

北 京 交 通 大 学

2017-2018-2-《微积分 B》期末考试卷

一、选择题（每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设有二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ 则函数在 $(0, 0)$ 点 **【 A 】**.
 (A) 连续; (B) 极限不存在; (C) 极限存在但不连续; (D) 无定义.
2. $f(x)$ 在 $x=0$ 处有任意阶导数是函数 $f(x)$ 能展成 x 的幂级数的 **【 C 】**.
 (A) 充要条件; (B) 充分但不必要条件;
 (C) 必要但不充分条件; (D) 既不充分也不必要条件.
3. 设 $\vec{A} = xi + yj + zk$, 而 $\vec{n}$ 为光滑闭曲面 S 的外侧单位法向量, 则 S 所围成的闭区域 Ω 的体积 V 可以表示成 (D).
 (A) $\oiint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$; (B) $\oiint_S \vec{n} \cdot \vec{n} dS$; (C) $\oiint_S y dy dz$; (D) $\oiint_S z dx dy$.
4. 设 $f(x, y)$ 具有一阶偏导数, 且对任意的 (x, y) 都有 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$, 则 **【 D 】**.
 (A) $f(0, 0) > f(1, 1)$; (B) $f(0, 0) < f(1, 1)$;
 (C) $f(0, 1) > f(1, 0)$; (D) $f(0, 1) < f(1, 0)$.
5. 设 $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, v_n = \frac{3 + (-1)^n}{2^n} (n=1, 2, \dots)$, 则 **【 C 】**.
 A. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散; B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛;
 C. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛; D. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

二、填空题（每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设 $f(x, y, z) = x^2 y + z^2$ 在点 $(1, 2, 0)$ 处沿向量 $\vec{n} = (1, 2, 2)$ 的方向导数为 **【 2 】**.

解: 应填 2.

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = (2xy, x^2, 2z) \Big|_{(1,2,0)} \cdot \frac{(1,2,2)}{3} = \frac{1}{3} (4, 1, 0) \cdot (1, 2, 2) = 2.$$

2. $\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\tan x}{x} dx = \mathbf{[-\ln \cos 1]}$.

解: 交换积分次序有

$$\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\tan x}{x} dx = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{\tan x}{x} dy = \int_0^1 \tan x dx = -\ln \cos 1.$$

3. 旋转抛物面 $z = 1 + x^2 + y^2$ 在点 $P_0(-1, 1, 3)$ 处的法线方程为 $\mathbf{\left[\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{1} \right]}$.

4. 设数量场 $u(x, y, z)$ 有二阶连续的偏导数, 则 $\text{rot}(\text{gradu}) = \mathbf{[\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}]}$.

5. 设 $f(x)$ 是定义在实轴上周期为 2 的周期函数, 其中 $f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x \leq 0, \\ x^3, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x = 3$ 处的

傅立叶级数收敛于 $\mathbf{[S(3) = \frac{2+1^3}{2} = \frac{3}{2}]}$.

三、(10 分) 设 $z = f(xy, yg(x))$, 其中 f 具有二阶连续的偏导数, 函数 $g(x)$ 可导, 且在 $x = 1$ 处

取得极值 $g(1) = 1$, 试求 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}}$.

解法 1: $\frac{\partial z}{\partial x} = yf'_1 + yg'(x)f'_2,$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'_1 + y(f''_{11}x + f''_{12}g(x)) + g'(x)f'_2 + yg'(x)(xf''_{21} + g(x)f''_{22}).$$

因为 $g(1) = 1, g'(1) = 0$, 于是代入 $x = 1, y = 1$, 得

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = f'_1(1, 1) + f''_{11}(1, 1) + f''_{12}(1, 1).$$

解法 2: $\frac{\partial z}{\partial x} = yf'_1 + yg'(x)f'_2$. 又因为, $g(1) = 1, g'(1) = 0$,

所以, $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=1} = yf'_1(y, y),$

$$\begin{aligned} \text{于是, } \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}} &= \left[f'_1(y, y) + y(f''_{11}(y, y) + f''_{12}(y, y)) \right]_{y=1} \\ &= f'_1(1, 1) + f''_{11}(1, 1) + f''_{12}(1, 1). \end{aligned}$$

四、(10 分) 计算 $\iiint_{\Omega} (x^2 + my^2 + nz^2) dx dy dz$, 其中 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, m, n 为常数, $a > 0$.

解: 利用轮换对称性, 有 $\iiint_{\Omega} x^2 dv = \iiint_{\Omega} y^2 dv = \iiint_{\Omega} z^2 dv.$

$$\begin{aligned}
\text{于是原式} &= (1+m+n) \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \frac{(1+m+n)}{3} \iiint_{\Omega} x^2 + y^2 + z^2 dx dy dz \\
&= \frac{(1+m+n)}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^a r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\
&= \frac{(1+m+n)}{3} \frac{4\pi a^5}{5} = \frac{4\pi(1+m+n)a^5}{15}.
\end{aligned}$$

五、(10分) 设薄片型物体 S 是圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $z^2 = 2x$ 截下的有限部分, 其上任一点

密度为 $\mu(x, y, z) = 9\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 求物体 S 的质量.

解: $M = \iint_S \mu(x, y, z) dS = 9 \iint_S \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dS,$

注意到 S 的投影区域为 $D: x^2 + y^2 \leq 2x$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$\text{于是, } M = 18 \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = 18 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r \cdot r dr = 48 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = 64.$$

六、(10分) 求向量场 $\vec{A} = i + zj + \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}}k$ 穿过 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 1$ 及 $z = 2$ 所围成的圆台面指

向外侧 (不包括上, 下底) 的流量.

错解: 设圆台外侧为 S , 上底面为 S_1 取上侧, 下底面为 S_2 , 取下侧, 所围成的区域为 Ω ,

则所求的流量为:

$$\Phi = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{dS} = \iint_S dydz + zdzdx + \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \oiint_{S+S_1+S_2} - \iint_{S_1} - \iint_{S_2}$$

$$\text{而 } \oiint_{S+S_1+S_2} = \iiint_{\Omega} \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{e^z}{r} r dr d\theta dz = 2\pi e^2,$$

$$\iint_{S_1} \vec{A} \cdot \vec{dS} = \iint_{S_1} \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = e^2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 dr d\theta = 4\pi e^2;$$

$$\iint_{S_2} \vec{A} \cdot \vec{dS} = \iint_{S_2} \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = -e^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 dr d\theta = -2\pi e.$$

$$\text{所以, } \Phi = 2\pi e^2 - 4\pi e^2 + 2\pi e = 2\pi e(1 - e).$$

注: 这个解答有问题, 被积函数在所围区域 Ω 中有奇点, 故不能用高斯公式.

正解: $\Phi = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{dS} = \iint_S dydz + zdzdx + \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy,$

因为曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的法向量为 $\vec{n} = \{-z_x, -z_y, 1\} = \left\{-\frac{x}{z}, -\frac{y}{z}, 1\right\},$

于是, $\Phi = \iint_S \left\{1, z, \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right\} \cdot \left\{-\frac{x}{z}, -\frac{y}{z}, 1\right\} dxdy = \iint_S \left(-\frac{x}{z} - y + \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) dxdy$

$$= -\iint_{D_{xy}} \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - y + \frac{e^{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) dxdy, \text{ 其中 } D_{xy}: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

$$= -\iint_{D_{xy}} \frac{e^{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy, \text{ 其中 } \iint_{D_{xy}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy = 0, \iint_{D_{xy}} y dxdy = 0.$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \frac{e^r}{r} r dr = 2\pi e(1 - e).$$

七、(10 分) 计算曲线积分 $\oint_L \frac{-ydx + xdy}{2x^2 + y^2}$, 式中 L 是正向椭圆 $2x^2 + y^2 = 2$.

