = \arccos X$ 有明显的线性关系:

$$\arcsin X + \arccos X = \frac{\pi}{2}.$$

可见, $U = \arcsin X$ 和 $V = \arccos X$ 相关系数 ρ 的绝对值等于 1.

因为 $\arcsin X$ 和 $\arccos X$ 增减变化趋势恰好相反, 立可断定 $\rho = -1$.

二、选择题 (本题满分 20 分, 共有 5 道小题, 每道小题 4 分)

1、设 X 表示在 n 次独立重复试验中, 事件 A 发生的次数. 又若 $P(A) = \frac{1}{2}$, 且 $E[X(X-1)] = 5$, 则必有 【 B 】.

(A) $n^2 - n - 20 = 0$ (B) $n = 5$ (C) $n = -4$ (D) $n = 4$.

解: 由 X 表示在 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数, 所以 $X \sim B(n, p)$. 且 $p = P(A) = \frac{1}{2}$.

所以, $E(X) = np = \frac{n}{2}$, $D(X) = np(1-p) = \frac{n}{4}$. 但是

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X(X-1)) + E(X) - [E(X)]^2 = 5 + \frac{n}{2} - \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{n}{4}.$$

由此, 得方程 $\frac{n^2}{4} - \frac{n}{4} - 5 = 0$, 即 $n^2 - n - 20 = 0$.

解方程, 得 $n_1 = 5$, $n_2 = -4$. 舍去 $n_2 = -4$, 得 $n_1 = 5$.

2、若二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) | -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$ 上服从均匀分布, 则 【 D 】.

(A) $P(X+Y \geq 0) = \frac{1}{4}$ (B) $P(X-Y \geq 0) = \frac{1}{4}$
(C) $P(\max\{X, Y\} \geq 0) = \frac{1}{4}$ (D) $P(\min\{X, Y\} \geq 0) = \frac{1}{4}$.

解: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -1 < x < 1, -1 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 所以

$$P(X+Y \geq 0) = \iint_{x+y \geq 0} f(x, y) dx dy = \iint_{y \geq -x} \frac{1}{4} dx dy = \frac{1}{2};$$

$$P(X-Y \geq 0) = \iint_{x-y \geq 0} f(x, y) dx dy = \iint_{y \leq x} \frac{1}{4} dx dy = \frac{1}{2};$$

$$P(\min\{X, Y\} \geq 0) = P(X \geq 0, Y \geq 0) = \iint_{x \geq 0, y \geq 0} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{4} dy = \frac{1}{4};$$

$$\begin{aligned} P(\max\{X, Y\} \geq 0) &= 1 - P(\max\{X, Y\} < 0) \\ &= 1 - P(X < 0, Y < 0) \\ &= 1 - \iint_{x < 0, y < 0} f(x, y) dx dy = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

3、设总体 X 服从参数为 λ ($\lambda > 0$) 的泊松分布, 样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ ($n \geq 2$) 为取自总体 X 的简单随

机样本, 则对应的统计量 $T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $T_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n} X_n$, 有【 D 】.

(A) $E(T_1) > E(T_2)$, $D(T_1) > D(T_2)$ (B) $E(T_1) > E(T_2)$, $D(T_1) < D(T_2)$

(C) $E(T_1) < E(T_2)$, $D(T_1) > D(T_2)$ (D) $E(T_1) < E(T_2)$, $D(T_1) < D(T_2)$.

4、设样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为取自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 记样本方差为 S^2 , 则 $D(S^2)$ 等于【 C 】.

(A) $\frac{2\sigma^2}{n-1}$ (B) $\frac{2\sigma^2}{n}$ (C) $\frac{2\sigma^4}{n-1}$ (D) $\frac{2\sigma^4}{n}$.

5、已知 $\bar{X}$ 是取自总体 X 中的简单随机样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的样本均值, 则 $\bar{X}$ 是 μ 的矩估计的充分条件是【 A 】

(A) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

(B) X 服从参数为 μ 的指数分布

(C) $P(X=m) = \mu(1-\mu)^{m-1}, m=1,2,\dots$

(D) X 服从 $[0, \mu]$ 上的均匀分布.

三、(满分 10 分) 一房间有 3 扇同样大小的窗户, 其中只有一扇是打开的. 有一只鸟在房子里飞来飞去, 它只能从开着的窗子飞出去. 假定这只鸟是没有记忆的, 且鸟飞向各个窗子是随机的. 若令 X 表示鸟为了飞出房间试飞的次数. 求 (1) X 的分布律. (2) 这只鸟最多试飞 3 次就飞出房间的概率. (3) 若有一只鸟飞出该房间 5 次, 其中有 4 次它最多试飞了 3 次就飞出房间, 请问“假定这只鸟是没有记忆的”是否合理?

解: (1) X 的取值为 1, 2, 3, ..., 并且

$$P\{X=k\} = P\{\text{前 } k-1 \text{ 次试飞均未飞出房间, 第 } k \text{ 次试飞飞出房间}\} = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3}$$

因此 X 的分布律为

$$P\{X=k\} = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3} \quad (k=1, 2, 3, \dots).$$

$$(2) P\{\text{这只鸟最多试飞 3 次就飞出房间}\} = P\{X \leq 3\} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{19}{27}.$$

(3) 若将这只鸟是否“最多试飞 3 次就飞出房间”看作是一次 Bernoulli 试验, 则这只鸟飞进该房间 5 次可以看作是一个 5 重 Bernoulli 试验.

$$A = \{\text{这只鸟最多试飞 3 次就飞出房间}\}, \text{ 则 } P(A) = \frac{19}{27}.$$

$$\text{所以, } P\{\text{5 重 Bernoulli 试验恰好成功 4 次}\} = C_5^4 \left(\frac{19}{27}\right)^4 \cdot \frac{8}{27} = 0.3633.$$

这表明: “假定这只鸟是没有记忆的”是合理的.

四、(满分 10 分) 设某种商品每周的需求量 X 是服从区间 $[10, 30]$ 上均匀分布的随机变量, 而经

销商店进货数量为区间 $[10, 30]$ 中的某一整数, 商店每销售一单位商品可获利 500 元; 若供大于求则削价处理, 每处理一单位商品亏损 100 元; 若供不应求, 则可从外部调剂供应, 此时一单位商品可获利 300 元, 为使商品所获利润的期望值不少于 9280 元, 试确定最小进货量。

解: 令 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}, & 10 < x < 30, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 设进货量为 s , 则利润为

$$Z = \begin{cases} 500X - 100(s - X), & 10 < X < s \\ 500s + 300(X - s), & s \leq X < 30 \end{cases} = \begin{cases} 600X - 100s, & 10 < X < s \\ 200s + 300X, & s \leq X < 30 \end{cases}$$

$$z = g(x) = \begin{cases} 600x - 100s, & 10 < x < s \\ 200s + 300x, & s \leq x < 30 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} EZ = Eg(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx = \int_{10}^s (600x - 100s) \frac{1}{20} dx + \int_s^{20} (200s + 300x) \frac{1}{20} dx \\ &= -7.5s^2 + 350s + 5250. \end{aligned}$$

由题意, $-7.5s^2 + 350s + 5250 \geq 9280$, $(3s - 62)(2.5s - 65) \leq 0$,

即 $3s - 62 \geq 0$, $2.5s - 65 \leq 0$, $20\frac{2}{3} \leq s \leq 26$,

因此, 最小进货量 $s = 21$.

五、(满分 10 分) 已知 X 为随机变量, $Y = X^2 + X + 1$,

- 1) 若 X 的概率分布为 $P(X = -1) = P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{3}$; 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$;
- 2) 若 X 的分布函数 $F_X(x)$, 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$;
- 3) 若 X 在 $(0, 1)$ 上服从均匀分布, 求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

解: 1) 由题意, Y 为离散型随机变量, 因此,

$$P(Y = 1) = P(X = -1) + P(X = 0) = \frac{2}{3}; \quad P(Y = 3) = P(X = 1) = \frac{1}{3},$$

故 Y 的分布函数

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ \frac{2}{3}, & 1 \leq y < 3 \\ 1, & 3 \leq y \end{cases} \quad \text{--3 分}$$

$$2) F_X(x) = P(X \leq x), \quad Y = X^2 + X + 1 = \left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4},$$

因此, $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P((X + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \leq y)$,

当 $y < \frac{3}{4}$ 时, $F_Y(y) = 0$;

$$\begin{aligned} \text{当 } y \geq \frac{3}{4} \text{ 时, } F_Y(y) &= P((X + \frac{1}{2})^2 \leq y - \frac{3}{4}) = P(|X + \frac{1}{2}| \leq \sqrt{y - \frac{3}{4}}) \\ &= P(-\sqrt{y - \frac{3}{4}} \leq X + \frac{1}{2} \leq \sqrt{y - \frac{3}{4}}) \\ &= P(-\sqrt{y - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \leq X \leq \sqrt{y - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}) \\ &= F_X(\sqrt{y - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}) - F_X(-\sqrt{y - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

故 Y 的分布函数

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y < \frac{3}{4} \\ F_X(\sqrt{y - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}) - F_X(-\sqrt{y - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}) & , y \geq \frac{3}{4} \end{cases} \quad \text{--6 分}$$

3) 若 X 在 $(0, 1)$ 上服从均匀分布, 即 $f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{other.} \end{cases}$

故, $F_Y(y) = P(X^2 + X + 1 \leq y, \quad 0 < X < 1)$.

当 $y < 1$ 时, $F_Y(y) = 0$;

$$\begin{aligned} \text{当 } 1 \leq y < 3 \text{ 时, } F_Y(y) &= P((X + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \leq y, \quad 0 < X < 1) \\ &= P(-\sqrt{y - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \leq X \leq \sqrt{y - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}, \quad 0 < X < 1) \\ &= P(0 < X \leq \sqrt{y - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}) = \sqrt{y - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

当 $y \geq 3$ 时, $F_Y(y) = P((X + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \leq y, \quad 0 < X < 1) = 1$.

故 Y 的分布函数

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1, \\ \sqrt{y - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}, & 1 \leq y < 3, \\ 1, & 3 \leq y. \end{cases} \quad \text{故 } f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4y-3}}, & 1 < y < 3, \\ 0, & \text{other.} \end{cases} \quad \text{--10 分}$$

六、(满分 10 分) 设总体 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \theta x^{-(\theta+1)} & x > 1 \\ 0 & x \leq 1 \end{cases}$, 其中 $\theta > 1$ 是未知参数.

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是从该总体中抽取的一个样本, 试求参数 θ 的最大似然估计量.

解: 构造似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \prod_{i=1}^n \theta x_i^{-(\theta+1)} = \theta^n (x_1 x_2 \cdots x_n)^{-(\theta+1)}$$

取 $\ln L(\theta) = n \ln \theta - (\theta + 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i$.

所以, $\frac{d}{d\theta} \ln L(\theta) = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \ln x_i$.

令: $\frac{d}{d\theta} \ln L(\theta) = 0$, 得 $\frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$,

得到似然函数的唯一驻点: $\theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$.

所以, 参数 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i}$.

七、(满分 10 分) 某工厂生产的一种螺钉, 标准要求长度是 32.5 毫米. 实际生产的产品, 假定其长度 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 未知. 现从该厂生产的一批产品中抽取 6 件, 得尺寸数据: 32.56; 29.66; 31.64; 30.00; 31.87; 31.03. 问这批产品是否合格? (取显著性水平 $\alpha = 0.01$). ($t_{0.01}(5) = 3.3649$, $t_{0.01}(6) = 3.1427$, $t_{0.005}(5) = 4.0322$, $t_{0.005}(6) = 3.7074$).

解: 设在 $\alpha = 0.01$ 下的检验假设为

$$H_0: \mu = 32.5, \quad H_1: \mu \neq 32.5$$

取检验统计量 $T = \frac{\bar{X} - 32.5}{S/\sqrt{6}} \sim t(5)$, 则有

检验的拒绝域为

$$W = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{s/\sqrt{n}} > t_{\alpha/2}(n-1) \right\}.$$

其中, $n = 6$, $\alpha = 0.01$, $\mu_0 = 32.5$, $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.005}(5) = 4.0322$,

将样本值代入算出统计量 T 的值

$$|T| = 2.997 < 4.0322.$$

所以接受 H_0 , 即认为这批产品合格.

解: 显然, $p_1 = p_2 = p_3$, 而 $p_4 = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{2}{5} = p_3$. 故选 (D).

5、 X 是连续型随机变量, $Y \sim B(1, p)$, 则随机变量 $X - Y$ 的分布函数是 【 】.

(A) 分段函数

(B) 连续函数

(C) 分段函数且恰有一个间断点

(D) 分段函数且至少有两个间断点.

解: 对于任意实数 t , 由概率性质, 有

$$\begin{aligned} 0 &\leq P(X - Y = t) = P(X - Y = t, Y = a) + P(X - Y = t, Y = b) \\ &= P(X = t + a, Y = a) + P(X = t + b, Y = b) \\ &\leq P(X = t + a) + P(X = t + b) = 0. \end{aligned}$$

而 $P(X - Y = t) = 0 \Leftrightarrow X - Y$ 的分布函数连续.

故选 (B).

6、设随机变量 $X \sim N(0, 1)$, 对于任意给定的 $\alpha \in (0, 1)$, 数 $u(\alpha)$ 满足 $P(X > u(\alpha)) = \alpha$. 若

概率 $P(|X| < x) = \alpha$, 则 x 等于 【 】.

(A) $u\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

(B) $u\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$

(C) $u\left(\frac{1 - \alpha}{2}\right)$

(D) $u\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)$.

解: 由 $P(|X| < x) = 1 - 2P(X > x) = \alpha$, 得

$$P(X > x) = \frac{1 - \alpha}{2}, \text{ 即 } x = u\left(\frac{1 - \alpha}{2}\right). \quad \text{故选 (C).}$$

7、小明经营一家饮料店, 使用 A, B 两种设备. 令 X 与 Y 分别表示 A 与 B 两种设备使用的

的时间比例, (X, Y) 的密度函数为 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x + 2y), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{other} \end{cases}$, 则 X 的边

缘概率密度 $f_X(x) =$ 【 】.

(A) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}(x + 1), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{other} \end{cases}$

(B) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{other} \end{cases}$

(C) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x + 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{other} \end{cases}$

(D) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x + 1), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{other} \end{cases}$

解: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \frac{2}{3}(x + 1), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{other} \end{cases}$. 故选 (D).

8、随机变量 X 与 Y 独立同分布, 且 $X \sim N(-2, 3)$, 则 (X, Y) 、 $X + Y$ 、 $X - Y$ 、 XY 、 X/Y

中服从正态分布的个数是 【 】.

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5.

解: 由定义知 (X, Y) 、 $X \pm Y$ 均服从正态分布, XY 、 X/Y 不服从正态分布. 故选 (B).

9、随机变量 (X, Y) 在 $D = \{(x, y) | -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$ 上服从均匀分布, 则 【 】.

- (A) $P(X+Y \geq 0) = \frac{1}{4}$ (B) $P(X-Y \geq 0) = \frac{1}{4}$
 (C) $P(\max\{X, Y\} \geq 0) = \frac{1}{4}$ (D) $P(\min\{X, Y\} \geq 0) = \frac{1}{4}$.