解: $D: x^2 + \frac{y^2}{2} \leq 1$, 在 L 上: $2x^2 + y^2 = 2$, 于是,

原式 $= \frac{1}{2} \oint_L -ydx + xdy$ ———再 利用格林公式

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \iint_D dxdy = \sqrt{2}\pi.$$

八、(10 分) 求函数 $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$ 在椭圆域 $D = \{(x, y) | 4x^2 + y^2 \leq 4\}$ 上的最大值和最小值.

解 1: 由 $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0. \end{cases}$ 得驻点 $(0, 0)$, $f(0, 0) = 2$. ---4 分

在边界 $4x^2 + y^2 = 4$ 上, $y^2 = 4 - 4x^2$. $f(x, y) = 5x^2 - 2, x \in [-1, 1]$.

最大值为 3, 最小值为 -2. ---8 分

所以, f 在 $D = \{(x, y) | 4x^2 + y^2 \leq 4\}$ 上的最大值和最小值分别为 3 和 -2. ---10 分

解 2: 对于椭圆域 $D = \{(x, y) | 4x^2 + y^2 \leq 4\}$,

可设 $x = r \cos \theta, y = 2r \sin \theta$, 其中 $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1$,

于是, $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2 = r^2 \cos^2 \theta - 4r^2 \sin^2 \theta + 2 = r^2 (3 - 5 \sin^2 \theta)$,

注意到 $-2 \leq -2r^2 \leq r^2 (3 - 5 \sin^2 \theta) \leq 3r^2 \leq 3$,

所以, f 在 $D = \{(x, y) | 4x^2 + y^2 \leq 4\}$ 上的最大值和最小值分别为 3 和 -2.

九、(10 分) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n \cdot n!} x^n$ 的收敛域与和函数.

解: $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1)2^{n+1}(n+1)!}{2^n \cdot n![(n+1)^2+1]} = +\infty$, 故收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n \cdot n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^n = e^{x/2} + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} \cdot \frac{x^{n-1}}{2^n}.$$

$$\text{令 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} 2^n x^{n-1} = S(x), \text{ 则 } \int_0^x S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)! 2^n} = \frac{x}{2} e^{x/2},$$

$$S(x) = \left(\frac{x}{2} e^{x/2}\right)' = \frac{1}{2} (e^{x/2} + \frac{x}{2} e^{x/2}) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{2}\right) e^{x/2},$$

$$\text{所以, } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n \cdot n!} x^n = e^{x/2} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right), x \in (-\infty, +\infty)$$

另解: $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1)2^{n+1}(n+1)!}{2^n \cdot n![(n+1)^2+1]} = +\infty$, 故收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n^2}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n t = \underline{\underline{\frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n^2}{n!} t^n}}$$

$$\begin{aligned} \text{令 } S(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n^2}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} t^n \\ &= e^t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} t^n = e^t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1+1}{(n-1)!} t^n \\ &= e^t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} t^n \\ &= e^t + te^t + t^2 e^t. \end{aligned}$$

$$\text{故 } S(x) = e^{\frac{x}{2}} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right), x \in (-\infty, +\infty).$$

注: 所有函数项级数问题中, 端点必须单独检验.

北 京 交 通 大 学

2018-2019-2-《微积分 B》期末考试卷

一. 选择题 (每小题 3 分, 满分 15 分)

1. 函数 $z = 2x + y$ 在点 $(1, 2)$ 沿各方向的方向导数的最大值为 **【 C 】**.

- (A) 3 (B) 0 (C) $\sqrt{5}$ (D) 2

2. 曲线 $4x = y^5, y = \sqrt{z}$, 在点 $(8, 2, 4)$ 处的切线方程是 **【 A 】**.

- (A) $\frac{x+12}{20} = y-1 = \frac{z}{4}$ (B) $\frac{x+12}{20} = y = \frac{z+4}{4}$
(C) $\frac{x-8}{5} = y-2 = \frac{z-4}{4}$ (D) $\frac{x-3}{5} = y-1 = \frac{z}{4}$

3. 设 $f(x, y)$ 是连续函数, 交换二次积分 $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy$ 积分次序的结果为 **【 D 】**.

- (A) $\int_1^e dy \int_0^{\ln x} f(x, y) dx$; (B) $\int_e^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx$;
(C) $\int_0^{\ln x} dy \int_1^e f(x, y) dx$; (D) $\int_0^1 dy \int_e^1 f(x, y) dx$.

4. 下列级数中, 条件收敛的是 **【 A 】**.

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{\sqrt{2n^3+4}}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^n$
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n2^n}$

5. L 为 $y = x^2$ 上从点 $(0, 0)$ 到 $(1, 1)$ 的一段弧. 则 $I = \int_L \sqrt{y} ds =$ **【 C 】**.

- (A) $\int_0^1 \sqrt{1+4x^2} dx$ (B) $\int_0^1 \sqrt{y} \sqrt{1+y} dy$
(C) $\int_0^1 x \sqrt{1+4x^2} dx$ (D) $\int_0^1 \sqrt{y} \sqrt{1+\frac{1}{y}} dy$

二. 填空题 (每小题 3 分, 满分 15 分)

1. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $\sin x + 2y - z = e^z$ 所确定, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ **【 $\frac{\cos x}{1+e^z}$ 】**.

2. 曲面 $x^2 + 4y - z^2 + 5 = 0$ 垂直于 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = z$ 的切平面方程是 **【 $2x + 2y + z + 1 = 0$ 】**.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$, 若 $S(x)$ 是以 $f(x)$ 的以 2π 为周期的 Fourier 级数展开式之和函数,

则 $S(5) =$ **【 0 】**. $S(5) = S(5 - 2\pi) = 0$.

4. 设平面区域 D 为: $x^2 + y^2 \leq 1$, 则二重积分 $\iint_D \ln(1+x^2+y^2) dx dy = \mathbf{【 \pi[2\ln 2 - 1] 】}$.

5. 设 $\Sigma = \{(x, y, z) | x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, 则积分 $\iint_{\Sigma} y^2 dS = \mathbf{【 \frac{\sqrt{3}}{12} 】}$.

三. (10 分) 设 $z = f(x, u)$ 具有连续的二阶偏导数, 而 $u = xy$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解: $z_x = f_x + yf_u$ (4 分)

$$z_{xx} = f_{xx} + 2yf_{xu} + y^2 f_{uu} \quad (10 \text{ 分})$$

四. (10 分) 求函数 $z = x^2 + y^2 - 2x + 4y - 10$ 在闭域 $D: x^2 + y^2 \leq 25$ 上的最大值和最小值.

解: 由 $\begin{cases} z_x = 2x - 2 = 0 \\ z_y = 2y + 4 = 0 \end{cases}$, 得 D 内驻点 $(1, -2)$

$$\text{且 } z(1, -2) = -15 \quad 3 \text{ 分}$$

在边界 $x^2 + y^2 = 25$ 上, 令 $L = x^2 + y^2 - 2x + 4y - 10 + \lambda(x^2 + y^2 - 25)$.

$$\text{由 } \begin{cases} L_x = 2x - 2 + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 2y + 4 + 2\lambda y = 0 \\ L_{\lambda} = x^2 + y^2 - 25 = 0 \end{cases} \text{ 得 } x = \pm\sqrt{5}, y = \mp 2\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} z(\sqrt{5}, -2\sqrt{5}) &= 15 - 10\sqrt{5} \\ z(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}) &= 15 + 10\sqrt{5} \end{aligned} \quad 8 \text{ 分}$$

比较后可知, 函数 z 在点 $(1, -2)$ 处取最小值 $z(1, -2) = -15$;

在点 $(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ 处取最大值 $z(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}) = 15 + 10\sqrt{5}$. 10 分

五. (10 分) 设 Ω 是由 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ 所确定的闭区域, 计算 $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^R r^3 \sin\varphi dr \\ &= \frac{\pi}{2} R^4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi d\varphi \\ &= \frac{\pi}{4} R^4 (2 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

六. (10 分) 计算积分 $\oint_L \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2}$, 其中 L 是以点 $C(1, 0)$ 为中心, R 为半径的圆周 ($R \neq 1$), 取逆时针方向.

解: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - 4x^2}{(4x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (x^2 + y^2 \neq 0)$

当 $R < 1$ 时, $\oint_L \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2} = 0$.

当 $R > 1$ 时, 取 $\varepsilon < R - 1$. 记

$$L_1: \begin{cases} x = \frac{\varepsilon}{2} \cos t \\ y = \varepsilon \sin t \end{cases} \quad \text{正向一周.}$$

$$\text{则原式} = \oint_L \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{2} \varepsilon^2 dt}{\varepsilon^2} = \pi.$$

七. (10 分) 求二元可微函数 $\varphi(x, y)$, 满足 $\varphi(0, 1) = 1$, 并使曲线积分

$$I_1 = \int_L (3xy^2 + x^3) dx + \varphi(x, y) dy \quad \text{及} \quad I_2 = \int_L \varphi(x, y) dx + (3xy^2 + x^3) dy$$

都与积分路径无关.

解: 由 I_1 与积分路径无关, 得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 6xy, \quad \text{得} \quad \varphi(x, y) = 3x^2 y + C(y).$$

又由 I_2 与积分路径无关, 得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 3x^2 + C'(y) = 3y^2 + 3x^2,$$

$$\text{得} \quad C(y) = y^3 + C_1.$$

$$\text{故} \quad \varphi(x, y) = 3x^2 y + y^3 + C_1.$$

$$\text{由} \quad \varphi(0, 1) = 1, \quad \text{知} \quad C_1 = 0.$$

$$\text{故} \quad \varphi(x, y) = 3x^2 y + y^3.$$

八. (10 分) 计算积分 $\iiint_{\Sigma} xy dy dz + xy^2 dz dx + z dx dy$, 其中 Σ 是抛物面 $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 1$) 的上侧.

解: 补平面 $\Sigma_1: z = 1$ ($x^2 + y^2 \leq 1$) 取下侧.

——补面三则: z 值、区域、侧.

则 $\Sigma + \Sigma_1$ 构成一封闭曲面 (取内侧). 因此

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Sigma} xy dy dz + xy^2 dz dx + z dx dy \\ &= \left\{ \oiint_{\Sigma + \Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} \right\} xy dy dz + xy^2 dz dx + z dx dy \\ &= - \iiint_V (y + 2xy + 1) dx dy dz + \iint_{D_{xy}} dx dy \end{aligned}$$

$$\text{由对称性: } \iiint_{\Omega} y dv = 0 \quad \iiint_{\Omega} 2xy dv = 0.$$

$$\iiint_{D_{xy}} dx dy = \pi.$$

$$\begin{aligned}
\text{于是 } I &= - \iiint_{\Omega} dv + \iint_{D_{xy}} dx dy \\
&= - \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1 r dr \cdot \int_{r^2}^1 dz + \pi \\
&= - 2\pi \cdot \int_0^1 r(1 - r^2) dr + \pi \\
&= - 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \pi = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

九. (10 分) 试求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$ 的和函数并计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ 的和.

解: 幂级数的收敛域是 $(-1, 1]$, ...3 分

所以, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 有

$$\begin{aligned}
s(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \\
&= \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} \right) dx \quad \dots 5 \text{ 分}
\end{aligned}$$

$$= \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x. \quad \dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{故 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n = -\frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n-1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \dots 10 \text{ 分}$$

北 京 交 通 大 学

2019-2020-2-《微积分 B》期末考试卷

一. 选择题 (每小题 3 分, 满分 15 分)

1. 函数 $z = x^2 + y^2$ 在 $(1, 1)$ 点沿 $\vec{l} = \{-1, -1\}$ 方向的方向导数为 **【 B 】**.

(A) 最大 (B) 最小 (C) 0 (D) 1.

2. 曲线 $x = e^{2t}, y = \ln t, z = t^2$ 在对应于 $t = 2$ 点处的切线方程是 **【 C 】**.

(A) $\frac{x - e^4}{2e^4} = \frac{y - \ln 2}{1} = \frac{z - 4}{4}$ (B) $\frac{x - e^4}{2e^4} = \frac{y - \ln 2}{\frac{1}{2}} = \frac{z - 4}{2}$
 (C) $\frac{x + e^4}{2e^4} = \frac{y + \frac{1}{2} - \ln 2}{\frac{1}{2}} = \frac{z}{4}$ (D) $\frac{x + e^4}{e^4} = \frac{y + \frac{1}{2} - \ln 2}{\frac{1}{2}} = \frac{z}{4}$

3. 设 $f(x, y)$ 是连续函数, 交换积分 $\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy (a > 0)$ 的积分次序后的结果为 **【 C 】**.

(A) $\int_0^a dy \int_0^y f(x, y) dx$ (B) $\int_0^a dy \int_a^y f(x, y) dx$
 (C) $\int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx$ (D) $\int_0^a dy \int_0^a f(x, y) dx$.

4. 下列级数中, 绝对收敛的是 **【 D 】**.

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3n-1}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln(n+1)}$
 (C) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$

5. L 为从 $A(0, 0)$ 到 $B(4, 3)$ 的直线, 则 $\int_L (x - y) ds =$ **【 B 】**.

(A) $\int_0^4 (x - \frac{3}{4}x) dx$ (B) $\int_0^4 (x - \frac{3}{4}x) \sqrt{1 + \frac{9}{16}} dx$
 (C) $\int_0^3 (\frac{4}{3}y - y) dy$ (D) $\int_0^3 (\frac{4}{3}y - y) \sqrt{1 + \frac{9}{16}} dy$

二. 填空题 (每小题 3 分, 满分 15 分)

1. 函数 $y = y(x)$ 由 $1 + x^2 y = e^y$ 所确定, 则 $\frac{dy}{dx} =$ **【 $\frac{2xy}{e^y - x^2}$ 】**.

2. 曲面 $\arctan \frac{y}{1+xz} = \frac{\pi}{4}$ 在点 $(-2, 1, 0)$ 处的切平面方程是 **【 $y + 2z = 1$ 】**.

3. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ x-1, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$ 以 4 为周期的正弦级数展开式的和函数是 $S(x)$, 则 $S(7) =$ **【 $\frac{1}{2}$ 】**.

解: $S(7) = S(3) = S(-1) = -S(1) = -\frac{1}{2}$.

4. 二次积分 $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ 在极坐标系下先对 r 积分的二次积分为 **【 】**.

解: $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$.

5. 设 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$), 则 $\iint_{\Sigma} \frac{3}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{z}{2}\right) dS =$ **【 2π 】**.

三、(10 分) 设 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, $z = f(x, \frac{x}{y})$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解: $z_x = f_u + \frac{1}{y} f_v$ (4 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{u^2} + \frac{2}{y} f_{uv} + \frac{1}{y^2} f_{v^2} \quad (10 \text{ 分})$$

四、(10 分) 求点 (3,0) 到抛物线 $y = x^2$ 的距离.

解: 抛物线 $y = x^2$ 上点 (x, y) 到点 (3,0) 的距离平方 $d^2 = (x-3)^2 + y^2$.

$$\text{令 } F = (x-3)^2 + y^2 + \lambda(y - x^2) \quad 4 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \begin{cases} F_x = 2(x-3) - 2\lambda x = 0 \\ F_y = 2y + \lambda = 0 \\ F_{\lambda} = y - x^2 = 0 \end{cases} \quad \text{得唯一驻点 } (1,1) \quad 8 \text{ 分}$$

因最小值必定存在, 故 $d_{\min} = d(1,1) = \sqrt{5}$.

所以, 点 (3,0) 到抛物线 $y = x^2$ 的距离为 $\sqrt{5}$. 10 分

注: 中学几何方法, 更易求.

五、(10 分) 设 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 位于第一卦限的部分. 试计算 $I = \iiint_{\Omega} z dv$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r dr \int_0^{\sqrt{1-r^2}} z dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r(1-r^2) dr \\ &= \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

六、(10 分) 计算曲线积分 $\int_L (6xy^2 - y^3) dx + (6x^2y - 3xy^2) dy$, 式中 L 是从点 $A(0, 1)$ 沿 $y = x^2 + 1$

至点 $B(1, 2)$ 的一段弧.

解: $\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy - 3y^2 = \frac{\partial Q}{\partial x},$

积分与路径无关. 取点 $C(0, 2)$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_{AC} + \int_{CB} \\ &= 0 + \int_0^1 (24x - 8) dx \\ &= 4.\end{aligned}$$

七、(10 分) 已知函数 $P(x, y) = ye^x + \sin y$, $Q(x, y) = e^x + x \cos y$.

(1) 是否存在函数 $U(x, y)$, 可使 $du = Pdx + Qdy$?

(2) 如果存在 $U(x, y)$, 则求出它.

(1) $\frac{\partial P}{\partial y} = e^x + \cos y, \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x + \cos y.$

$\therefore \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \therefore$ 存在 $\mu(x, y)$, 使 $du = Pdx + Qdy.$

(2)
$$\begin{aligned}u(x, y) &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy \\ &= \int_{x_0}^x (y_0 e^x + \sin y_0) dx + \int_{y_0}^y (e^x + x \cos y) dy \\ &= [y_0 e^x + x \sin y_0]_{x_0}^x + [ye^x + x \sin y]_{y_0}^y \\ &= ye^x + x \sin y + C\end{aligned}$$

其中 C 为任意常数.

八、(10 分) 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dx dy$, 其中 Σ 是圆锥面 $z^2 = x^2 + y^2$ 在 $0 \leq z \leq h$ 范围内的那部分曲面的下侧, h 为正数.

解: 补上平面块 $\Sigma_1: z=h, x^2+y^2 \leq h^2$, 取上侧.

$$\iint_{\Sigma_1} = \iint_{\Sigma_1} (x-y)dx dy = 0.$$

Σ 和 Σ_1 围成立体 Ω , 由高斯公式, 有

$$\begin{aligned}\oint_{\Sigma+\Sigma_1} &= \iiint_{\Omega} (0+0+0)dv = 0 \\ \therefore \iint_{\Sigma} &= \oint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} = 0.\end{aligned}$$

九、(10 分) 试求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ 的和.

解: 设幂级数 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} x^{2n}$, ...2 分

易知, 此幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$, ...4 分

所以当 $x \in (-1, 1)$ 时, 有

$$\begin{aligned} s(x) &= \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} dx \\ &= \int_0^x dx \int_0^x 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2(n-1)} dx \end{aligned}$$

$$= \int_0^x dx \int_0^x \frac{2}{1+x^2} dx \quad \dots 6 \text{ 分}$$

$$= 2x \arctan x - \ln(1+x^2). \quad \dots 7 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} \left(\frac{1}{3}\right)^n &= s\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \ln \frac{4}{3}. \quad \dots 10 \text{ 分} \end{aligned}$$

北 京 交 通 大 学

2020-2021-2-《微积分 B》期末考试卷

一、单选题 (每小题 4 分, 满分 20 分)

1. 已知 $(axy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 + by \sin x + 3x^2 y^2)dy$ 为某一函数 $f(x, y)$ 的全微分. 则 a 和 b 分别为 【 】.

- (A) $-2, 2$ (B) $2, -2$ (C) $-3, 3$ (D) $3, -3$.

解: 由 $\frac{\partial(axy^3 - y^2 \cos x)}{\partial y} = \frac{\partial(1 + by \sin x + 3x^2 y^2)}{\partial x}$, 得

$$3axy^2 - 2y \cos x = 6xy^2 + by \cos x,$$

因此, $a = 2, b = -2$.

故选 (B).

2. 二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处两个偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$ 存在是 $f(x, y)$ 在该点连续的 【 】.

- (A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件

解: 由多元函数基本性质, 显然.

故选 (D).

3. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在区间 $(-1, 1]$ 上的定义为 $f(x) = \begin{cases} 3, & -1 < x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$ 则

$f(x)$ 的 *Fourier* 级数在 $x=1$ 处收敛于 【 】.

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3.

解: $S(1) = \frac{f(1^-) + f(1^+)}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$.

故选 (C).

4. 设函数 $f(x, y)$ 连续, 则 $\int_1^2 dx \int_x^2 f(x, y) dy + \int_1^2 dy \int_y^{4-y} f(x, y) dx =$ 【 】.

- (A) $\int_1^2 dy \int_1^{4-y} f(x, y) dx$ (B) $\int_1^2 dx \int_x^{4-x} f(x, y) dy$
(C) $\int_1^2 dx \int_1^{4-x} f(x, y) dy$ (D) $\int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx$.

解: 由 $\int_1^2 dx \int_x^2 f(x, y) dy = \int_1^2 dy \int_1^y f(x, y) dx$, 所以有

$$I = \int_1^2 dy \int_1^y f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_y^{4-y} f(x, y) dx = \int_1^2 dy \int_1^{4-y} f(x, y) dx. \quad \text{故选 (A).}$$

5. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin n}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ 满足 【 】.

(A) 条件收敛 (B) 绝对收敛 (C) 发散 (D) 无法确定.

解: 由 $\left| \frac{\sin n}{n^2} \right| < \frac{1}{n^2}$, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ 绝对收敛; 但是 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散. 故选 (C).