解: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -1 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{other} \end{cases}$, 所以

$$P(X+Y \geq 0) = \iint_{x+y \geq 0} f(x, y) dx dy = \iint_{y \geq -x} \frac{1}{4} dx dy = \frac{1}{2};$$

$$P(X-Y \geq 0) = \iint_{x-y \geq 0} f(x, y) dx dy = \iint_{y \leq x} \frac{1}{4} dx dy = \frac{1}{2};$$

$$P(\min\{X, Y\} \geq 0) = P(X \geq 0, Y \geq 0) = \iint_{x \geq 0, y \geq 0} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{4} dy = \frac{1}{4};$$

$$P(\max\{X, Y\} \geq 0) = 1 - P(\max\{X, Y\} < 0) = 1 - P(X < 0, Y < 0)$$

$$= 1 - \iint_{x < 0, y < 0} f(x, y) dx dy = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \quad \text{故选 (D).}$$

10、随机变量 X 与 Y 独立同分布, 记 $U = X + Y$, $V = X - Y$, 则 U 与 V 必然 【 】.

- (A) $P(UV) = 0$ (B) $P(UV) \neq 0$ (C) $\rho_{UV} = 0$ (D) $\rho_{UV} \neq 0$.

解: $\text{Cov}(U, V) = E(UV) - EU \cdot EV$

$$\begin{aligned} &= E(X^2 - Y^2) - E(X - Y) \cdot E(X + Y) \\ &= E(X^2) - E(Y^2) - E^2(X) + E^2(Y) = DX - DY = 0. \end{aligned}$$

$$\text{则 } \rho_{UV} = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sqrt{DU} \cdot \sqrt{DV}} = 0. \quad \text{故选 (C).}$$

二、选择题 (本题满分 20 分, 共有 5 道小题, 每道小题 4 分)

11、设随机变量 $X \sim t(n) (n \geq 2)$, $Y = \frac{1}{X^2}$, 则 【 】.

- (A) $Y \sim \chi^2(n)$ (B) $Y \sim \chi^2(n-1)$ (C) $Y \sim F(n, 1)$ (D) $Y \sim F(1, n)$.

解: 由 $X \sim t(n)$, 故 $X = \frac{U}{\sqrt{V/n}}$, 其中 $U \sim N(0, 1)$, $V \sim \chi^2(n)$.

于是 $Y = \frac{1}{X^2} = \frac{V/n}{U^2/1} \sim F(n, 1)$. 故选 (C).

12、 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为取自总体 $N(0, 1)$ 的简单随机样本, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$,

$T = (\bar{X} + 2)(S^2 - 2)$, 则 $E(T) = \mathbf{【 \quad 】}$.

(A) 0 (B) 2 (C) -2 (D) 4.

解: $E(\bar{X}) = 0$, $E(S^2) = 1$, 且 $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立, 故

$$\begin{aligned} E(T) &= E[(\bar{X} + 2)(S^2 - 2)] \\ &= E[(\bar{X} + 2)] \cdot E[(S^2 - 2)] = 2 \times (1 - 2) = -2. \end{aligned}$$

故选 (C).

13、设总体 X 服从参数为 λ ($\lambda > 0$) 的泊松分布, $X_1, X_2, \dots, X_n$ ($n \geq 2$) 为取自总体 X 的简单

随机样本, 则对应的统计量 $T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $T_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n} X_n$, 有 $\mathbf{【 \quad 】}$.

(A) $E(T_1) > E(T_2)$, $D(T_1) > D(T_2)$ (B) $E(T_1) > E(T_2)$, $D(T_1) < D(T_2)$

(C) $E(T_1) < E(T_2)$, $D(T_1) > D(T_2)$ (D) $E(T_1) < E(T_2)$, $D(T_1) < D(T_2)$.

解: 总体 X 服从参数为 λ ($\lambda > 0$) 的泊松分布, 故 $E(X_i) = \lambda$, $D(X_i) = \lambda$, $i = 1, 2, \dots, n$.

$$E(T_1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{n\lambda}{n} = \lambda, \quad D(T_1) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) = \frac{n\lambda}{n^2} = \frac{\lambda}{n};$$

$$E(T_2) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} E(X_i) + \frac{\lambda}{n} = (1 + \frac{1}{n})\lambda,$$

$$D(T_2) = \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-1} D(X_i) + \frac{\lambda}{n^2} = (\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n^2})\lambda.$$

所以, $E(T_1) < E(T_2)$, $D(T_1) < D(T_2)$. 故 (D) 正确.

14、设 $\bar{X}$ 是取自总体 X 中的简单随机样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的样本均值, 则 $\bar{X}$ 是 μ 的矩估计的充分条件是 $\mathbf{【 \quad 】}$.

(A) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

(B) X 服从参数为 μ 的指数分布

(C) $P(X=m) = \mu(1-\mu)^{m-1}, m=1,2,\dots$ (D) X 服从 $[0, \mu]$ 上的均匀分布.

解: 若 X 服从参数为 μ 的指数分布, 则 $E(X) = \frac{1}{\mu}$, μ 的矩估计 $\hat{\mu} = \frac{1}{\bar{X}}$, 故 (B) 错误;

若 X 服从参数为 μ 的几何分布, 则 $E(X) = \frac{1}{\mu}$, μ 的矩估计 $\hat{\mu} = \frac{1}{\bar{X}}$, 故 (C) 错误;

若 X 服从 $[0, \mu]$ 上的均匀分布, 则 $E(X) = \frac{\mu}{2}$, μ 的矩估计 $\hat{\mu} = 2\bar{X}$, 故 (D) 错误.

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $E(X) = \mu$, μ 的矩估计 $\hat{\mu} = \bar{X}$. 故 (A) 正确;

15、设总体 X 服从参数为 1 的指数分布, $X_1, X_2, \dots, X_8$ 是来自总体 X 的样本, $\bar{X}$ 是样本均值, S^2 是样本方差, A_2 是样本二阶原点矩, 则描述 $E(\bar{X})=1$ 、 $D(\bar{X})=\frac{1}{8}$ 、 $E(S^2)=1$ 、 $E(A_2)=2$ 中正确的个数是 【 】.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4.

解: 由于 X 服从参数为 1 的指数分布, 所以 $EX=1$, $DX=1$, 则

$$E(\bar{X}) = EX = 1, \quad D(\bar{X}) = \frac{DX}{n} = \frac{1}{8},$$

$$E(S^2) = DX = 1, \quad E(A_2) = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 EX_i^2 = 2. \quad \text{故 (D) 正确.}$$

三、(满分 10 分) 甲、乙、丙三人独立地破译一份密码. 已知甲、乙、丙三人能译出的概率分别为 $\frac{1}{5}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$. (1) 求密码能被破译的概率. (2) 已知密码已经被破译, 求破译密码的人恰是甲、乙、丙三人中的一个人的概率.

解: (1) 设 $A = \{\text{甲破译密码}\}$, $B = \{\text{乙破译密码}\}$, $C = \{\text{丙破译密码}\}$, $D = \{\text{密码被破译}\}$.

则 $D = A \cup B \cup C$. 因此,

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(\overline{A} \overline{B} \overline{C}) \\ &= 1 - P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) = 1 - \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

(2) $D_1 = \{\text{破译密码的人恰是甲、乙、丙三人中的一人}\}$, 则

$$D_1 = A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C, \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned}
 P(D_1) &= P(\overline{A}\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup A\overline{B}\overline{C}) = P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(A\overline{B}\overline{C}) \\
 &= P(A)P(\overline{B})P(\overline{C}) + P(\overline{A})P(B)P(\overline{C}) + P(\overline{A})P(\overline{B})P(C) \\
 &= \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{2}{15} = \frac{13}{30}.
 \end{aligned}$$

注意到 $D_1 \subset D$, 所求概率为

$$P(D_1|D) = \frac{P(D_1 D)}{P(D)} = \frac{P(D_1)}{P(D)} = \frac{13}{18}.$$

四、(满分 10 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{21}{4}x^2y & x^2 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

- (1) 求 $E(X)$, $E(Y)$ 及 $E(XY)$;
- (2) 分别求出 X 与 Y 的边缘密度函数;
- (3) 判断随机变量 X 与 Y 是否相关? 是否相互独立?

解: (1) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, y) dx dy = \frac{21}{4} \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 x^3 y dy = \frac{21}{8} \int_{-1}^1 x^3 (1 - x^4) dx = 0,$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} yf(x, y) dx dy = \frac{21}{4} \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 x^2 y^2 dy = \frac{7}{4} \int_{-1}^1 x^2 (1 - x^6) dx = \frac{7}{9},$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y) dx dy = \frac{21}{4} \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 x^3 y^2 dy = \frac{7}{4} \int_{-1}^1 x^3 (1 - x^6) dx = 0.$$

(2) 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \frac{21}{4} \int_{x^2}^1 x^2 y dy = \frac{21}{8} x^2 (1 - x^4)$

所以, 随机变量 X 的边缘密度函数为 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{21}{8} x^2 (1 - x^4) & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases};$

当 $0 \leq y \leq 1$ 时, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \frac{21}{4} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2 y dx = \frac{7}{2} y x^3 \Big|_0^{\sqrt{y}} = \frac{7}{2} y^{\frac{5}{2}}$

所以, 随机变量 Y 的边缘密度函数为 $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{7}{2} y^{\frac{5}{2}} & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

(3) 由于 $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$, 所以 X 与 Y 不相关.

$f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, 所以 X 与 Y 不独立.

五、(满分 10 分) 某商品每周的需求量 X 服从区间 $[10, 20]$ 上的均匀分布; 经销商进货的

数量 Y 也服从区间 $[10, 20]$ 上的均匀分布, 且 X, Y 相互独立. 商店每销售出一单位商品可得利润 1000 元; 若供不应求, 商店可从外部调剂供应, 每单位商品仅获利润 500 元. 求商店获利的期望值.

解: (1) 设 Z 为商店所获利润,

$$Z = g(X, Y) = \begin{cases} 1000Y + 500(X - Y), & X \geq Y \\ 1000X, & X < Y \end{cases}$$

X 和 Y 的概率密度函数分别为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & 10 \leq x \leq 20 \\ 0, & \text{其它;} \end{cases}, \quad f(y) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & 10 \leq y \leq 20 \\ 0, & \text{其它;} \end{cases}$$

X 与 Y 相互独立, (X, Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{100}, & 10 \leq x \leq 20, 10 \leq y \leq 20 \\ 0, & \text{其它;} \end{cases}$$

(2) 商店所获利润的期望值为

$$\begin{aligned} EZ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy \\ &= \int_{10}^{20} dx \int_{10}^x \frac{500y + 500x}{100} dy + \int_{10}^{20} dx \int_x^{20} \frac{1000x}{100} dy = 14166.66 \dots \end{aligned}$$

六、(满分 10 分) 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 其中参数 $\lambda (\lambda > 0)$ 未知, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求参数 λ 的矩估计量;

(2) 求参数 λ 的最大似然估计量.

$$\begin{aligned} \text{解: (1) 因为 } EX &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x \lambda^2 x e^{-\lambda x} dx = -\lambda \int_0^{+\infty} x^2 d e^{-\lambda x} \\ &= -\lambda \left[x^2 e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} - 2 \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx \right] = \frac{2}{\lambda} \end{aligned}$$

所以由 $EX = \bar{X}$, 可得参数 λ 的矩估计量为 $\hat{\lambda} = 2/\bar{X}$.

$$(2) \text{ 似然函数为 } L(\lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda^2 x_i e^{-\lambda x_i} = \lambda^{2n} \prod_{i=1}^n x_i e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}$$

$$\text{取对数, 可得 } \ln L(\lambda) = \ln \prod_{i=1}^n \lambda^2 x_i e^{-\lambda x_i} = 2n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \ln x_i.$$

令其关于 λ 的导数等于 0, 即

$$\frac{d}{d\lambda} [\ln L(\lambda)] = \frac{2n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

$$\text{解得 } \lambda \text{ 的最大似然估计值为 } \hat{\lambda} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n x_i},$$

$$\text{所以 } \lambda \text{ 的最大似然估计量为 } \hat{\lambda} = \frac{2}{\bar{X}}.$$

七、(满分 10 分) 某工厂生产一批钢索, 其断裂强度 X (单位: $10^5 Pa$) 服从正态分布 $N(\mu, 40^2)$, 从中任意抽取容量为 9 的样本, 测得断裂强度值为: 793, 782, 795, 802, 797, 775, 768, 798, 809. 据此样本值能否认为这批钢索的平均断裂强度为 $800 \times 10^5 Pa$?

(取显著性水平 $\alpha = 0.05$. $z_{0.025} = 1.96$).

解: 设在 $\alpha = 0.05$ 下的检验假设为

$$H_0: \mu = 800, \quad H_1: \mu \neq 800 \quad \text{--2 分}$$

$$\text{取检验统计量 } T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}, \text{ 则有} \quad \text{--4 分}$$

检验的拒绝域为

$$W = \left\{ \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{40} \sqrt{9} \right| \geq z_{\alpha/2} \right\}. \quad \text{--6 分}$$

其中, $z_{\alpha/2} = 1.96$, 将样本值代入算出统计量 T 的值

$$\left| \frac{791 - 800}{400} \sqrt{9} \right| = 0.675 < 1.96.$$

不在拒绝域内, 所以可以认为这批钢索的平均断裂强度为 $800 \times 10^5 Pa$. --10 分

北 京 交 通 大 学

2021-2022-1- 《概率论与数理统计 B》期末考试 参考答案

一、单选题 (本题满分 30 分, 共有 10 道小题, 每道小题 3 分)

1、图书馆新进 3 批新书, 每批 100 本, 其中每批都有 2 本概率论教材. 现从 3 批新书中各抽取一本, 这三本书恰有一本概率论教材的概率为【 B 】.

- (A) 0.02×0.98^2 (B) $3 \times 0.02 \times 0.98^2$
(C) $0.02^2 \times 0.98$ (D) $3 \times 0.02^2 \times 0.98$.

2、篮球游戏中, 甲、乙两人投篮的命中率分别为 0.6 和 0.5. 现两人各投球两次, 每投中 1 次得 1 分. 设甲得分多于乙得分的概率为 p , 则有【 B 】.

- (A) $0 \leq p < 0.25$ (B) $0.25 \leq p < 0.5$
(C) $0.5 \leq p < 0.75$ (D) $0.75 \leq p \leq 1$.

3、在矩形区域 $D: -3 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq a$ 上, 若使 $f(x, y) = \frac{xy}{1+y^2}$ 构成均匀分布的概率密度函数, 则正数 a 的值【 D 】.

- (A) $a = \frac{1}{2}$ (B) $a = \frac{1}{3}$ (C) $a = \frac{1}{6}$ (D) a 不存在.

解: 因为 $f(x, y)$ 在矩形 $D: -3 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq a$ 上, 是关于 x 的奇函数, 因此

$$\int_{-3}^3 \int_0^a f(x, y) dy dx = \int_{-3}^3 x dx \int_0^a \frac{y}{1+y^2} dy = 0, \text{ 所以, 不存在满足条件的正数 } a.$$

4、一批机器零件的寿命 X 在区间 $(0, 40)$ 上服从密度函数为 $f(x)$ 的连续分布, 其中 $f(x)$ 与 $(10+x)^{-2}$ 成正比. 则该批零件寿命小于 5 的概率为【 B 】.

- (A) $\frac{3}{10}$ (B) $\frac{5}{12}$ (C) $\frac{7}{12}$ (D) $\frac{7}{10}$.

解: 设概率密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \frac{A}{(10+x)^2}, & x \in (0, 40), \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

$$\text{则由 } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{40} \frac{A}{(10+x)^2} dx = \left. \frac{-A}{10+x} \right|_0^{40} = A \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{50} \right) = \frac{2}{25} A = 1,$$

得 $A = \frac{25}{2}$, 即 $f(x) = \begin{cases} \frac{25}{2(10+x)^2}, & x \in (0, 40) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

因此, $P(X < 5) = \int_0^5 \frac{25}{2(10+x)^2} dx = -\frac{25}{2} \cdot \frac{1}{10+x} \Big|_0^5 = \frac{25}{2} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{15} \right) = \frac{5}{12}$.

5、随机变量 X 和 Y 相互独立, 分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(y)$, 则随机变量 $U = \max\{X, Y\}$ 的分布函数为 **$F(u) = \text{【 C 】}$** .

- (A) $\max\{F_1(u), F_2(u)\}$ (B) $\min\{1 - F_1(u), 1 - F_2(u)\}$
(C) $F_1(u)F_2(u)$ (D) $1 - [1 - F_1(u)][1 - F_2(u)]$.

解: 由 X 和 Y 相互独立, 知 $U = \max\{X, Y\}$ 的分布函数为

$$\begin{aligned} F(u) &= P\{U \leq u\} = P\{\max(X, Y) \leq u\} \\ &= P\{X \leq u, Y \leq u\} = P\{X \leq u\}P\{Y \leq u\} = F_1(u)F_2(u). \end{aligned}$$

6、已知随机变量 X 和随机变量 Y 的相关系数为 0.7, 令 $U = 3X + 1$, $V = 5 - 2Y$, 则 U 和 V 的相关系数等于 **【 A 】** .

- (A) -0.7 (B) 0.7 (C) -0.3 (D) 0.3.

解: 由公式 $\rho(aX + b, cY + d) = \frac{ac}{|ac|} \rho(X, Y)$,

所以, $\rho(3X + 1, -2Y + 5) = -\rho(X, Y) = -0.7$.

7、设随机变量 $X \sim E(1)$, $Y \sim B(2, \frac{1}{3})$, 则 $P(XY \leq 2 \ln 2) = \text{【 D 】}$.

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{5}{6}$.

解: 由于 $P(XY \leq 2 \ln 2) = P(Y = 0)P(XY \leq 2 \ln 2 | Y = 0)$

$$\begin{aligned} &+ P(Y = 1)P(XY \leq 2 \ln 2 | Y = 1) \\ &+ P(Y = 2)P(XY \leq 2 \ln 2 | Y = 2) \\ &= P(Y = 0) + P(Y = 1)P(X \leq 2 \ln 2) + P(Y = 2)P(X \leq \ln 2) \\ &= \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times (1 - e^{-2 \ln 2}) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times (1 - e^{-\ln 2}) = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

8、对于任意随机变量 X 和 Y , 如果 $D(X + Y) = D(X - Y)$, 则 **【 D 】** .

- (A) X 和 Y 独立 (B) X 和 Y 不独立
(C) $DXY = DX DY$ (D) $EXY = EX EY$.

解: 由 $D(X+Y) = D(X-Y)$, 可知

$$DX + DY + 2\text{cov}(X, Y) = DX + DY - 2\text{cov}(X, Y);$$

$$\text{cov}(X, Y) = EXY - EYEY = 0; \quad EXY = EYEY.$$

9、设随机变量 X 服从二项分布 $X \sim B(n, 0.8)$, c 为任意实数, 若 $E[(X-c)^2]$ 的最小值为 12, 则

n 与以下哪一个数最接近 【 C 】.

- (A) 16 (B) 32 (C) 75 (D) 96.

解: $E[(X-c)^2]$ 的最小值, 就是 X 的方差.

$$\text{而 } D(X) = n \times 0.8 \times 0.2 = 0.16n = 12, \text{ 则 } n = 75.$$

10、设 $X \sim N(0, 3)$, $Y \sim U(0, 3)$, 且 $D(X-Y) = 3$, 则 $\rho_{X,Y} =$ 【 A 】.

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1.

解: 显然, 有 $EX = 0$, $DX = 3$, $EY = \frac{3}{2}$, $DY = \frac{3}{4}$, 故由

$$D(X-Y) = DX + DY - 2\text{cov}(X, Y) = 3 + \frac{3}{4} - 2\text{cov}(X, Y) = 3.$$

$$\text{得 } \text{cov}(X, Y) = \frac{3}{8}, \text{ 于是 } \rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{\frac{3}{8}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4}. \text{ 故选 (A).}$$

二、还是单选题 (每道小题 4 分, 请选择你认为最准确的选项, 填在指定位置)

11、设 $X \sim N(3, 9)$, 以下论述① $P(X \leq 9) = \Phi(2)$; ② $P(0 < X \leq 6) = 2\Phi(1) - 1$;

③ $P(X > 0) = \Phi(1)$; ④ $P(|X-3| \geq 6) = 2 - 2\Phi(2)$ 中, 错误的个数是 【 A 】.

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3.

解: 标准正态分布 $X \sim N(0, 1)$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$, $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$.

$$\text{因此, 有 } P(X \leq a) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right);$$

$$P(X \geq a) = 1 - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right);$$

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right);$$

$$P(|X - \mu| \leq a) = \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{a}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) - 1;$$

$$P(|X - \mu| > a) = 1 - P(|X - \mu| \leq a) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)\right).$$

12、设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ 独立同分布, 且方差存在. 设随机变量 $U = X_1 + \dots + X_5 + X_6$ 和

$V = X_5 + X_6 + \dots + X_{10}$, 则相关系数 $\rho_{U,V} = \mathbf{【 B 】}$.

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1.

解: 记 $\mathbf{E}X_i = a$, $\mathbf{D}X_i = b (i = 1, 2, \dots, 10)$.

由于 $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ 独立, 可见 $(X_1, \dots, X_6)$ 和 $(X_7, \dots, X_{10})$ 独立,

以及 $(X_1, \dots, X_4)$ 和 (X_5, X_6) 独立. 因此

$$\begin{aligned} \mathbf{cov}(U, V) &= \mathbf{cov}(X_1 + \dots + X_6, X_5 + \dots + X_{10}) \\ &= \mathbf{cov}(X_1 + \dots + X_6, X_5 + X_6) \\ &= \mathbf{cov}(X_5 + X_6, X_5 + X_6) \\ &= \mathbf{D}(X_5 + X_6) = \mathbf{D}X_5 + \mathbf{D}X_6 = 2b. \end{aligned}$$

于是, 由 $\mathbf{D}U = \mathbf{D}V = 6b$, 因此 $\rho = \frac{2b}{\sqrt{\mathbf{D}U \mathbf{D}V}} = \frac{2b}{6b} = \frac{1}{3}$.

13、 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 为使 $\mathbf{D} = k \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$

成为总体方差 σ^2 的无偏估计量, 应取 $k = \mathbf{【 C 】}$

(A) $\frac{1}{n-1}$ (B) $\frac{1}{n}$ (C) $\frac{1}{2(n-1)}$ (D) $\frac{1}{2n}$.

解: 由已知 $\mathbf{E}X^2 = \sigma^2 + \mu^2$. 假设统计量 $\mathbf{D}$ 是总体方差 σ^2 的无偏估计量,

$$\begin{aligned} \text{则 } \mathbf{E}D &= k \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{E}(X_{i+1} - X_i)^2 = k \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{E}(X_{i+1}^2 + X_i^2 - 2X_i X_{i+1}) \\ &= k \sum_{i=1}^{n-1} (2\sigma^2 + 2\mu^2 - 2\mu^2) = 2k(n-1)\sigma^2 = \sigma^2. \text{ 故 } k = \frac{1}{2(n-1)}. \end{aligned}$$

14、设总体 X 的概率分布为 $P(X=1) = \frac{1-\theta}{2}$, $P(X=2) = P(X=3) = \frac{1+\theta}{4}$, 利用来自总体的样

本值1, 3, 2, 2, 1, 3, 1, 2, 可得 θ 的最大似然估计值为【 A 】.

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{5}{8}$.

解: 构造似然函数 $L(\theta) = \left(\frac{1-\theta}{2}\right)^3 \left(\frac{1+\theta}{4}\right)^5 = \frac{(1-\theta)^3(1+\theta)^5}{2^{13}}$.

则 $\ln L(\theta) = 3\ln(1-\theta) + 5\ln(1+\theta) - 13\ln 2$,

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{3}{\theta-1} + \frac{5}{\theta+1} = \frac{8\theta-2}{(\theta-1)(\theta+1)} = 0, \text{ 得 } \hat{\theta} = \frac{1}{4}.$$

15、设样本 X_1, X_2, X_3 是来自总体 $X \sim N(0, 1)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 为样本均值, S^2 为样本方差,

则 $E[(\bar{X} - S^2)^2] =$ 【 A 】.

- (A) $\frac{7}{3}$ (B) 3 (C) $\frac{16}{3}$ (D) $\frac{25}{3}$.

解: 易知, $\bar{X} \sim N(0, \frac{1}{3})$, $2S^2 \sim \chi^2(2)$, 且 $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立,

$$\begin{aligned} \text{因此, } E[(\bar{X} - S^2)^2] &= E[(\bar{X}^2 - 2\bar{X} \cdot S^2 + (S^2)^2)] \\ &= E(\bar{X}^2) - 2E(\bar{X}) \cdot E(S^2) + E[(S^2)^2] \\ &= D(\bar{X}) - 0 + D(S^2) + E[(S^2)^2] = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} D(2S^2) + 1 = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

三、(满分 10 分) X 和 Y 分别表示甲、乙两公司 2021 年上半年的利润(亿元). 某金融机构通过对 X 和 Y 的相关数据进行建模, 获得如下函数:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{18}, & 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

1) 证明 $f(x, y)$ 是概率密度函数.

2) 计算甲公司利润大于 2, 乙公司利润大于 1 的概率.

3) 计算乙公司利润大于 1 的概率.

解: 1) 因为 $f(x, y) \geq 0$, 且

$$\int_0^3 \int_0^2 f(x, y) dy dx = \int_0^3 \int_0^2 \frac{x^2 y}{18} dy dx = \int_0^3 \frac{x^2}{36} (y^2)_0^2 dx = \int_0^3 \frac{x^2}{9} dx = 1,$$

所以, $f(x, y)$ 是一个概率密度函数.

--4 分

$$\begin{aligned}
 2) \quad P(X > 2, Y > 1) &= \int_2^3 \int_1^2 \frac{x^2 y}{18} dy dx \\
 &= \int_2^3 \frac{x^2}{36} (y^2)_1^2 dx = \int_2^3 \frac{3x^2}{36} dx = \frac{27-8}{36} = \frac{19}{36}. \quad \text{--7 分}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad P(Y > 1) &= \int_0^3 \int_1^2 \frac{x^2 y}{18} dy dx \\
 &= \int_0^3 \frac{x^2}{36} (y^2)_1^2 dx = \int_0^3 \frac{3x^2}{36} dx = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}. \quad \text{--10 分}
 \end{aligned}$$

四、(满分 10 分) 平面区域 D 由直线 $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ 所围成, 二维随机变量 (X, Y)

服从区域 D 上的均匀分布.

1) 求二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数 $f(x, y)$.

2) 求随机变量 Y 的边缘密度函数 $f_Y(y)$.

3) 求条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$.

解: 1) 区域 D 的面积为 $A = \int_1^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{3}{2}$,

所以, 而为随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3} & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}. \quad \text{--3 分}$$

$$2) \text{ 当 } 0 < y \leq 1 \text{ 时, } f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_1^2 \frac{2}{3} dx = \frac{2}{3},$$

$$\text{当 } 1 < y < 2 \text{ 时, } f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_y^2 \frac{2}{3} dx = \frac{2}{3}(2-y),$$

所以, 随机变量 Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{3} & 0 < y \leq 1 \\ \frac{2}{3}(2-y) & 1 < y < 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}. \quad \text{--6 分}$$

3) 当 $0 < y \leq 1$ 时, $f_Y(y) = \frac{2}{3} > 0$, 此时条件密度函数为

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} 1 & 1 < x < 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}.$$

当 $1 < y < 2$ 时, $f_Y(y) = \frac{2}{3}(2-y) > 0$, 此时条件密度函数为

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2-y} & y < x < 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad \text{--10 分}$$

五、(满分 10 分) 某公司有 260 台电话分机. 每台分机独立工作, 且都有 4% 的概率请求外部通信信道. 利用中心极限定理, 估计该公司应配备多少外部通信信道, 以使信道请求得到满足的概率超过 95%.

解: 设 X_k 表示第 k 台分机请求外部通信信道 ($k = 1, 2, \dots, 260$).

则 $X_k \sim B(1, 0.04)$, 因此, $E(X_k) = 0.04$, $D(X_k) = 0.0384$, 而 $X = \sum_{k=1}^{260} X_k$,

由独立分布的中心极限定理, 随机变量

$$\frac{X - 260 \times 0.04}{\sqrt{260 \times 0.0384}} = \frac{\sum_{k=1}^{260} X_k - 260 \times 0.04}{\sqrt{260 \times 0.0384}} \quad \text{--4 分}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } P(X \leq n) &= P\left(\frac{X - 260 \times 0.04}{\sqrt{260 \times 0.0384}} \leq \frac{n - 260 \times 0.04}{\sqrt{260 \times 0.0384}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{n - 260 \times 0.04}{\sqrt{260 \times 0.0384}}\right) \geq 0.95. \end{aligned} \quad \text{--8 分}$$

$$\text{即 } \frac{n - 260 \times 0.04}{\sqrt{260 \times 0.0384}} \geq 1.645, \text{ 解, } n \geq 15.5978, \text{ 即 } n \geq 16. \quad \text{--10 分}$$

六、(满分 10 分) 设来自总体 X 的简单随机样本 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 总体 X 的概率分布为

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & (1-\theta)^2 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } 0 < \theta < 1. \text{ 分别以 } \nu_1, \nu_2 \text{ 表示 } (X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ 中 } 1, 2 \text{ 出现的}$$

次数, 试求:

- 1) 未知参数 θ 的最大似然估计量.
- 2) 未知参数 θ 的矩估计量.
- 3) 当样本值为 $(1, 1, 2, 1, 3, 2)$ 时的最大似然估计值和矩估计值.

解: (1) 求参数 θ 的最大似然估计量. 样本 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 中 1, 2 和 3 出现次数分别为

ν_1, ν_2 和 $n - \nu_1 - \nu_2$, 则似然函数和似然方程为

$$L(\theta) = \theta^{2\nu_1} [2\theta(1-\theta)]^{\nu_2} (1-\theta)^{2(n-\nu_1-\nu_2)} = 2^{\nu_2} \theta^{2\nu_1+\nu_2} (1-\theta)^{2n-2\nu_1-\nu_2},$$

$$\ln L(\theta) = 2^{v_2} + (2v_1 + v_2) \ln \theta + (2n - 2v_1 - v_2) \ln(1 - \theta),$$

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{2v_1 + v_2}{\theta} - \frac{2n - 2v_1 - v_2}{1 - \theta} = 0.$$

似然方程的惟一解，就是参数 θ 的最大似然估计量： $\hat{\theta} = \frac{2v_1 + v_2}{2n}$. --4 分

(2) 求参数 θ 的矩估计量. 总体 X 的数学期望为： $EX = \theta^2 + 4\theta(1 - \theta) + 3(1 - \theta)^2$.