二、填空题 (每小题 4 分, 满分 20 分)

1. 曲面 $z - e^z + 2xy = 3$ 在点 $(1, 2, 0)$ 处的切平面方程是 【 】.

解: 令 $F(x, y, z) = z - e^z + 2xy - 3$, 则

$$F_x(x, y, z) = 2y \Rightarrow F_x(1, 2, 0) = 4;$$

$$F_y(x, y, z) = 2x \Rightarrow F_y(1, 2, 0) = 2;$$

$$F_z(x, y, z) = 1 - e^z \Rightarrow F_z(1, 2, 0) = 0.$$

故所求切平面方程: $4(x-1) + 2(y-2) + 0(z-0) = 0$, 或 $2x + y - 4 = 0$.

2. 函数 $z(x, y)$ 由方程 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \sqrt{2}xyz = \sqrt{2}$ 所确定. 则在点 $(1, 0, -1)$ 处, $dz =$ 【 】.

解: 令 $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \sqrt{2}xyz - \sqrt{2}$, 则

$$F_x(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \sqrt{2}yz, \Rightarrow F_x(1, 0, -1) = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$F_y(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \sqrt{2}xz, \Rightarrow F_y(1, 0, -1) = \sqrt{2};$$

$$F_z(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \sqrt{2}xy, \Rightarrow F_z(1, 0, -1) = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{所以, } dz|_{(1,0,-1)} = -\frac{F_x(1,0,-1)}{F_z(1,0,-1)}dx - \frac{F_y(1,0,-1)}{F_z(1,0,-1)}dy = dx + 2dy.$$

3. 设 $L: x^2 + y^2 = 1$, 则 $\oint_L (x^3 + y^2) ds =$ 【 】.

解: $\oint_L (x^3 + y^2) ds = 0 + \oint_L y^2 ds = \frac{1}{2} \oint_L (x^2 + y^2) ds = \frac{1}{2} \oint_L 1 ds = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi.$

注意: x^3 在 L 上是奇函数.

4. 已知 $f(x, y) = x^2 + (y^2 - 1)\arctan \sqrt{xy}$, 则 $f'_x(1, 1) = \mathbf{【 \quad \quad \quad 】}$.

解: $f'_x(1, 1) = (f(x, 1))'|_{x=1} = 2$.

5. 已知函数 $z = f(x, y)$ 在点 $M(x, y)$ 处可微, 且在该点处沿方向 $\vec{l}_1 = \{1, 1\}$ 和方向 $\vec{l}_2 = \{1, -1\}$ 的方向导数分别为 1 和 2, 则函数 $z = f(x, y)$ 在点 $M(x, y)$ 处的梯度为 $\mathbf{【 \quad \quad \quad 】}$.

解: 令 $\text{grad} z = (z_x, z_y)$, 则 $(z_x, z_y) \cdot \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}} = 1$, $(z_x, z_y) \cdot \frac{(1, -1)}{\sqrt{2}} = 2$.

$$\text{整理, 得} \begin{cases} z_x + z_y = \sqrt{2} \\ z_x - z_y = 2\sqrt{2} \end{cases}, \quad \text{即} \quad z_x = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad z_y = \frac{-\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{所以, } \text{grad} z = (z_x, z_y) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2} \right) = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right).$$

三、(满分 10 分) 设 $D: |x| \leq 1, |y| \leq 1$, 计算 $\iint_D |y - x| dx dy$.

解: 直线 $y = x$, 将区域 D 分为 D_1, D_2 .

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{D_1} (y - x) dx dy + \iint_{D_2} (x - y) dx dy \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_x^1 (y - x) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^x (x - y) dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{y^2}{2} - xy \right) \Big|_x^1 dx + \int_{-1}^1 \left(xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{-1}^x dx = \int_{-1}^1 \left(xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_1^x dx + \int_{-1}^1 \left(xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{-1}^x dx \\ &= \int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

四、(满分 10 分) 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} z dS$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的上半部分.

解: 设 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, 则 $z'_x = \frac{-x}{z}$, $z'_y = \frac{-y}{z}$,

$$\text{因此, } \iint_{\Sigma} z dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \cdot \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \iint_{D_{xy}} R dx dy = \pi R^3.$$

五、(满分 10 分) 求 $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ 在闭区域 $D: \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$ 上的最大值和最小值.

解: 1) 当 $\frac{x^2}{4} + y^2 < 1$ 时, 由 $\begin{cases} z_x = 2x = 0 \\ z_y = 2y = 0 \end{cases}$, 得 D 内驻点 $(0, 0)$, 且 $f(0, 0) = 0$.

2) 在边界 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上, $z = g(y) = 4(1 - y^2) - y^2 = 4 - 5y^2$, $0 \leq y^2 \leq 1$,

此时, $z_{\min} = g(\pm 1) = -1$, $z_{\max} = g(0) = 4$,

3) 综合 $f(0, 0) = 0$, 易知 $z_{\min} = f(0, \pm 1) = -1$, $z_{\max} = f(\pm 1, 0) = 4$.

六、(满分 10 分) 设曲线积分 $\int_L xy^2 dx + y\varphi(x)dy$ 与路径无关, 其中 $\varphi(x)$ 有连续导数且 $\varphi(0) = 0$,

求 $\varphi(x)$, 并计算 $I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + y\varphi(x)dy$.

解: 由题意, $\frac{\partial(xy^2)}{\partial y} = \frac{\partial(y\varphi(x))}{\partial x}$, 即 $\varphi'(x) = 2x$, $\varphi(x) = x^2 + C$.

再由 $\varphi(0) = 0$, 得 $C = 0$, 即 $\varphi(x) = x^2$.

$$I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + yx^2 dy = \frac{1}{2} \int_{(0,0)}^{(1,1)} d(x^2 y^2) = \frac{1}{2} x^2 y^2 \Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = \frac{1}{2}.$$

七、(满分 10 分) 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (x^3 + az^2)dydz + (y^3 + ax^2)dzdx + (z^3 + ay^2)dxdy$, 其中 Σ

为上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧。

解: 设 Σ_1 为平面 $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq a^2$, 取下侧, 则利用 Gauss 公式, 有 --3 分

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} &= \iiint_{\Omega} (3x^2 + 3y^2 + 3z^2)dv \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^a r^2 r^2 dr = 6\pi \cdot 1 \cdot \frac{a^5}{5} = \frac{6\pi a^5}{5}. \end{aligned} \quad \text{--6 分}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \iint_{\Sigma_1} &= \iint_{\Sigma_1} ay^2 dxdy = -a \iint_{D_{xy}} y^2 dxdy = \frac{-a}{2} \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dxdy \\ &= \frac{-a}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^2 r dr = -a\pi \cdot \frac{a^4}{4} = -\frac{\pi a^5}{4}, \end{aligned} \quad \text{--9 分}$$

$$\text{所以, } I = \left(\frac{6}{5} + \frac{1}{4}\right)\pi a^5 = \frac{29}{20}\pi a^5. \quad \text{--10 分}$$

八、(满分 10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n3^{n-1}x^{n-1}$ 的收敛域与和函数.