在上式中用样本均值 $\bar{X}$ 估计数学期望 EX ，可得 θ 的矩估计量：

$$\hat{\theta} = \frac{1}{2}(3 - \bar{X}).$$
 --8 分

(3) 对于样本值 $(1, 1, 2, 1, 3, 2)$ ，由上述一般公式，可得最大似然估计值

$$\hat{\theta} = \frac{2v_1 + v_2}{2n} = \frac{2 \times 3 + 2}{12} = \frac{2}{3};$$

$$\text{矩估计值 } \hat{\theta} = \frac{1}{2}(3 - \bar{X}) = \frac{3}{2} - \frac{5}{6} = \frac{2}{3}.$$
 --10 分

七、(满分 10 分) 某批矿砂的镍含量（单位：%）的测定总值 X 服从正态分布，从中任意抽取 5 个样品，测得镍含量为：3.29, 3.28, 3.25, 3.28, 3.27. 据此样本值，能否认为这批矿砂的镍含量均值为 3.25%（取显著性水平 $\alpha = 0.01$. 且 $t_{0.005}(4) = 4.6041$, $t_{0.005}(5) = 4.0322$, $t_{0.005}(6) = 3.7074$, $t_{0.01}(4) = 3.7469$, $t_{0.01}(5) = 3.3649$, $t_{0.01}(6) = 3.1427$ ）.

解：由题意，可知本问题是在 σ^2 未知的情况下，均值 μ 的假设检验问题.

$$H_0: \mu = \mu_0 = 3.25, \quad H_1: \mu \neq \mu_0.$$
 --2 分

$$\text{取检验统计量 } T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$
 --4 分

则当显著性水平 $\alpha = 0.01$ ，检验的拒绝域为

$$W = \{|T| > t_{\alpha/2}(n-1)\}.$$
 --6 分

其中， $t_{0.005}(4) = 4.6041$, $n = 5$, $\bar{X} = 3.274$, $S^2 = 2.3 \times 10^{-4}$, $S = 0.0152$.

将样本值代入算出统计量 T 的值

$$|t| = \frac{3.274 - 3.25}{0.0152/\sqrt{5}} \approx 0.3531 < 4.6041.$$
 --8 分

因此，应接受 $H_0: \mu = \mu_0 = 3.25$,

可以认为这批矿砂的镍含量的均值为 3.25%. --10 分

北 京 交 通 大 学

2022-2023-1- 《概率论与数理统计 B》期末考试 参考答案

一、单选题 (本题满分 30 分, 共有 10 道小题, 每道小题 3 分)

1、设 A, B, C 是随机事件, 且 A 与 B 互斥, A 与 C 互斥, B 与 C 相互独立. 若 $P(A) = P(B)$

$$= P(C) = \frac{1}{3}, \text{ 则 } P(B \cup C | A \cup B \cup C) = \text{【 】}.$$

- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{5}{8}$ (D) $\frac{7}{8}$.

【解】直接代入条件概率的公式, 得

$$\begin{aligned} P(B \cup C | A \cup B \cup C) &= \frac{P(B \cup C)}{P(A \cup B \cup C)} \\ &= \frac{P(B) + P(C) - P(BC)}{P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

故选 (C).

2、设 A, B 为随机事件, 且 $0 < P(B) < 1$, 下列命题中为假命题的是 【 】.

- (A) 若 $P(A|B) = P(A)$, 则 $P(A|\bar{B}) = P(A)$
 (B) 若 $P(A|B) > P(A)$, 则 $P(\bar{A}|\bar{B}) > P(\bar{A})$
 (C) 若 $P(A|B) > P(A|\bar{B})$, 则 $P(A|B) > P(A)$
 (D) 若 $P(A|A \cup B) > P(\bar{A}|A \cup B)$, 则 $P(A) > P(B)$.

【解】当 $0 < P(B) < 1$ 时, $P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(A|\bar{B}) = P(A)$, 因此 (A) 正确;

$$\text{又 } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} > P(A) \Rightarrow P(AB) > P(A) \cdot P(B), \text{ 因此, 有}$$

$$\begin{aligned} P(\bar{A}\bar{B}) &= 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) \\ &> 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) \\ &= (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}). \end{aligned}$$

$$\text{故 } P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})} > P(\bar{A}),$$

因此 (B) 正确;

$$\text{再由 } P(A|B) > P(A|\bar{B}) \Leftrightarrow \frac{P(AB)}{P(B)} > \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)}$$

$$\Leftrightarrow P(AB) > P(A)P(B),$$

因此 (C) 正确;

$$\text{但是, } P(A|A \cup B) = \frac{P(A(A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A) + P(B) - P(AB)},$$

$$P(\bar{A}|A \cup B) = \frac{P(\bar{A}(A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(B) - P(AB)}{P(A) + P(B) - P(AB)},$$

所以, 若 $P(A|A \cup B) > P(\bar{A}|A \cup B)$, 则 $P(A) > P(B) - P(AB)$,

但不能保证 $P(A) > P(B)$.

故选 (D).

3、设随机变量 $X \sim U(0, 3)$, 随机变量 Y 服从参数为 2 的泊松分布, 且 X 与 Y 的协方差为 -1,

则 $D(2X - Y + 1) = \underline{\hspace{1cm}} \text{】}$.

(A) 1 (B) 5 (C) 9 (D) 12.

【解】 $D(2X - Y + 1) = 4DX + DY - 4\text{cov}(X, Y) = 3 + 2 - 4 \cdot (-1) = 9$. 故选 (C).

4、随机变量 X 与 Y 独立同分布, 记 $U = X - Y$, $V = X + Y$, 则 U 与 V 必然 $\underline{\hspace{1cm}} \text{】}$.

(A) 独立 (B) 不独立
(C) 相关系数为零 (D) 相关系数不为零.

【解】 $\text{Cov}(U, V) = E(UV) - EU \cdot EV$

$$\begin{aligned} &= E(X^2 - Y^2) - E(X - Y) \cdot E(X + Y) \\ &= E(X^2) - E(Y^2) - E^2(X) + E^2(Y) = DX - DY = 0. \end{aligned}$$

$$\text{则 } \rho_{UV} = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sqrt{DU} \cdot \sqrt{DV}} = 0. \quad \text{故选 (C).}$$

5、甲、乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球, 先从甲盒中任取一球, 观察颜色后放入乙盒中,

再从乙盒中任取一球. 令 X, Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球的个数, 则 X 与 Y 的相关系数为 $\underline{\hspace{1cm}} \text{】}$.

(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{3}{10}$ (D) $\frac{2}{5}$.

解: X 与 Y 的取值仅限于 0, 1, 因此, 有

$$P(X=1, Y=1) = P(X=1) \cdot P(Y=1|X=1) = \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10};$$

$$P(X=1, Y=0) = P(X=1) \cdot P(Y=0|X=1) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{10};$$

$$P(X=0, Y=1) = P(X=0) \cdot P(Y=1|X=0) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{10};$$

$$P(X=0, Y=0) = P(X=0) \cdot P(Y=0|X=0) = \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}.$$

则 (X, Y) 的联合分布律以及边缘分布律如下所示:

$\begin{matrix} & Y \\ X & \end{matrix}$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	0.3	0.2	0.5
1	0.2	0.3	0.5
$p_{\cdot j}$	0.5	0.5	

于是, $EX = EY = 0.5$, $DX = DY = 0.25$, $E(XY) = 0.3$.

因此, $Cov(X, Y) = 0.3 - 0.5 \times 0.5 = 0.05$, $\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}} = \frac{1}{5}$. 故选 (B).

6、设随机变量 X_i ($i=1, 2$) 的概率分布为

X_i	0	1	2
P	0.5	0.25	0.25

且满足 $P(X_1 X_2 = 0) = 1$, 则 $P(X_1 = X_2) = \underline{\hspace{1cm}}$.

(A) 0 (B) 0.25 (C) 0.5 (D) 0.75.

【解】记 $p_{ij} = P(X_1 = i, X_2 = j)$, $p_{i\cdot} = P(X_1 = i)$, $p_{\cdot j} = P(X_2 = j)$, ($i, j = 0, 1, 2$).

由 $P(X_1 X_2 = 0) = 1$, 得 $P(X_1 X_2 \neq 0) = p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} = 0$.

所以, $p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} = 0$. 所以, $p_{11} = p_{12} = p_{21} = p_{22} = 0$ (非负性).

又 $p_{1\cdot} = P\{X_1 = 1\} = p_{10} + p_{11} + p_{12} = p_{10} + 0 + 0 = p_{10}$, 所以, $p_{10} = p_{1\cdot} = \frac{1}{4}$.

$p_{2\cdot} = P\{X_2 = 1\} = p_{20} + p_{21} + p_{22} = p_{20} + 0 + 0 = p_{20}$, 所以, $p_{20} = p_{2\cdot} = \frac{1}{4}$.

所以, $p_{00} = p_{0\cdot} - p_{10} - p_{20} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$.

所以, $P\{X_1 = X_2\} = p_{00} + p_{11} + p_{22} = 0$.

故选 (A).

7、设随机变量 $X \sim N(0, 1)$, 在 $X = x$ 条件下的随机变量 $Y \sim N(x, 1)$, 则 X 与 Y 相关系数为

$\underline{\hspace{1cm}}$.

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【解法 1】 X 的概率密度函数为: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $-\infty < x < +\infty$,

Y 关于 $X = x$ 的条件密度为: $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2}}$, $-\infty < x < +\infty$.

于是 X 与 Y 的联合密度为:

$$f(x, y) = f(x)f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2+y^2-2xy+x^2}{2}}, \quad -\infty < x, y < +\infty.$$

于是 Y 的边缘密度为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2} e^{-\frac{y^2}{4}} dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{4}}, \quad -\infty < y < +\infty.$$

即 Y 服从二维正态 $N(0, 2)$. 则 $f(x, y)$ 分布的概率密度形式为:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}}.$$

对比 X 与 Y 的联合密度可得, $\mu_1 = \mu_2 = 0, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = \sqrt{2}$,

因此, $\sqrt{2}\sqrt{1-\rho^2} = 1$, 且 $\rho > 0$, 于是 $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 (C).

【解法 2】 $X \sim N(0, 1) \Rightarrow EX = 0, DX = 1$;

由 X 与 Y 的联合密度为

$$f(x, y) = f(x)f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2+y^2-2xy+x^2}{2}}, \quad -\infty < x, y < +\infty.$$

$$\begin{aligned} EXY &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} xy \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2x^2+y^2-2xy}{2}} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2x^2+y^2-2xy}{2}} dy \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t} \cdot 2t^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2t}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1. \end{aligned}$$

$$EY = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0,$$

$$EY^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} (1+x^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

$$\rho_{XY} = \frac{EXY - EX \cdot EY}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}} = \frac{EXY}{\sqrt{EY^2 - (EY)^2}} = \frac{EXY}{\sqrt{EY^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

8、设 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ 的简单随机样本, 令

$\theta = \mu_1 - \mu_2$, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$, $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k$, $\hat{\theta} = \bar{X} - \bar{Y}$, 则【 】.

$$(A) \quad E(\hat{\theta}) = \theta, \quad D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n} \quad (B) \quad E(\hat{\theta}) = \theta, \quad D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$$

$$(C) \quad E(\hat{\theta}) \neq \theta, \quad D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n} \quad (D) \quad E(\hat{\theta}) \neq \theta, \quad D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}.$$

解: 显然, $\bar{X} - \bar{Y}$ 服从正态分布, 且

$$E(\hat{\theta}) = E(\bar{X} - \bar{Y}) = E(\bar{X}) - E(\bar{Y}) = \mu_1 - \mu_2 = \theta, \quad \text{故 (C)、(D) 不正确;}$$

再由 $D(\hat{\theta}) = D(\bar{X} - \bar{Y}) = D(\bar{X}) + D(\bar{Y}) - 2Cov(\bar{X}, \bar{Y})$, 以及

$$\begin{aligned} D(\bar{X}) &= \frac{\sigma_1^2}{n}, \quad D(\bar{Y}) = \frac{\sigma_2^2}{n}, \\ Cov(\bar{X}, \bar{Y}) &= Cov\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k, \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n Y_l\right) = \frac{1}{n^2} Cov\left(\sum_{k=1}^n X_k, \sum_{l=1}^n Y_l\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n Cov(X_k, Y_l) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n Cov(X_k, Y_k) = \frac{1}{n} Cov(X_1, Y_1) \\ &= \frac{1}{n} \sqrt{D(X_1)D(Y_1)}\rho_{X_1Y_1} = \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{n}, \end{aligned}$$

----注意 X_k, Y_l 独立性

$$\text{因此, } D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}. \quad \text{故选 (B).}$$

9、设总体 X 的概率分布为 $P(X=1) = \frac{1-\theta}{2}$, $P(X=2) = P(X=3) = \frac{1+\theta}{4}$, 利用来自总体的样本值 1, 3, 2, 2, 1, 3, 1, 2, 可得 θ 的最大似然估计值为 【 】.

$$(A) \quad \frac{1}{4} \quad (B) \quad \frac{3}{8} \quad (C) \quad \frac{1}{2} \quad (D) \quad \frac{5}{8}.$$

$$\text{解: 构造似然函数 } L(\theta) = \left(\frac{1-\theta}{2}\right)^3 \left(\frac{1+\theta}{4}\right)^5 = \frac{(1-\theta)^3(1+\theta)^5}{2^{13}}.$$

$$\text{则 } \ln L(\theta) = 3\ln(1-\theta) + 5\ln(1+\theta) - 13\ln 2,$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{3}{\theta-1} + \frac{5}{\theta+1} = \frac{8\theta-2}{(\theta-1)(\theta+1)} = 0, \quad \text{得 } \hat{\theta} = \frac{1}{4}. \quad \text{故选 (A).}$$

注: 一般应该进行验证.

10、二维随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	0	1	2
-1	0.1	0.1	b
1	a	0.1	0.1

已知事件 $\{\max(X, Y) = 2\}$ 与事件 $\{\min(X, Y) = 1\}$ 相互独立, 则 $Cov(X, Y) = \text{【 】}$.

$$(A) \quad -0.6 \quad (B) \quad -0.36 \quad (C) \quad 0.48 \quad (D) \quad 0.6.$$

【解】首先有 $P(\max(X, Y) = 2) = P(Y = 2) = b + 0.1$,

$$P(\min(X, Y) = 1) = P(X = 1, Y = 1) + P(X = 1, Y = 2) = 0.2,$$

$$P(\max(X, Y) = 2, \min(X, Y) = 1) = P(X = 1, Y = 2),$$

由独立性条件可得

$$P(\max(X, Y) = 2, \min(X, Y) = 1) = P(\max(X, Y) = 2)P(\min(X, Y) = 1),$$

$$\text{即 } 0.2(b + 0.1) = 0.1 \Rightarrow b = 0.4;$$

再由分布律的归一性, 可得 $0.4 + a + b = 1 \Rightarrow a = 0.2$.

于是 $EX = 0.4 - 0.6 = -0.2$, $EY = 0.1 + 1 = 1.2$,

$$EXY = (-1) \cdot 0.1 + (-2) \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.1 = -0.6,$$

$$\text{Cov}(X, Y) = EXY - EX \cdot EY = -0.36.$$

故选 (B).