解: 令 $s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}$, 则 $s(t) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^n\right)' = \left(\frac{t}{1-t}\right)' = \frac{1}{(1-t)^2}$, $|t| < 1$,

$$\text{因此, } s(3x) = \sum_{n=1}^{\infty} n3^{n-1}x^{n-1} = \frac{1}{(1-3x)^2}, \text{ 且其收敛域为 } \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

北 京 交 通 大 学

2021-2022-2-《微积分 B (下)》期末考试 参考答案

一、单选题 (每道小题 3 分, 满分 15 分)

1. 曲面 $x^2 - 2y^2 + z^2 - xyz - 4x + 2z = 6$ 在点 $(0,1,2)$ 处的切平面方程为 (A).

- (A) $3(x-1) + 2(y-2) - 3z + 11 = 0$ (B) $3x + 2y - 3z = 4$
(C) $\frac{x}{3} + \frac{y-1}{2} + \frac{z-2}{-3} = 0$ (D) $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-3}$.

2. 曲线 $x = 2 \sin t, y = 4 \cos t, z = t$ 在点 $(2,0,\frac{\pi}{2})$ 处的法平面方程是 (C).

- (A) $2x - z = 4 - \frac{\pi}{2}$ (B) $2x - z = \frac{\pi}{2} - 4$
(C) $4y - z = -\frac{\pi}{2}$ (D) $4y - z = \frac{\pi}{2}$.

3. 设 $f(x,y)$ 是连续函数, 交换积分 $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y) dy$, 积分次序的结果为 (D).

- (A) $\int_1^e dy \int_0^{\ln x} f(x,y) dx$; (B) $\int_e^1 dy \int_0^1 f(x,y) dx$;
(C) $\int_0^{\ln x} dy \int_1^e f(x,y) dx$; (D) $\int_0^1 dy \int_e^1 f(x,y) dx$.

4. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 其和 $S \neq 0$, 则下述结论成立的是 (C).

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - S)$ 收敛 (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ 收敛 (C) $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$ 收敛 (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|u_n|}$ 收敛.

5. C 为 $y = x^2$ 上从点 $(0, 0)$ 到 $(1, 1)$ 的一段弧. 则 $I = \int_L \sqrt{y} ds =$ (C).

- (A) $\int_0^1 \sqrt{1+4x^2} dx$ (B) $\int_0^1 \sqrt{y} \sqrt{1+y} dy$
(C) $\int_0^1 x \sqrt{1+4x^2} dx$ (D) $\int_0^1 \sqrt{y} \sqrt{1+\frac{1}{y}} dy$

二、填空题 (每道小题 3 分, 满分 15 分)

1. 设函数 $z = z(x,y)$ 由方程 $\sin x + 2y - z = e^z$ 所确定, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ $-\frac{\cos x}{1+e^z}$.

2. 函数 $z = xy^2$ 在点 $(1, 2)$ 沿 $\vec{a} = \{1,1\}$ 方向的方向导数是 $\frac{8}{\sqrt{2}}$.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$, 已知 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的以 2π 为周期的余弦级数展开式的和函数,

则 $S(-3\pi) = \underline{\quad\quad\quad}$. π .

4. 二次积分 $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ 在极坐标系下先对 r 积分的二次积分为 $\underline{\quad\quad\quad}$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

5. 设 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$), 则 $\iint_{\Sigma} \frac{3}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{z}{2}\right) dS = \underline{\quad\quad\quad}$. 2π .

三、(满分 10 分) 设 $z = x^y + ye^x$, 求 z_x, z_y .

解: $z_x = yx^{y-1} + ye^x$; 5 分

$z_y = x^y \ln x + e^x$. 10 分

四、(满分 10 分) 求内接于椭圆 $x^2 + 4y^2 = 16$ 且边平行于坐标轴, 并具有最大面积的长方形的面积.

解: 设矩形的长、宽分别为 $2x, 2y$.

则矩形面积 $A = 4xy$, 且 $x^2 + 4y^2 = 16$.

令 $L = 4xy + \lambda(x^2 + 4y^2 - 16)$ 4 分

由 $\begin{cases} L_x = 4y + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 4x + 8\lambda y = 0 \\ L_{\lambda} = x^2 + 4y^2 - 16 = 0 \end{cases}$ 得驻点 $x = 2\sqrt{2}, y = \sqrt{2}$. 8 分

由于实际问题必定存在最大值.

因此当矩形的长、宽分别取 $2\sqrt{2}, \sqrt{2}$ 时, 有最大面积 16. 10 分

五、(满分 10 分) 设 Ω 是由 $x^2 + y^2 \leq 1$ 及 $0 \leq z \leq 1$ 所确定的闭区域. 试计算

$$I = \iiint_{\Omega} (z - \sqrt{x^2 + y^2}) dv.$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_0^1 (z - r) dz \\ &= 2\pi \int_0^1 r \left(\frac{1}{2} - r \right) dr \\ &= -\frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

六、(满分 10 分) 计算曲线积分 $\int_L (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$, 式中 L 是从点 $O(0, 0)$ 沿曲线 $y = \sin x$ 到点 $A(\pi, 0)$ 的弧段.

解: $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y = \frac{\partial Q}{\partial x}$. 故积分与路径无关.

取 L_1 : 从 $O(0,0)$ 沿 $y=0$ 到 $A(\pi,0)$.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_{L_1} (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy \\ &= \int_0^\pi x^2 dx \\ &= \frac{1}{3}\pi^3.\end{aligned}$$

七、(满分 10 分) 已知 $P(x,y) = 1+4x^3y^3$, $Q(x,y) = 3x^4y^2$.

(1) 试问是否存在函数 $u(x,y)$, 可使得 $Pdx+Qdy$ 成为它的全微分?

(2) 若存在此函数, 求出它.

解: (1) $\frac{\partial P}{\partial y} = 12x^3y^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 12x^3y^2$,

$\therefore \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 故存在 u , 使得 $d\mu = Pdx + Qdy$

$$\begin{aligned}(2) \mu(x,y) &= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy \\ &= \int_{x_0}^x (1+4x^3y_0^3)dx + \int_{y_0}^y 3x^4y^2dy \\ &= \left[x + x^4y_0^3 \right]_{x_0}^x + \left[x^4y^3 \right]_{y_0}^y = x + x^4y^3 + C, \text{ 其中 } C \text{ 为任意常数.}\end{aligned}$$

八、(满分 10 分) 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + (z^2 - 2z)dxdy$, 其中 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

被平面 $z=1$ 所截的有限部分曲面的下侧.

解: 补上平面块 $\Sigma_1: z=1, x^2+y^2 \leq 1$, 取上侧. 则

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_1} &= -\iint_D dx dy = -\pi. \\ \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} &= 2 \iiint_{\Omega} z dv \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_r^1 z dz \\ &= 4\pi \int_0^1 \frac{1}{2} r(1-r^2) dr \\ &= \frac{\pi}{2}. \\ \therefore \iint_{\Sigma} &= \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} = \frac{\pi}{2} - (-\pi) = \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

九、(满分 10 分) 利用 $y = \frac{1}{1+x^2}$ 的展开式, 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ 的和.

解: 因为 $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad x \in (-1, 1)$...3 分

所以,

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1, 1] \quad \dots 6 \text{ 分}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4}. \quad \dots 10 \text{ 分}$$

北 京 交 通 大 学

2022-2023-2-《微积分 B (下)》期末考试 参考答案

一、单选题 (本题满分 20 分, 共有 5 道小题, 每道小题 4 分)

1. 曲面 $z = 2x^2 + 3y^2$ 在点 $(1, 2, 14)$ 处的切平面方程为 【 D 】.