二、还是单选题 (本题满分 20 分, 共有 5 道小题, 每道小题 4 分)

11、设随机变量 $X \sim N(-1, 2)$, $Y \sim N(1, 2)$, 而且 X 与 Y 不相关, 令 $U = aX + Y$, $V = X + bY$,

且 U 与 V 也不相关, 则有 【 】.

(A) $a = b = 0$ (B) $a = b \neq 0$ (C) $a + b = 0$ (D) $ab = 0$.

【解】 $\text{cov}(U, V) = \text{cov}(aX + Y, X + bY)$

$$= a \text{cov}(X, X) + (ab + 1) \text{cov}(X, Y) + b \text{cov}(Y, Y)$$

$$= aD(X) + (ab + 1) \text{cov}(X, Y) + bD(Y).$$

再由于随机变量 $X \sim N(-1, 2)$, $Y \sim N(1, 2)$, 而且 X 与 Y 不相关, 所以

$$D(X) = 2, D(Y) = 2, \text{cov}(X, Y) = 0.$$

因此, $\text{cov}(U, V) = 2(a + b)$.

随机变量 U 与 V 不相关, 当且仅当 $\text{cov}(U, V) = 2(a + b) = 0$.

故选 (C).

12、设 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 为使

$D = k \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$ 成为总体方差 σ^2 的无偏估计量, 应取 $k =$ 【 】.

(A) $\frac{1}{n-1}$ (B) $\frac{1}{n}$ (C) $\frac{1}{2(n-1)}$ (D) $\frac{1}{2n}$.

【解】由已知 $EX^2 = \sigma^2 + \mu^2$. 假设统计量 D 是总体方差 σ^2 的无偏估计量, 则

$$ED = k \sum_{i=1}^{n-1} E(X_{i+1} - X_i)^2 = k \sum_{i=1}^{n-1} E(X_{i+1}^2 + X_i^2 - 2X_i X_{i+1})$$

$$= k \sum_{i=1}^{n-1} (2\sigma^2 + 2\mu^2 - 2\mu^2) = 2k(n-1)\sigma^2 = \sigma^2. \text{ 故 } k = \frac{1}{2(n-1)}. \quad \text{故选 (C).}$$

13、设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立同分布, 且 X_i 的四阶矩存在, 记 $E(X_i^k) = \mu_k (k=1, 2, 3, 4)$,

则根据切比雪夫不等式, 对任意 $\varepsilon > 0$, 有 $P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \mu_2\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \mathbf{[\quad]}$.

$$(A) \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n\varepsilon^2} \quad (B) \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2} \quad (C) \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{n\varepsilon^2} \quad (D) \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}.$$

【解】 $\mu_k = EX^k$, $\mu_2 = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2\right) = EX^2$,

$$D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot (EX^4 - (EX^2)^2) = \frac{1}{n} (\mu_4 - \mu_2^2),$$

$$\text{故 } P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \mu_2\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n\varepsilon^2}. \quad \text{故选 (A).}$$

14、设 X_1, X_2, X_3 是来自总体 $X \sim N(0, 1)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 为样本均值, S^2 为样本方差, 则

$$E[(\bar{X} - S^2)^2] = \mathbf{[\quad]}.$$

$$(A) \frac{7}{3} \quad (B) 3 \quad (C) \frac{16}{3} \quad (D) \frac{25}{3}.$$

【解】易知, $\bar{X} \sim N(0, \frac{1}{3})$, $2S^2 \sim \chi^2(2)$, 且 $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立,

$$\text{因此, } E[(\bar{X} - S^2)^2] = E[(\bar{X}^2 - 2\bar{X} \cdot S^2 + (S^2)^2)]$$

$$= E(\bar{X}^2) - 2E(\bar{X}) \cdot E(S^2) + E[(S^2)^2]$$

$$= D(\bar{X}) - 0 + D(S^2) + [E(S^2)]^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} D(2S^2) + 1 = \frac{7}{3}. \quad \text{故选 (A).}$$

15、设 $X_1, X_2, \dots, X_{16}$ 是来自总体 $N(\mu, 4)$ 的简单随机样本, 考虑假设检验问题: $H_0: \mu \leq 10$,

$H_1: \mu > 10$. $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数, 若该检验问题的拒绝域为 $W = \{\bar{X} \geq 11\}$, 其中

$$\bar{X} = \frac{1}{16} \sum_{k=1}^{16} X_k, \text{ 则 } \mu = 11.5 \text{ 时, 该检验犯第二类错误的概率为 } \mathbf{[\quad]}.$$

$$(A) 1 - \Phi(0.5) \quad (B) 1 - \Phi(1) \quad (C) 1 - \Phi(1.5) \quad (D) 1 - \Phi(2).$$

【解】第二类错误是当 H_1 成立时接受 H_0 的概率, $P(\bar{X} < 11 | \mu = 11.5)$.

由于 $\bar{X} \sim N(11.5, \frac{1}{4})$, 因此,

$$P(\bar{X} < 11) = P\left(\frac{\bar{X} - 11.5}{0.5} < \frac{11 - 11.5}{0.5}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1). \quad \text{故选 (B).}$$

三、(满分 10 分) 设随机变量 $X = e^Y$ 服从参数为 e 的指数分布, 求随机变量 Y 的概率密度.

【解 1】由于 $Y = \ln X$, 应用求单调函数概率密度的公式, Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = |h'(y)| \cdot f_X[h(y)]$$

其中 $h(y) = e^y$ 是 $y = \ln x$ 的反函数, $f_X(x)$ 是随机变量 X 的概率密度, 因此

$$f_Y(y) = e^y \cdot e \cdot e^{-e \cdot h(y)} = e^{y+1} \cdot e^{-e^{y+1}}.$$

【解 2】先求 $Y = \ln X$ 的分布函数 $F_Y(y)$, 再将其对 y 求导得 $f_Y(y)$. 即所谓分布函数法.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{\ln X \leq y\} = P\{X \leq e^y\} \\ &= 1 - e^{-e \cdot e^y} = 1 - e^{-e^{y+1}} \end{aligned}$$

$$\text{所以, } f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = e^{y+1} \cdot e^{-e^{y+1}}.$$

四、(满分 10 分) 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} e^{x-\theta} & , x \leq \theta \\ 0 & , x > \theta \end{cases}$, 其中 θ 是未知参数, 从总体

X 中抽取简单随机样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$, 记 $\hat{\theta} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. (1) 求总体 X 的

分布函数 $F(x)$; (2) 求统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $G(x)$; (3) 求 $\hat{\theta}$ 的期望 $E\hat{\theta}$.

解: 1) 当 $x \geq \theta$ 时, $F(x) = 1$;

$$\text{当 } x < \theta \text{ 时, } F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x e^{t-\theta} dt = e^{x-\theta}.$$

$$\text{总体 } X \text{ 的分布函数 } F(x) = \begin{cases} e^{x-\theta} & x < \theta \\ 1 & x \geq \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad G(x) &= P\{\hat{\theta} \leq x\} = P\{\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq x\} \\ &= P\{X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x\} = P\{X_1 \leq x\} P\{X_2 \leq x\} \cdots P\{X_n \leq x\} \\ &= P\{X \leq x\} P\{X \leq x\} \cdots P\{X \leq x\} = [F(x)]^n. \end{aligned}$$

$$\hat{\theta} \text{ 的分布函数为 } G(x) = \begin{cases} e^{n(x-\theta)} & x < \theta \\ 1 & x \geq \theta \end{cases}$$

$$3) \text{ 求 } \hat{\theta} \text{ 的概率密度 } g(x) = \begin{cases} n \cdot e^{n(x-\theta)} & x < \theta \\ 0 & x \geq \theta \end{cases}$$

$$E\hat{\theta} = \int_{-\infty}^{\theta} x n e^{n(x-\theta)} dx \stackrel{y=\theta-x}{=} \int_0^{+\infty} n(\theta-y) e^{-ny} dy = \theta - \frac{1}{n}.$$

五、(满分 10 分) 某种元件是一个球体，其直径是一个随机变量 X (单位: mm)，它服从正态分布 $N(\mu, 1)$ 。假设: 当 $10 \leq X \leq 12$ 时，每件可获利润 c_1 元; 当 $X < 10$ 时，每件亏损 c_2 元; 当 $X > 12$ 时，每件亏损 c_3 元。问 μ 取何值时，可以使每件的期望利润为最大?

【解】 设 Y 为每件产品的利润，则

$$Y = \begin{cases} c_1 & 10 \leq X \leq 12 \\ -c_2 & X < 10 \\ -c_3 & X > 12 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{因此, } g(\mu) &= E(Y) = c_1 P\{10 \leq X \leq 12\} - c_2 P\{X < 10\} - c_3 P\{X > 12\} \\ &= c_1 P\left\{\frac{10-\mu}{1} \leq \frac{X-\mu}{1} \leq \frac{12-\mu}{1}\right\} - c_2 P\left\{\frac{X-\mu}{1} < \frac{10-\mu}{1}\right\} - c_3 P\left\{\frac{X-\mu}{1} > \frac{12-\mu}{1}\right\} \\ &= c_1 \left(\Phi\left(\frac{12-\mu}{1}\right) - \Phi\left(\frac{10-\mu}{1}\right) \right) - c_2 \Phi\left(\frac{10-\mu}{1}\right) - c_3 \left(1 - \Phi\left(\frac{12-\mu}{1}\right) \right) \\ &= c_1 (\Phi(12-\mu) - \Phi(10-\mu)) - c_2 \Phi(10-\mu) - c_3 (1 - \Phi(12-\mu)) \\ &= (c_1 + c_3) \Phi(12-\mu) - (c_1 + c_2) \Phi(10-\mu) - c_3. \end{aligned}$$

$$\text{所以, } g'(\mu) = -(c_1 + c_3) \Phi'(12-\mu) + (c_1 + c_2) \Phi'(10-\mu)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} (c_1 + c_3) e^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (c_1 + c_2) e^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}}.$$

$$\text{令 } g'(\mu) = 0, \text{ 得 } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (c_1 + c_3) e^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (c_1 + c_2) e^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}}.$$

$$\text{得 } (c_1 + c_3) e^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}} = (c_1 + c_2) e^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}}, \text{ 即 } (c_1 + c_3) e^{-72+12\mu} = (c_1 + c_2) e^{-50+10\mu}.$$

$$\text{所以, } \frac{c_1 + c_3}{c_1 + c_2} = e^{22-2\mu}. \text{ 所以, 得驻点 } \mu_0 = 11 - \frac{1}{2} \ln \frac{c_1 + c_3}{c_1 + c_2}.$$

由于 $\mu_0 = 11 - \frac{1}{2} \ln \frac{c_1 + c_3}{c_1 + c_2}$ 是函数 $g(\mu)$ 的惟一极值点而且是极大值点样本

所以它是 $g(\mu)$ 的最大值点. 即当 $\mu_0 = 11 - \frac{1}{2} \ln \frac{c_1 + c_3}{c_1 + c_2}$ 时, 期望利润 $g(\mu) = E(Y)$ 取最大值.

六、(满分 10 分) 设某种电子元件的寿命 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$, 其中 $\theta > 0$

是常数. 从总体中随机抽取 n 个同类型元件组成串联电路系统, 假设各个元件独立工作, 记该系统的寿命为 Y , 并用 $\hat{\theta} = nY$ 作为 θ 的估计量. 求 (1) Y 的密度函数; (2) 验证 $\hat{\theta} = nY$ 是 θ 的无偏估计量; (3) 求 $D(\hat{\theta})$.

【解】1) X 的分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}.$$

设串联系统中第 i 个元件寿命为 X_i ($i = 1, 2, \dots, n$), 则 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立同分布.

又由于系统是串联而成, 故

$$Y = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}.$$

因此, Y 的密度函数为

$$f_Y(y) = n(1 - F(y))^{n-1} f(y) = \begin{cases} \frac{n}{\theta} e^{-\frac{ny}{\theta}} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} 2) \quad E(\hat{\theta}) &= E(nY) = nE(Y) = n \int_0^{+\infty} y \cdot \frac{n}{\theta} e^{-\frac{ny}{\theta}} dy = \frac{n^2}{\theta} \int_0^{+\infty} ye^{-\frac{ny}{\theta}} dy \\ &= -nye^{-\frac{ny}{\theta}} \Big|_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} e^{-\frac{ny}{\theta}} dy = n \int_0^{+\infty} e^{-\frac{ny}{\theta}} dy = \theta e^{-\frac{ny}{\theta}} \Big|_0^{+\infty} = \theta. \end{aligned}$$

所以 $\hat{\theta} = nY$ 是 θ 的无偏估计量.

$$\begin{aligned} 3) \quad E(\hat{\theta}^2) &= E[(nY)^2] = n^2 E(Y^2) = n^2 \int_0^{+\infty} y^2 \cdot \frac{n}{\theta} e^{-\frac{ny}{\theta}} dy = \frac{n^3}{\theta} \int_0^{+\infty} y^2 e^{-\frac{ny}{\theta}} dy \\ &= -n^2 y^2 e^{-\frac{ny}{\theta}} \Big|_0^{+\infty} + 2n^2 \int_0^{+\infty} ye^{-\frac{ny}{\theta}} dy = 2n^2 \int_0^{+\infty} ye^{-\frac{ny}{\theta}} dy \\ &= -2\theta ny e^{-\frac{ny}{\theta}} \Big|_0^{+\infty} + 2\theta n \int_0^{+\infty} e^{-\frac{ny}{\theta}} dy = 2\theta n \int_0^{+\infty} e^{-\frac{ny}{\theta}} dy = 2\theta^2 e^{-\frac{ny}{\theta}} \Big|_0^{+\infty} = 2\theta^2. \end{aligned}$$

所以, $D(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}^2) - [E(\hat{\theta})]^2 = 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2$.

七、(满分 10 分) 某批矿砂的镍含量 (单位: %) 的测定总值 X 服从正态分布, 从中任意抽取

5 个样品, 测得镍含量为: 3.29, 3.28, 3.27, 3.26, 3.31. 据此样本值, 能否认为这批矿砂的镍含量均值为 3.25% (取显著性水平 $\alpha = 0.01$. 且 $t_{0.005}(4) = 4.6041$, $t_{0.005}(5) = 4.0322$, $t_{0.005}(6) = 3.7074$, $t_{0.01}(4) = 3.7469$, $t_{0.01}(5) = 3.3649$, $t_{0.01}(6) = 3.1427$).

解: 由题意, 可知本问题是在 σ^2 未知的情况下, 均值 μ 的假设检验问题.

$$H_0: \mu = \mu_0 = 3.25, \quad H_1: \mu \neq \mu_0.$$

$$\text{取检验统计量 } T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

则当显著性水平 $\alpha = 0.01$, 检验的拒绝域为

$$W = \{|T| > t_{\alpha/2}(n-1)\}.$$

其中, $t_{0.005}(4) = 4.6041$, $n = 5$, $\bar{X} = 3.282$, $S^2 = 3.70 \times 10^{-4}$, $S = 0.0192$.

将样本值代入算出统计量 T 的值

$$|t| = \frac{3.282 - 3.25}{0.0192/\sqrt{5}} \approx 3.7199 < 4.6041.$$

因此, 应接受 $H_0: \mu = \mu_0 = 3.25$,

可以认为这批矿砂的镍含量的均值为 3.25%.