(A) $4x + 12y + z = 14$

(B) $4x + 12y + z = 42$

(C) $4x + 12y - z = 42$

(D) $4x + 12y - z = 14$.

2. 曲线 $x = t, y = 4\sqrt{t}, z = t^2$ 在点 $(4, 8, 16)$ 处的法平面方程为 【 B 】.

(A) $x - y - 8z = -132$

(B) $x + y + 8z = 140$

(C) $x - y + 8z = 124$

(D) $x + y - 8z = 116$.

3. 设 $f(x, y)$ 是连续函数, 交换二次积分 $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y}} 3x^2 y^2 dx$ 的积分次序后的结果为 【 C 】.

(A) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x}} 3x^2 y^2 dy$

(B) $\int_0^{\sqrt{1-y}} dx \int_0^1 3x^2 y^2 dy$

(C) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} 3x^2 y^2 dy$

(D) $\int_0^1 dx \int_0^{1+x^2} 3x^2 y^2 dy$.

4. 下列结论正确的是 【 D 】.

(A) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 必条件收敛

(B) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 必绝对收敛

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛

(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_{n+1}|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

5. L 为从 $A(0, 0)$ 到 $B(4, 3)$ 的直线段, 则 $\int_L (x - y) ds =$ 【 B 】.

(A) $\int_0^4 (x - \frac{3}{4}x) dx$

(B) $\int_0^4 (x - \frac{3}{4}x) \sqrt{1 + \frac{9}{16}} dx$

(C) $\int_0^3 (\frac{4}{3}y - y) dy$

(D) $\int_0^3 (\frac{4}{3}y - y) \sqrt{1 + \frac{9}{16}} dy$.

解: 易知 $y = \frac{3}{4}x$, $y' = \frac{3}{4}$, 因此, $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (y')^2} \cdot |dx| = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} \cdot |dx|$.

所以, $\int_L (x - y) ds = \int_0^4 (x - \frac{3}{4}x) \sqrt{1 + \frac{9}{16}} dx$.

二、填空题 (本题满分 20 分, 共有 5 道小题, 每道小题 4 分)

1. 函数 $y = y(x)$ 由 $1 + x^2 y = e^y$ 所确定, 则 $\frac{dy}{dx} = \mathbf{\left[\frac{2xy}{e^y - x^2} \right]}$.

解: 令 $F(x, y) = e^y - x^2 y - 1$, 则 $F_x(x, y) = -2xy$, $F_y(x, y) = e^y - x^2$,

$$\text{因此, } \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = \frac{2xy}{e^y - x^2}.$$

2. 函数 $f(x, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 $(3, 4)$ 沿 $\vec{a} = (-4, 3)$ 方向的方向导数是 $\mathbf{\left[-\frac{1}{5} \right]}$.

解: $\text{grad} f = \nabla f = \left\{ 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\}$, 因此, $\text{grad} f(3, 4) = \left\{ \frac{2}{5}, \frac{1}{5} \right\}$;

$$\text{因此, } \left. \frac{\partial f}{\partial \vec{a}} \right|_{(3, 4)} = \text{grad} f(3, 4) \cdot \vec{a}^0 = \left\{ \frac{2}{5}, \frac{1}{5} \right\} \cdot \left\{ -\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right\} = -\frac{1}{5}.$$

3. 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq -\frac{\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{2}, & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}$, 已知 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的以 2π 为周期的正弦级数展开式的和

$$\text{函数, 则 } S\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \mathbf{\left[\frac{3}{4}\pi \right]}.$$

解: $S\left(\frac{9}{4}\pi\right) = S\left(\frac{\pi}{4}\right) = -S\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$

4. 二次积分 $\int_{-a}^a dx \int_{\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} f(x, y) dy$ 在极坐标系下先对 r 积分的二次积分为 $\mathbf{\left[\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r dr \right]}$.

解: 原式 $= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r dr.$

5. 设 $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 则曲面积分 $\oiint_S \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dS = \mathbf{\left[4\pi \right]}.$

解: $\oiint_S \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dS = \oiint_S \frac{1}{R^2} dS = \frac{1}{R^2} \oiint_S dS = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi.$

三、(满分 10 分) 设 $f(x, y) = \int_x^{x+y} e^{t^2} dt$, 求 $f'_x(1, -1)$.

解: $f'_x = e^{(x+y)^2} - e^{x^2},$...8 分

$$f'_x(1, -1) = 1 - e. \quad \dots 10 \text{ 分}$$

四、(满分 10 分) 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的 $x \geq 0, y \geq 0$ 部分上找点 P , 使其到点 $M(2, 1)$ 的距离最小.

解: 设点 $P = (x, y)$,

则 P, M 的距离平方 $d^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2$. 且 $x^2 + y^2 = 1$.

$$\text{令 } L = (x-2)^2 + (y-1)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1) \quad 4 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \begin{cases} L_x = 2(x-2) + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 2(y-1) + 2\lambda y = 0 \\ L_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{得 } x = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

边界点 $(0,1), (1,0)$ 8 分

$$d^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 6 - \frac{10}{\sqrt{5}} \quad d^2(0,1) = 4 \quad d^2(1,0) = 2.$$

比较后可知, 所求点为 $P\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. 10 分

注: 利用中学知识, 链接 OM , 交圆于点 P , 即为所求.

五、(满分 10 分) 设 Ω 是第一卦限满足 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 的立体. 试计算 $\iiint_{\Omega} xyz dv$.

$$\text{解 1: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r dr \int_0^{\sqrt{1-r^2}} r^2 \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot z dz$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cdot \cos \theta d\theta \int_0^1 (r^3 - r^5) dr$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{24} = \frac{1}{48}.$$

$$\text{解 2: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^5 d\rho$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\sin \theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\sin \varphi \cdot \int_0^1 \rho^5 d\rho$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{48}.$$

六、(满分 10 分) 计算曲线积分 $\int_L (2x^2 - y^2 + x^2 e^{3y}) dx + (x^3 e^{3y} - 2xy - 2y^2) dy$, 其中 L 为椭圆

圆 $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ 上从点 $A(-1, 0)$ 经第二象限至 $B(0, 3)$ 的弧段.

解: 易知 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -2y + 3x^2 e^{3y}$, 故积分与路径无关.

记 $O(0, 0)$, 则

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\overline{AO} + \overline{OB}} Pdx + Qdy \\
 &= \int_{-1}^0 3x^2 dx + \int_0^3 -2y^2 dy \\
 &= 1 - \frac{2 \times 27}{3} = -17.
 \end{aligned}$$

七、(满分 10 分) 计算 $\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdx dy$, 其中 Σ 是 $z = 1 - x^2 - y^2$ 在 xOy 面上方的部分曲面的上侧.