北 京 交 通 大 学

2023-2024-1-《概率论与数理统计 B》期末考试 参考答案

一、单选题 (本题满分 30 分, 共有 10 道小题, 每道小题 3 分)

1、某单位有三台印刷机相互独立工作, 设第一、第二、第三台印刷机不发生故障的概率依次为 0.9、0.8、0.7, 则这三台印刷机中至少有一台发生故障的概率等于或更接近于【 】.

- (A) 0.608 (B) 0.618 (C) 0.628 (D) 0.638.

解: 基本性质. 故选 (A) .

2、随机事件 A 与 B 相互独立, 且 $P(A)=0.2$, $P(B)=0.4$, 则 $P(A+B)=$ 【 】.

- (A) 0.28 (B) 0.48 (C) 0.52 (D) 0.6.

解: 基本性质. 故选 (C) .

3、若不考虑出生年份, 则甲、乙、丙三人中, 恰好有两人出生在同一月份的概率是【 】.

- (A) $\frac{11}{48}$ (B) $\frac{12}{48}$ (C) $\frac{11}{144}$ (D) $\frac{12}{144}$.

解: 基本性质. 故选 (A) .

4、设连续型随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases} ae^{-x}+b, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, 则向量 $(a, b)=$ 【 】.

- (A) (1, 1) (B) (1, -1) (C) (-1, 1) (D) (0, 1).

解: 基本性质. 故选 (C) .

5、设 $X \sim N(2, 4)$, 以下四个论述: ① $P(X < 4) = \Phi(1)$; ② $P(X > 0) = \Phi(1)$;

③ $P(0 < X \leq 4) = 2\Phi(1) - 1$; ④ $P(|X - 2| \geq 4) = 2 - 2\Phi(2)$ 中, 错误论述的个数是【 】.

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3.

解: 基本性质. 故选 (A) .

6、设随机变量 $X \sim U(0, 3)$, 随机变量 Y 服从参数为 2 的泊松分布, 且 X 与 Y 的协方差为 -1,

则 $D(2X - Y + 1) =$ 【 】.

- (A) 1 (B) 5 (C) 9 (D) 12.

解: 基本性质. 故选 (C) .

7、设随机变量 $X \sim N(2, 9)$, 则 $D(3X + 2) =$ 【 】.

- (A) 36 (B) 64 (C) 81 (D) 121.

解: 基本性质.

故选 (C).

8、设 X 的密度函数为 $f(x)$, $f(-x) = f(x)$, $F(x)$ 为 X 的分布函数, 则对任意的 a , 必有【 】.

- (A) $F(-a) = 1 - \int_0^a f(x)dx$ (B) $F(-a) = \frac{1}{2} - \int_0^a f(x)dx$
(C) $F(-a) = F(a)$ (D) $F(-a) = 2F(a) - 1$.

解: 基本性质.

故选 (B).

9、随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_8$ 独立同分布, 且方差存在. 则下述随机变量

$$U = X_1 + \dots + X_4 + X_5 \text{ 与 } V = X_4 + X_5 + \dots + X_8$$

的相关系数 $\rho =$ 【 】.

- (A) $\frac{2}{8}$ (B) $\frac{2}{6}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{2}{4}$.

解: 基本性质.

故选 (C).

10、设总体 X 的概率分布为 $P(X=1) = \frac{1-\theta}{2}$, $P(X=2) = P(X=3) = \frac{1+\theta}{4}$, 利用来自总体的样本值 1, 3, 2, 2, 1, 3, 1, 2, 可得 θ 的最大似然估计值为【 】.

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{5}{8}$.

解: 基本性质.

故选 (A).

二、还是单选题 (本题满分 20 分, 共有 5 道小题, 每道小题 4 分)

11、设 A, B, C 是三个随机事件, 则事件 “ A, B, C 不多于一个发生” 的对立事件是【 】.

- (A) A, B, C 至少有一个发生 (B) A, B, C 至少有两个发生
(C) A, B, C 都发生 (D) A, B, C 不都发生.

解: 基本性质.

故选 (B).

12、设 $F_1(x)$, $F_2(x)$ 为两个分布函数, 其相应的概率密度 $f_1(x)$, $f_2(x)$, 若 a, b 均为正数, 则下列论述不正确的是【 】.

- (A) $aF_1(x) + bF_2(x)$ 为某一随机变量分布函数的充要条件是 $a + b = 1$
(B) $aF_1(x)F_2(x)$ 为某一随机变量分布函数的充要条件是 $a = 1$

(C) $af_1(x) + bf_2(x)$ 为某一随机变量概率密度的充要条件是 $a + b = 1$

(D) $af_1(x)f_2(x)$ 为某一随机变量概率密度的充要条件是 $a = 1$.

解: 基本性质.

故选 (D).

13、假设一个设备在任何长度为 t 的时间内发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布

($\lambda > 0$). T 表示相继两次故障之间的时间间隔, 则对于任意实数 $t > 0$, 概率 $P\{T > t\} =$ **【 】**.

(A) 0 (B) λt (C) $e^{-\lambda t}$ (D) $1 - e^{-\lambda t}$.

解: 基本性质.

故选 (C).

14、连续函数 $F(x)$ 是某一随机变量的分布函数, 且 $F(0) = 0$, 则下列函数可以作为分布函数的

是 **【 】**.

$$(A) G_1(x) = \begin{cases} 1 - F(\frac{1}{x}), & x > 1 \\ 0, & x \leq 1 \end{cases} \quad (B) G_2(x) = \begin{cases} F(x) - F(\frac{1}{x}), & x > 1 \\ 0, & x \leq 1 \end{cases}$$

$$(C) G_3(x) = \begin{cases} 1 + F(\frac{1}{x}), & x > 1 \\ 0, & x \leq 1 \end{cases} \quad (D) G_4(x) = \begin{cases} F(x) + F(\frac{1}{x}), & x > 1 \\ 0, & x \leq 1 \end{cases}.$$

解: 基本性质.

故选 (B).

15、随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, 且 $F(1) = 1$, 记 $Y = \begin{cases} a, & X > 1 \\ b, & X = 1 \\ c, & X < 1 \end{cases}$, ($abc \neq 0$),

则 Y 的期望 $EY =$ **【 】**.

(A) $a + b + c$ (B) a (C) b (D) c .

解: 基本性质.

故选 (D).

三、(满分 10 分) 每次从数集 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 中任取一个数 (取后放回), 共取两次. 记事

件 $A =$ “第一次取出的数为 2 或 5”; $B =$ “取出的两个数之和至少为 7”; $C =$ “取出的两个数中最小数字为 2”. (1) 计算 $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$; (2) 讨论 A 与 B 的独立性.

解: 依题意, 样本空间内共有 $6 \times 6 = 36$ 个样本,

因此,

$$P(A) = \frac{6+6}{36} = \frac{1}{3}; \quad \dots 2 \text{ 分}$$

$$P(B) = \frac{1+2+3+4+5+6}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}; \quad \dots 4 \text{ 分}$$

$$P(C) = \frac{5+4}{36} = \frac{1}{4}; \quad \dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{再由 } P(AB) = \frac{2+5}{36} = \frac{7}{36}, \quad P(A)P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{7}{12} = \frac{7}{36},$$

故 A 与 B 独立. ...10 分

注: (1) 中的三个概率, 对一个得 2 分, 对两个得 4 分, 对三个得 7 分.

四、(满分 10 分) 已知随机变量 X 在区间 $(1, 3)$ 上服从均匀分布, 随机变量 Y 在 X 与 2 构成的区间上服从均匀分布.

(1) 求 X 和 Y 联合密度 $f(x, y)$; (2) 概率密度 $f_Y(y)$; (3) $P\{X+Y \geq 4\}$.

解: 随机变量 X 的概率密度为: $f_X(x) = \frac{1}{2} \quad (1 < x < 3)$;

对于 $1 < x < 2$, 随机变量 Y 在 $\{X = x\}$ 的条件下的条件概率密度:

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x}, & 1 < x < y < 2 \\ 0, & \text{others} \end{cases} \quad \dots 2 \text{ 分}$$

对于 $2 < x < 3$, 随机变量 Y 在 $\{X = x\}$ 的条件下的条件概率密度:

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2}, & 2 < y < x < 3 \\ 0, & \text{others} \end{cases} \quad \dots 4 \text{ 分}$$

1) 由密度的乘法公式, 得 X 和 Y 联合密度 $f(x, y)$:

$$f(x, y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|X=x) = \begin{cases} \frac{1}{2(2-x)}, & 1 < x < y < 2 \\ \frac{1}{2(x-2)}, & 2 < y < x < 3 \\ 0, & \text{others.} \end{cases} \quad \dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{注: 直接写 } f(x, y) = \begin{cases} 0.5, & 1 < x < y < 2 \\ 0.5, & 2 < y < x < 3 \\ 0, & \text{others.} \end{cases} \text{ 不给分.}$$

2) 随机变量 Y 的概率密度 $f_Y(y)$ 是联合密度 $f(x, y)$ 的边缘密度.

当 $y \leq 1$ 和 $y \geq 3$ 时, 有 $f_Y(y) = 0$;

对于 $1 < y < 2$, 有 $1 < x < y$, 则

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \frac{1}{2} \int_1^y \frac{dx}{2-x} = -\frac{1}{2} \ln(2-y).$$

对于 $2 < y < 3$, 有 $y < x < 3$, 则

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \frac{1}{2} \int_y^3 \frac{dx}{x-2} = -\frac{1}{2} \ln(y-2).$$

$$\text{于是, } f_Y(y) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \ln(2-y), & 1 < y < 2 \\ -\frac{1}{2} \ln(y-2), & 2 < y < 3 \\ 0, & \text{others.} \end{cases} \quad \dots 8 \text{ 分}$$

$$3) \text{ 计算得, } P\{X+Y \geq 4\} = \int_2^3 dx \int_2^x \frac{1}{2(x-2)} dy = \frac{1}{2}. \quad \dots 10 \text{ 分}$$

五、(满分 10 分) 对于每一个中学生而言, 来参加家长会的家长人数是一个随机变量. 设无家长、有一名家长、有两名家长来参加会议的概率分别为 0.05, 0.8, 0.15. 若学校共有 400 名学生, 设各学生参加会议的家长数互相独立且服从同一分布.

(1) 求参加会议的家长数超过 450 的概率;

(2) 求有一名家长来参加会议的学生数不多于 340 的概率.

附: $\Phi(1.14) = 0.8729$, $\Phi(1.15) = 0.8749$, $\Phi(2.4) = 0.9918$, $\Phi(2.5) = 0.9938$.

解: 设 X_k 表示第 k 个学生来参加会议的家长数 ($k = 1, 2, \dots, 400$).

则 $X_1, X_2, \dots, X_{400}$ 相互独立同分布, 且有对任意 X_k , 均有

$$P(X_k = 0) = 0.05, P(X_k = 1) = 0.8, P(X_k = 2) = 0.15.$$

所以, $E(X_k) = 1.1$, $D(X_k) = 0.19$ 4 分

1) 设 $X = \sum_{k=1}^{400} X_k$. 由中心极限定理, 有

$$\begin{aligned} P\{X > 450\} &= P\left\{\frac{X - 400 \times 1.1}{\sqrt{400} \cdot \sqrt{0.19}} > \frac{450 - 400 \times 1.1}{\sqrt{400} \cdot \sqrt{0.19}}\right\} \\ &= 1 - P\left\{\frac{X - 400 \times 1.1}{\sqrt{400} \cdot \sqrt{0.19}} \leq 1.147\right\} \\ &= 1 - \Phi(1.147) = 0.1257. \end{aligned} \quad \dots 7 \text{ 分}$$

2) 设 Y 表示有一名家长来参加会议的学生数, 则 $Y \sim b(400, 0.8)$, 则

$$\begin{aligned}
 P\{X \leq 340\} &= P\left\{\frac{Y - 400 \times 0.8}{\sqrt{400 \times 0.8 \times 0.2}} \leq \frac{340 - 400 \times 0.8}{\sqrt{400 \times 0.8 \times 0.2}}\right\} \\
 &= P\left\{\frac{Y - 400 \times 0.8}{\sqrt{400 \times 0.8 \times 0.2}} \leq 2.5\right\} \\
 &= \Phi(2.5) = 0.9938. \quad \dots 10 \text{ 分}
 \end{aligned}$$

六、(满分 10 分) 设总体 X 服从参数 (r, p) 的负二项分布, 其分布列为:

$$P(X = n) = C_{n-1}^{r-1} p^r (1-p)^{n-r}, \quad (n = r, r+1, \dots).$$

其中 r 是已知正整数, p 是未知参数. $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是从总体 X 中抽取的一个简单随机样本. 求参数 p 的极大似然估计量.

解: 似然函数为:

$$\begin{aligned}
 L(p) &= \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^n \binom{x_i-1}{r-1} p^r (1-p)^{x_i-r} \\
 &= \prod_{i=1}^n \binom{x_i-1}{r-1} \cdot p^{nr} (1-p)^{\sum_{i=1}^n x_i - nr}. \quad \dots 4 \text{ 分}
 \end{aligned}$$

取对数, 得

$$\ln L(p) = C + nr \cdot \ln p + \left(\sum_{i=1}^n x_i - nr \right) \cdot \ln(1-p), \quad (C \text{ 为常数}). \quad \dots 6 \text{ 分}$$

对 p 求导, 得似然方程: $\frac{nr}{p} - \frac{1}{1-p} \left(\sum_{i=1}^n x_i - nr \right) = 0$.

解似然方程, 得 $p = \frac{nr}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{r}{\bar{x}}$ 8 分

因此, p 的极大似然估计量为 $\hat{p} = \frac{r}{\bar{X}}$ 10 分

七、(满分 10 分) 收割机正常工作时, 切割出的每段金属棒长 X 是服从正态分布的随机变量, 即总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu = 10.5\text{cm}$, $\sigma = 0.15\text{cm}$. 今从生产出的一批产品中随机抽出 15 段进行测量, 测得长度如下:

10.3, 10.3, 10.2, 10.9, 10.4, 10.6, 10.6, 10.8, 10.5, 10.7, 10.2, 10.7, 10.1, 10.4, 10.5.

试问该切割机工作是否正常 (取显著性水平 $\alpha = 0.05$) ?

附: $z_{0.05} = 1.645$, $t_{0.05}(14) = 1.7613$, $z_{0.025} = 1.96$, $t_{0.05}(15) = 1.7531$.

解: 设在 $\alpha = 0.05$ 下的检验假设为

$$H_0: \mu = 10.5, H_1: \mu \neq 10.5 \quad \dots 2 \text{ 分}$$

因总体方差 $\sigma^2 = 0.15^2$ 已知, 取检验统计量 $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$, $\dots 4 \text{ 分}$

再由 $n = 15$, $\bar{x} = 10.48$, $\sigma = 0.15$, $\alpha = 0.05$, $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$ $\dots 6 \text{ 分}$

检验的拒绝域为

$$|u| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| > z_{0.025} = 1.96 \quad \dots 8 \text{ 分}$$

因 U 的观测值 $|u| = \left| \frac{10.48 - 10.5}{0.15 / \sqrt{15}} \right| = 0.516 < 1.96$, 落在拒绝域之外,

所以, 在 $\alpha = 0.05$ 下不拒绝原假设 H_0 , 该切割机正常工作. $\dots 10 \text{ 分}$

北 京 交 通 大 学

2024-2025-1-《概率论与数理统计 B》 期末考试 参考答案

一、单选题 (本题满分 30 分, 每道小题 3 分)

1. 已知 A, B, C 是三个随机事件, 则事件“ A, B, C 不多于一个发生”的对立事件是 **【 B 】**.

- (A) A, B, C 至少有一个发生 (B) A, B, C 至少有两个发生
(C) A, B, C 都发生 (D) A, B, C 不都发生.

2. 设随机变量 X 服从二项分布 $b(n, p)$, 则必须有 **【 D 】**.

- (A) $0 \leq p < 1, EX = np$ (B) $0 < p \leq 1, DX = np(1-p)$
(C) $0 \leq p \leq 1, DX = np(1-p)$ (D) $0 < p < 1, EX = np$.

3. 某工厂使用 A, B 两种设备. 令 X 与 Y 分别表示 A 与 B 两种设备使用时间的比例, 已知二维随

机变量 (X, Y) 的概率密度函数为 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+2y), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{other} \end{cases}$, 则 X 的边缘概

率密度 $f_X(x) = \text{【 D 】}$.

- (A) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}(x+1), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{other} \end{cases}$ (B) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x+1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{other} \end{cases}$
(C) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x+1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{other} \end{cases}$ (D) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+1), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{other} \end{cases}$

4. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$ 满足 $f(-x) = f(x)$, $F(x)$ 为 X 的分布函数, 则对任意实数 a , 必有 **【 B 】**.

- (A) $F(-a) = 1 - \int_0^a f(x)dx$ (B) $F(-a) = \frac{1}{2} - \int_0^a f(x)dx$
(C) $F(-a) = F(a)$ (D) $F(-a) = 2F(a) - 1$.

5. X 是连续型随机变量, $Y \sim B(1, p)$, 则随机变量 $X - Y$ 的分布函数是 **【 B 】**.

- (A) 分段函数 (B) 连续函数
(C) 分段函数且恰有一个间断点 (D) 分段函数且至少有两个间断点.
6. 随机变量 $X \sim N(0, 1)$, 对任意给定的 $\alpha \in (0, 1)$, $u(\alpha)$ 满足 $P(X > u(\alpha)) = \alpha$. 若概率 $P(|X| < x) = \alpha$, 则 x 等于 **【 C 】**.
- (A) $u\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ (B) $u\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ (C) $u\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$ (D) $u\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)$.
7. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $(X_1, X_2, \dots, X_{25})$ 是取自该总体 X 中的一个简单随机样本, $\bar{X}$ 为样本均值. 若 $P(|X - \mu| < a) = P(|\bar{X} - \mu| < \pi)$, 则 $a =$ **【 B 】**.
- (A) π (B) 5π (C) $2\sqrt{6}\pi$ (D) 25π .
8. 设 X 表示在 n 次独立重复试验中, 事件 A 发生的次数. 若 $P(A) = \frac{1}{2}$, 且 $E[X(X-1)] = 5$, 则必有 **【 B 】**.
- (A) $n^2 - n - 20 = 0$ (B) $n = 5$ (C) $n = -4$ (D) $n = 4$.
9. 已知二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) | -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$ 上服从均匀分布, 则以下命题必然成立的是 **【 D 】**.
- (A) $P(X + Y \geq 0) = \frac{1}{4}$ (B) $P(X - Y \geq 0) = \frac{1}{4}$
(C) $P(\max\{X, Y\} \geq 0) = \frac{1}{4}$ (D) $P(\min\{X, Y\} \geq 0) = \frac{1}{4}$.
10. 设总体 X 服从参数为 1 的指数分布, $X_1, X_2, \dots, X_8$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本, $\bar{X}$ 是样本均值, S^2 是样本方差, A_2 是样本二阶原点矩, 则描述 $E(\bar{X}) = 1$ 、 $D(\bar{X}) = \frac{1}{8}$ 、 $E(S^2) = 1$ 、 $E(A_2) = 2$ 中正确的个数是 **【 D 】**.
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4.

二、还是单选题 (本题满分 20 分, 每道小题 4 分)

11. 设 $X \sim N(3, 9)$, 以下论述① $P(X \leq 9) = \Phi(2)$; ② $P(0 < X \leq 6) = 2\Phi(1) - 1$;
③ $P(X > 0) = \Phi(1)$; ④ $P(|X - 3| \geq 6) = 2 - 2\Phi(2)$ 中, 错误的个数是 **【 A 】**.
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3.

12. 设 X_1, X_2, X_3 是来自总体 $X \sim N(0, 1)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 为样本均值, S^2 为样本方差, 则

$$E[(\bar{X} - S^2)^2] = \text{【 A 】}.$$

- (A) $\frac{7}{3}$ (B) 3 (C) $\frac{16}{3}$ (D) $\frac{25}{3}$.

13. 随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布, 记 $Y = \max\{X, 1\}$, 则 $EY = \text{【 B 】}$.

- (A) 1 (B) $1 + e^{-1}$ (C) $1 - e^{-1}$ (D) e^{-1} .

14. 随机变量 X 与 Y 独立同分布, 随机变量 $U = X + Y$, $V = X - Y$, 则必然有 **【 C 】**.

- (A) $P(UV) = 0$ (B) $P(UV) \neq 0$ (C) $\rho_{UV} = 0$ (D) $\rho_{UV} \neq 0$.

15. 随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) | -1 < x < 1, -2 < y < 2\}$ 上服从均匀分布, 则 **【 D 】**.

- (A) $P(X + Y \geq 0) = \frac{1}{4}$ (B) $P(X - Y \geq 0) = \frac{1}{4}$
 (C) $P(\max\{X, Y\} \geq 0) = \frac{1}{4}$ (D) $P(\min\{X, Y\} \geq 0) = \frac{1}{4}$.

三、(满分 10 分) 请准确陈述正态分布的定义, 并计算其期望 EX 与方差 DX .

解: 1) 若随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

其中, $\sigma > 0$, σ, μ 为常数, 则称 X 服从参数为 σ, μ 的正态分布, 记作 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

2) 令 $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$, 则 $Y \sim N(0, 1)$, Y 的概率密度为

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}, \quad -\infty < y < +\infty.$$

$$\text{则 } E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = 0.$$

$$D(Y) = E(Y - 0)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^2 e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = 1.$$

因此, $E(X) = E(\sigma Y + \mu) = \sigma E(Y) + \mu = \mu$.

$$D(X) = D(\sigma Y + \mu) = \sigma^2 D(Y) + 0 = \sigma^2.$$

四、(满分 10 分) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{21}{4}x^2y, & x^2 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$ 是二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数.

- 1) 求 $E(X)$, $E(Y)$ 及 $E(XY)$;
- 2) 分别求出 X 与 Y 的边缘密度函数;
- 3) 判断随机变量 X 与 Y 是否相关? 是否相互独立?

解: 1) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, y) dx dy = \frac{21}{4} \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 x^3 y dy = \frac{21}{8} \int_{-1}^1 x^3 (1 - x^4) dx = 0,$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} yf(x, y) dx dy = \frac{21}{4} \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 x^2 y^2 dy = \frac{7}{4} \int_{-1}^1 x^2 (1 - x^6) dx = \frac{7}{9},$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y) dx dy = \frac{21}{4} \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 x^3 y^2 dy = \frac{7}{4} \int_{-1}^1 x^3 (1 - x^6) dx = 0.$$

2) 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \frac{21}{4} \int_{x^2}^1 x^2 y dy = \frac{21}{8} x^2 (1 - x^4).$

所以, 随机变量 X 的边缘密度函数为 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{21}{8} x^2 (1 - x^4) & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases};$

当 $0 \leq y \leq 1$ 时, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \frac{21}{4} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2 y dx = \frac{7}{2} y x^3 \Big|_0^{\sqrt{y}} = \frac{7}{2} y^{\frac{5}{2}}.$

所以, 随机变量 Y 的边缘密度函数为 $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{7}{2} y^{\frac{5}{2}} & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

3) 由于 $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$, 所以 X 与 Y 不相关.

$f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, 所以 X 与 Y 不独立.

五、(满分 10 分) 设总体 X 的概率分布为 $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & (1-\theta)^2 \end{pmatrix}$, 其中 $0 < \theta < 1$. 设

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本, 分别以 ν_1, ν_2 表示 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 中 1,

2 出现的次数, 试求:

- 1) 未知参数 θ 的最大似然估计量.
- 2) 当样本值为 $(1, 1, 2, 1, 3, 2)$ 时的最大似然估计值.

解: 1) 求参数 θ 的最大似然估计量.

样本 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 中 1, 2 和 3 出现次数分别为 ν_1, ν_2 和 $n - \nu_1 - \nu_2$,

则似然函数和似然方程为

$$L(\theta) = \theta^{2\nu_1} [2\theta(1-\theta)]^{\nu_2} (1-\theta)^{2(n-\nu_1-\nu_2)} = 2^{\nu_2} \theta^{2\nu_1+\nu_2} (1-\theta)^{2n-2\nu_1-\nu_2},$$

$$\ln L(\theta) = 2^{\nu_2} + (2\nu_1 + \nu_2) \ln \theta + (2n - 2\nu_1 - \nu_2) \ln(1-\theta),$$

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{2\nu_1 + \nu_2}{\theta} - \frac{2n - 2\nu_1 - \nu_2}{1-\theta} = 0.$$

似然方程的惟一解, 就是参数 θ 的最大似然估计量: $\hat{\theta} = \frac{2\nu_1 + \nu_2}{2n}$. --7 分

2) 对于样本值 $(1, 1, 2, 1, 3, 2)$, 由上述一般公式, 可得最大似然估计值

$$\hat{\theta} = \frac{2\nu_1 + \nu_2}{2n} = \frac{2 \times 3 + 2}{12} = \frac{2}{3}. \quad \text{--10 分}$$

六、(满分 10 分) 设某种商品每周的需求量 X 是服从区间 $[10, 30]$ 上均匀分布的随机变量, 而经销商店进货数量为区间 $[10, 30]$ 中的某一整数. 商店每销售一单位商品可获利 500 元; 若供大于求则削价处理, 每处理一单位商品亏损 100 元; 若供不应求, 则可从外部调剂供应, 此时一单位商品可获利 300 元. 为使商品所获利润的期望值不少于 9280 元, 试确定最小进货量.

解: 令 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}, & 10 < x < 30, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 设进货量为 s , 则利润为

$$Z = \begin{cases} 500X - 100(s - X), & 10 < X < s \\ 500s + 300(X - s), & s \leq X < 30 \end{cases} = \begin{cases} 600X - 100s, & 10 < X < s \\ 200s + 300X, & s \leq X < 30 \end{cases}$$

$$z = g(x) = \begin{cases} 600x - 100s, & 10 < x < s \\ 200s + 300x, & s \leq x < 30 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} EZ = Eg(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx = \int_{10}^s (600x - 100s) \frac{1}{20} dx + \int_s^{20} (200s + 300x) \frac{1}{20} dx \\ &= -7.5s^2 + 350s + 5250. \end{aligned}$$

由题意, $-7.5s^2 + 350s + 5250 \geq 9280$, $(3s - 62)(2.5s - 65) \leq 0$,

即 $3s - 62 \geq 0$, $2.5s - 65 \leq 0$, $20 \frac{2}{3} \leq s \leq 26$,

因此, 最小进货量 $s = 21$.

七、(满分 10 分) 收割机正常工作时, 切割出的每段金属棒长 X 是服从正态分布的随机变量,

即总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu = 10.5\text{cm}$, $\sigma = 0.15\text{cm}$. 今从生产出的一批产品中随机抽出 15 段进行测量, 测得长度如下:

10.4, 10.6, 10.1, 10.4, 10.5, 10.3, 10.3, 10.2, 10.9, 10.6, 10.8, 10.5, 10.7, 10.2, 10.7

试问: 该切割机工作是否正常 (取显著性水平 $\alpha = 0.05$) ?

附: $z_{0.05} = 1.645$, $t_{0.05}(14) = 1.7613$, $z_{0.025} = 1.96$, $t_{0.05}(15) = 1.7531$.

解: $\alpha = 0.05$ 下的检验假设为

$$H_0: \mu = 10.5, H_1: \mu \neq 10.5$$

因总体方差 $\sigma^2 = 0.15^2$ 已知, 取检验统计量 $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$, 现有

$$n = 15, \bar{x} = \frac{10.4 + 10.6 + \cdots + 10.7}{15} = 10.48, \sigma = 0.15, \alpha = 0.05, z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96,$$

检验的拒绝域为 $|u| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| > z_{0.025} = 1.96$.

因 U 的观测值为 $|u| = \left| \frac{10.48 - 10.5}{0.15 / \sqrt{15}} \right| = 0.516 < 1.96$, 落在拒绝域之外.

所以, 在 $\alpha = 0.05$ 下不拒绝原假设 H_0 , 该切割机正常工作.

北 京 交 通 大 学

2025-2026-1-《概率论与数理统计 B》 期末考试 参考答案

一、单选题 (本题满分 30 分, 共有 10 道小题, 每道小题 3 分)

1. 设 A 、 B 、 C 为随机事件, A 发生必导致 B 与 C 至多有一个发生, 则【 】.

- (A) $A \subset BC$ (B) $A \supset BC$ (C) $\bar{A} \subset BC$ (D) $\bar{A} \supset BC$.

解: B 与 C 至多有一个发生, 即 B 与 C 不能同时发生, 即 $\overline{BC}$.

从而, $A \subset \overline{BC} \Rightarrow \bar{A} \supset BC$. 故选 (D).

2. 若随机事件 A , B 满足条件 $2P(AB) \geq P(A) + P(B)$, 则 $P(A-B) =$ 【 】.

- (A) 0 (B) 0.5 (C) -0.5 (D) 1.

解: $2P(AB) \geq P(A) + P(B) \Rightarrow P(AB) \geq P(A) + P(B) - P(AB) = P(A+B)$.

故, $P(AB) = P(A+B)$.

再由, $AB \subset A \subset A+B \Rightarrow P(AB) \leq P(A) \leq P(A+B)$

$$\Rightarrow P(AB) = P(A) = P(A+B).$$

所以, $P(A-B) = P(A) - P(AB) = 0$. 故选 (A).

3. 设 A 和 B 为两个随机事件, 且满足 $P(A|B) = 1$, 则必有【 】.

- (A) $P(A \cup B) > P(A)$ (B) $P(A \cup B) > P(B)$
(C) $P(A \cup B) = P(A)$ (D) $P(A \cup B) = P(B)$.

解: 若 $P(B) = 0$, 则 $P(AB) = 0$, 从而

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A).$$

若 $P(B) > 0$, 由 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = 1$, 得 $P(AB) = P(B)$, 从而

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A). \quad \text{故选 (C).}$$

4. 设 A 和 B 为两个随机事件, 且 $0 < P(A) < 1$, $0 < P(B) < 1$, $P(A\bar{B}) = P(\bar{A}B)$. 则下列等式中, 未必成立的是【 】.

- (A) $P(A-B) = P(B-A)$ (B) $P(A|B) = P(B|A)$
 (C) $P(A|\bar{B}) = P(B|\bar{A})$ (D) $P(A|\bar{B}) = P(\bar{A}|B)$.

解: 由已知, $P(A\bar{B}) = P(\bar{A}B) \Rightarrow P(A-B) = P(B-A)$, 故, 选项 (A) 正确.

因此, $P(A-B) = P(B-A) \Rightarrow P(A) - P(AB) = P(B) - P(AB) \Rightarrow P(A) = P(B)$.

所以, 选项 (B) (C) 均正确.

再由, $P(A|\bar{B}) = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}$, $P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(B)}$.

由已知, 二者分子相等, 但分母未必相等.

故选 (D).

5. 已知随机变量 X 与 Y 相互独立, 且满足 $X \sim N(0, 2)$, $Y \sim N(-2, 2)$. 若 $P(2X+Y > a)$
 $= P(X < Y)$, 则 $a =$ 【 】.

- (A) $-2 - \sqrt{10}$ (B) $-2 + \sqrt{10}$ (C) $-2 + \sqrt{5}$ (D) $-2 - \sqrt{5}$.

解: 由已知, $2X+Y \sim N(-2, 10)$, $X-Y \sim N(2, 4)$.

则 $P(2X+Y > a) = 1 - P(2X+Y \leq a) = 1 - \Phi\left(\frac{a+2}{\sqrt{10}}\right)$;

$P(X < Y) = P(X-Y < 0) = \Phi\left(\frac{0-2}{2}\right) = 1 - \Phi(1)$.

由 $P(2X+Y > a) = P(X < Y)$, 知 $\Phi\left(\frac{a+2}{\sqrt{10}}\right) = \Phi(1)$.

即 $a = \sqrt{10} - 2$.

故选 (B).

6. 设 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数, 则下列仍为分布函数的是【 】.

- (A) $F(2x+1)$ (B) $F(2-x)$ (C) $F(x^2)$ (D) $1-F(-x)$.

解: 显然, 由 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(2-x) = 1 \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x^2) = 1 \neq 0$.

因此, 可排除选项 (B) (C).

再由不一定处处右连续, 因此由定义, 排除选项 (D).

事实上, $F(2x+1)$ 满足分布函数的 4 条公理.

故选 (A) .

7. 已知 $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, 密度函数分别为 $\varphi(x)$, $f(y)$. 并且 $\Phi(x)$, $F(y)$ 为对应的分布函数, 则关于下列的所有命题: ① $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$; ③ $P(|X| \leq a) = 2\Phi(a) - 1$;

② $F(0) = \Phi(0) = 0.5$; ④ $P(|X| > a) = 2[1 - \Phi(a)]$; ⑤ $P(a < Y \leq b) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$;

⑥ $\varphi(-x) = \varphi(x)$; ⑦ $f(y) = \varphi(\frac{y-\mu}{\sigma})$; ⑧ $Z = \frac{Y-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ 中, 完全正确的等式个数为

为 【 】 .

(A) 5

(B) 6

(C) 7

(D) 8 .

解: 易知, $F(\mu) = \Phi(0) = 0.5$, $f(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi(\frac{x-\mu}{\sigma})$.

因此, ②、⑦是错误的.

故选 (B) .

8. 设二维随机变量 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$, 边缘分布函数分别为 $F_X(x)$ 与 $F_Y(y)$, 则

$P(X > 1, Y > 2) =$ 【 】 .

(A) $1 - F(1, 2)$

(B) $F(1, 2) + F_X(1) + F_Y(2) - 1$

(C) $1 - F_X(1) - F_Y(2)$

(D) $1 - F_X(1) - F_Y(2) + F(1, 2)$.

解: $P(X > 1, Y > 2) = 1 - P((X \leq 1) \cup (Y \leq 2))$

$$= 1 - [P(X \leq 1) + P(Y \leq 2) - P(X \leq 1, Y \leq 2)]$$

$$= 1 - P(X \leq 1) - P(Y \leq 2) + P(X \leq 1, Y \leq 2)$$

$$= 1 - F_X(1) - F_Y(2) + F(1, 2) .$$

故选 (D) .

9. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $-\infty < x < +\infty$, 则 $D(X^2) =$ 【 】 .

(A) 20

(B) 22

(C) 84

(D) 94 .

解: 易知 $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = \Gamma(3) = 2!$;

$$E(X^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f(x) dx = \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x} dx = \Gamma(5) = 4!;$$

所以, $D(X^2) = E(X^4) - [E(X^2)]^2 = 4! - (2!)^2 = 24 - 4 = 20$. 故选 (A).

10. 设总体 $X \sim B(m, \theta)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体的简单随机样本, 其样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$,

则 $E\left(\sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2\right) = \underline{\hspace{1cm}} \underline{\hspace{1cm}}$.

(A) $(m-1)n \cdot \theta(1-\theta)$ (B) $m(n-1) \cdot \theta(1-\theta)$

(C) $(m-1)(n-1) \cdot \theta(1-\theta)$ (D) $mn \cdot \theta(1-\theta)$.

解: 已知样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2$, 再由 $E(S^2) = D(X) = m \cdot \theta(1-\theta)$.

所以, $E\left(\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2\right) = m \cdot \theta(1-\theta)$.

于是, $E\left(\sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2\right) = m(n-1) \cdot \theta(1-\theta)$. 故选 (B).

二、填空题 (本题满分 20 分, 共有 5 道小题, 每道小题 4 分)

11. 设 A 、 B 、 C 为三个随机事件, 且满足 $C \subset A$, $C \subset B$, $P(A) = 0.6$, $P(AB) = 0.45$,

$P(A-C) = 0.3$, 则 $P(ABC) = \underline{\hspace{1cm}} \underline{\hspace{1cm}}$.

解: 由 $C \subset A$, 知 $P(A-C) = P(A) - P(C) = 0.6 - P(C)$. 解得, $P(C) = 0.3$.

再由 $C \subset A$, $C \subset B$, 知 $C \subset AB$. 从而,

$P(ABC) = P(AB) - P(C) = 0.45 - 0.3 = 0.15$. 故填 **【 0.15 】**.

12. 已知 A 和 B 相互独立, 且 $P(A \cup B) = 0.9$, $P(A) = 0.4$, 则 $P(B) = \underline{\hspace{1cm}} \underline{\hspace{1cm}}$.

解: 由 A 和 B 相互独立, 故有

$P(A+B) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) = 1 - 0.6P(\bar{B}) = 0.9$.

所以, $P(\bar{B}) = \frac{1}{6}$, 故 $P(B) = \frac{5}{6}$. 故填 **【 $\frac{5}{6}$ 】**.

13. 若三个随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立且同分布, 并且都服从 $\lambda = 2$ 的指数分布, 则

$P(\min\{X_1, X_2, X_3\} \geq 1) = \underline{\hspace{1cm}} \underline{\hspace{1cm}}$.

解: 由 X_1, X_2, X_3 同分布, 且分布函数均为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

所以, $P(\min\{X_1, X_2, X_3\} \geq 1) = P(X_1 \geq 1, X_2 \geq 1, X_3 \geq 1)$

$$= P(X_1 \geq 1) \cdot P(X_2 \geq 1) \cdot P(X_3 \geq 1) \quad \text{——相互独立}$$

$$= [1 - P(X_1 < 1)] \cdot [1 - P(X_2 < 1)] \cdot [1 - P(X_3 < 1)]$$

$$= [1 - F(1)]^3 = [e^{-2}]^3 = e^{-6}.$$
 故填 $\mathbf{[e^{-6}]}$.

14. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 独立同分布, 都服从 $\lambda = 2$ 的泊松分布, 则当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$

依概率收敛于【 】.

解: 由 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 独立同分布, 则 $E(X_k) = 2, D(X_k) = 2, k = 1, 2, \dots$

由切比雪夫大数定律的推论, 可知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - 2\right| < \varepsilon\right) = 1$.

即当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ 依概率收敛于 2. 故填【 2 】.

15. 设总体 X 的概率分布为 $P(X=1)=\frac{1-\theta}{2}$, $P(X=2)=P(X=3)=\frac{1+\theta}{4}$, 来自总体的样本值

1, 3, 2, 2, 1, 3, 1, 2. 则 θ 的最大似然估计值为【 】.

解: 构造似然函数 $L(\theta) = \left(\frac{1-\theta}{2}\right)^3 \left(\frac{1+\theta}{4}\right)^5 = \frac{(1-\theta)^3 (1+\theta)^5}{2^{13}}$.

取对数, 得 $\ln L(\theta) = 3 \ln(1 - \theta) + 5 \ln(1 + \theta) - 13 \ln 2$,

令 $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{3}{\theta-1} + \frac{5}{\theta+1} = \frac{8\theta-2}{(\theta-1)(\theta+1)} = 0$, 得 $\hat{\theta} = \frac{1}{4}$. 故填 $\left[\frac{1}{4} \right]$.

注: 一般应该进行验证.

三、(满分 10 分) 设某种商品每周的需求量 X 是服从区间 $[10, 30]$ 上均匀分布的随机变量, 而经销商店进货数量为区间 $[10, 30]$ 中的某一整数, 商店每销售一单位商品可获利 500 元; 若供大于求则削价处理, 每处理一单位商品亏损 100 元; 若供不应求, 则可从外部调剂供应, 此时一单位商品可获利 300 元. 为确保商品所获利润的期望值不少于 9280 元, 试确定最小的进货量.

解: 令 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}, & 10 < x < 30, \\ 0, & \text{others.} \end{cases}$ 设进货量为 s , 则利润为

$$Z = \begin{cases} 500X - 100(s - X), & 10 < X < s \\ 500s + 300(X - s), & s \leq X < 30 \end{cases} = \begin{cases} 600X - 100s, & 10 < X < s \\ 200s + 300X, & s \leq X < 30 \end{cases}$$

$$z = g(x) = \begin{cases} 600x - 100s, & 10 < x < s \\ 200s + 300x, & s \leq x < 30 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} EZ = Eg(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx = \int_{10}^s (600x - 100s) \frac{1}{20} dx + \int_s^{20} (200s + 300x) \frac{1}{20} dx \\ &= -7.5s^2 + 350s + 5250. \end{aligned}$$

由题意, $-7.5s^2 + 350s + 5250 \geq 9280$, $(3s - 62)(2.5s - 65) \leq 0$.

即 $3s - 62 \geq 0$, $2.5s - 65 \leq 0$, $20 \frac{2}{3} \leq s \leq 26$.

因此, 最小进货量 $s = 21$.

四、(满分 10 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 3x, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{others.} \end{cases}$$

求 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{X,Y}$.

解:
$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x 3x^2 dy = 3 \int_0^1 x^3 dx = \frac{3}{4}; \\ E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(x, y) dx dy = 3 \int_0^1 x dx \int_0^x y dy = \frac{3}{2} \int_0^1 x^3 dx = \frac{3}{8}; \\ E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x 3x^3 dy = 3 \int_0^1 x^4 dx = \frac{3}{5}; \\ E(Y^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x, y) dx dy = 3 \int_0^1 x dx \int_0^x y^2 dy = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}; \\ E(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy \cdot f(x, y) dx dy = 3 \int_0^1 x^2 dx \int_0^x y dy = \frac{3}{2} \int_0^1 x^4 dx = \frac{3}{10}, \end{aligned}$$

$$\text{所以, } \text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{3}{10} - \frac{3}{4} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{160}.$$

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{80};$$

$$D(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{1}{5} - \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{19}{320},$$

$$\text{因此, 有 } \rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \frac{\frac{3}{160}}{\sqrt{\frac{3}{80}} \cdot \sqrt{\frac{19}{320}}} = \frac{3}{\sqrt{57}}.$$

五、(满分 10 分) 某个房间有 3 扇同样大小的窗子, 只有一扇是打开的. 有一只小鸟自开着的窗子飞入房间, 它只能从开着的窗子飞出. 假定小鸟是没有记忆的, 且其飞向各扇窗子都是随机的.

- 1) 以 X 表示小鸟为了飞出房间试飞的次数, 求 X 的分布律.
- 2) 户主声称, 他养的一只小鸟是有记忆的, 它飞向任一窗子的次数不多于一次, 以 Y 表示这只聪明的小鸟为了飞出房间试飞的次数, 如户主所说是确实的, 求 Y 的分布律.
- 3) 求试飞次数 X 小于 Y 的概率及试飞次数 Y 小于 X 的概率.

解: 1) 易知 X 服从几何分布, $P(X=k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3}, k=1, 2, 3, \dots$

2) Y 的取值是: 1, 2, 3.

$$P(Y=1) = \frac{1}{3};$$

$$P(Y=2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}, \quad \text{第一次飞向另两扇中的一扇, 第二次飞出去.}$$

$$P(Y=3) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{3}.$$

3) X 和 Y 是独立的随机变量.

$$\begin{aligned} P(X < Y) &= P(X=1, Y=2) + P(X=1, Y=3) + P(X=2, Y=3) \\ &= P(X=1)P(Y=2) + P(X=1)P(Y=3) + P(X=2)P(Y=3) \\ &= \frac{8}{27}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=Y) &= P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=2) + P(X=3, Y=3) \\ &= P(X=1)P(Y=1) + P(X=2)P(Y=2) + P(X=3)P(Y=3) \\ &= \frac{19}{81}. \end{aligned}$$

$$\text{所以, } P(X > Y) = 1 - \frac{8}{27} - \frac{19}{81} = \frac{38}{81}.$$

六、(满分 10 分) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是从总体 $X \sim N(\mu, 1)$ 中抽取的一个简单样本. 试求使得概率 $P(X > A) = 0.05$ 的点 A 的极大似然估计量 (取 $\Phi(1.645) = 0.95$).

解: 关于参数 μ 的似然函数为

$$\begin{aligned} L(\mu) &= \prod_{i=1}^n f(x_i, \mu) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x_i - \mu)^2\right] \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right]. \end{aligned}$$

取对数, $\ln L = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$.

令 $\frac{d \ln L}{d\mu} = \sum_{i=1}^n x_i - n\mu = 0$, 得 $\mu = \bar{x}$.

故 μ 的极大似然估计量为 $\mu = \bar{X}$.

$$P(X > A) = 1 - \Phi(A - \mu) = 0.05.$$

所以, 得 $A - \mu = 1.645$, $A = \mu + 1.645$.

故 A 的极大似然估计量为 $A = \bar{X} + 1.645$.

七、(满分 10 分) 某工厂生产的一种螺钉, 标准要求长度是 32.5 毫米. 实际生产的产品, 假定其长度 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 未知. 现从该厂生产的一批产品中抽取 6 件, 得尺寸数据: 32.56; 29.66; 31.64; 30.00; 31.87; 31.03. 问这批产品是否合格? (取显著性水平 $\alpha = 0.01$).

(已知 $t_{0.01}(5) = 3.3649$, $t_{0.01}(6) = 3.1427$, $t_{0.005}(5) = 4.0322$, $t_{0.005}(6) = 3.7074$).

解: 设在 $\alpha = 0.01$ 下的检验假设为

$$H_0: \mu = 32.5, \quad H_1: \mu \neq 32.5$$

取检验统计量 $T = \frac{\bar{X} - 32.5}{S/\sqrt{6}} \sim t(5)$, 则有

检验的拒绝域为

$$W = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{s/\sqrt{n}} > t_{\alpha/2}(n-1) \right\}.$$

其中, $n = 6$, $\alpha = 0.01$, $\mu_0 = 32.5$, $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.005}(5) = 4.0322$.

将样本值代入算出统计量 T 的值

$$|T| = 2.997 < 4.0322.$$

所以, 接受 H_0 , 即认为这批产品合格.