解: 补充下盖 $\Sigma_1: z = 0, x^2 + y^2 \leq 1$, 取下侧.

$$\text{则, } \iint_{\Sigma_1} xdydz + ydzdx + zdx dy = 0.$$

于是, 由高斯公式, 有

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \iiint_{\Sigma + \Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} = \iiint_{\Omega} 3dx dy dz - 0 \\
 &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_0^{1-r^2} dz \\
 &= 6\pi \int_0^1 (r - r^3) dr = \frac{3\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

八、(满分 10 分) 求 $f(x) = \arctan x$ 在点 $x_0 = 0$ 的泰勒级数展开式. 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

解: 由 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad x \in (-1, 1)$...3 分

所以, $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1, 1]$6 分

$$\begin{aligned}
 \text{再 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \\
 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n+1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \quad \dots 10 \text{ 分}
 \end{aligned}$$

注: 很多人, 愿意写成 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad x \in [-1, 1]$.

关于端点的敛散性, 有

当 $x = -1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$, 条件收敛;

当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$, 条件收敛.

4、下列级数中, 绝对收敛的是【 】.

$$(A) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3n-1}$$

$$(B) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln(n+1)}$$

$$(C) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$(D) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}.$$

解: (A) (C) 选项均发散; (B) 选项条件收敛, 而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 绝对收敛.}$$

故选 (D).

5、 L 是从 $A(1,0)$ 到 $B(-1,2)$ 的线段, 则曲线积分 $\int_L (x+y)ds =$ 【 】.

$$(A) \sqrt{2}$$

$$(B) 2\sqrt{2}$$

$$(C) 2$$

$$(D) 0.$$

解: 线段 $AB: x+y=1, -1 \leq x \leq 1$.

$$\text{所以, } \int_L (x+y)ds = \int_L ds = \int_{-1}^1 \sqrt{2}dx = 2\sqrt{2}.$$

故选 (B).

二、填空题 (每小题 4 分, 满分 20 分)

1、由 $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ 所确定的函数 $z = z(x, y)$ 在 $(1, 0, -1)$ 处, $dz =$ 【 】.

解: 令 $F(x, y, z) = xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \sqrt{2}$, 则

$$F_x(0,1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad F_y(0,1,2) = -1, \quad F_z(0,1,2) = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

故, 所求全微分: $dz = dx - \sqrt{2}dy$.

2、函数 $z = xy^2$ 在点 $(1, 2)$ 沿 $\vec{a} = (1, 1)$ 方向的方向导数是【 】.

解: 计算, 有 $\text{grad}z(1, 2) = (4, 4)$, $\vec{a}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$,

$$\text{故, } \frac{\partial z}{\partial a} \Big|_{(1, 2)} = \text{grad}z(1, 2) \cdot \vec{a}^0 = 4\sqrt{2}.$$

3、设 $f(x) = \begin{cases} 2-x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ x, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$, 又设 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的以 2π 为周期的余弦级数展开式的和函

数, 则 $S(4) =$ 【 】.

解: $S(x)$ 是偶函数, 所以, $S(4) = S(4 - 2\pi) = S(2\pi - 4) = 2\pi - 4$.

4、设 $f(x)$ 在 $[0, 4]$ 上连续, 且 $D: x^2 + y^2 \leq 4$, 则 $\iint_D f(x^2 + y^2) dx dy$ 在极坐标系下先对 r 积分的二次积分为 **【 】**.

解: $\iint_D f(x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 f(r^2) \cdot r dr$.

5、设 Σ 为曲面 $z = 2 - (x^2 + y^2)$ 在 xoy 平面上方部分, 则 $\iint_{\Sigma} dS =$ **【 】**.

解: 令 $z = 0$, 得 $x^2 + y^2 = 2$, 因此, 取 $D: x^2 + y^2 \leq 2$.

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} dS &= \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r dr \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r dr \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2} d(1 + 4r^2) = \frac{13\pi}{3}. \end{aligned}$$

三、(满分 10 分) 设 $f(x, y) = \int_x^{x+y} e^{-t^2} dt$, 求 $f_{xx}(1, -1)$.

解: 由于 $f_x(x, y) = e^{-(x+y)^2} - e^{-x^2}$;

$$\text{以及 } f_{xx}(x, y) = -2(x+y)e^{-(x+y)^2} + 2xe^{-x^2},$$

$$\text{因此, } f_{xx}(1, -1) = 2e^{-1}.$$

四、(满分 10 分) 求点 $(0, 0, 1)$ 到曲面 $z = xy$ 的距离.

解: 设 $d^2 = x^2 + y^2 + (z-1)^2$, 以及 $\varphi(x, y, z) = xy - z = 0$,

$$\text{令 } L(x, y, z, \lambda) = d^2 + \lambda\varphi = x^2 + y^2 + (z-1)^2 + \lambda\varphi(x, y, z).$$

$$\text{则由 } \begin{cases} L_x = L_y = L_z = 0 \\ L_{\lambda} = xy - z = 0 \end{cases}, \text{ 得 } x = y = z = 0.$$

由实际问题, 因此

$$d = d_{\min} = d(0, 0, 0) = \sqrt{0^2 + 0^2 + (0-1)^2} = 1.$$

五、(满分 10 分) 设 Ω 是由 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围成的闭区域.

计算 $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv$.

解: $I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^R r \cdot r^2 dr$

$$= 2\pi \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{(2 - \sqrt{2})\pi R^4}{4}.$$

六、(满分 10 分) 已知曲面积分 $I = \oint_C y^3 dx + (3x - x^3) dy$, 其中 C 为 $x^2 + y^2 = R^2$ ($R > 0$) 的正向. 试问当 R 为何值时, 能使 I 达到最大值, 并出这个最大值.

解: 设 $D: x^2 + y^2 \leq a^2$, 则

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (3 - 3x^2 - 3y^2) dx dy \\ &= 3\pi R^2 - 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 \cdot r dr \\ &= 3\pi R^2 - \frac{3}{2} \pi R^4 \end{aligned}$$

则由 $I'_R = 6\pi R - 6\pi R^3 = 0$, 得 $R = 1$, $R = 0$ (舍去).

由实际问题或 $I''_{R=1} = -6\pi < 0$, 因此,

$$I_{\max} = 3\pi - \frac{3}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi.$$

七、(满分 10 分) 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} xz^2 dy dz + (x^2 y - z^3) dz dx + (2xy + y^2 z) dx dy$, 其中 Σ 是半

球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ($a > 0$) 的上侧.

解: 补充面 $\Sigma_1: z = 0, x^2 + y^2 \leq a^2$, 取下侧. ——— 2 分

则 $\iint_{\Sigma_1} = -2 \iint_D xy dx dy = 0$, ——— 4 分

因此 $I = \iint_{\Sigma + \Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1}$ ——— 6 分 方法

$$= \iiint_{\Omega} (z^2 + x^2 + y^2) dv$$
 ——— 8 分 计算

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^a r^2 \cdot r^2 dr$$

$$= 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{a^5}{5} = \frac{2a^5\pi}{5}.$$
 ——— 10 分

另: $\Sigma: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ($x^2 + y^2 \leq a^2$), 取上侧. ——— 2 分

则 $z'_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, z'_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$ ——— 4 分

$$\text{故, } I = \iint_{\Sigma} \left[\frac{x^2(a^2 - x^2 - y^2) + y(x^2y - (a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}})}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + (2xy + y^2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}) \right] dx dy \quad 6$$

$$= \iint_D \left[\frac{x^2y^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + (x^2 + y^2)\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \right] dx dy \quad \text{—— 8 分}$$

$$= 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{a^5}{5} = \frac{2a^5\pi}{5}. \quad \text{—— 10 分}$$

注: 6 分段, 是题的关键, 给出了计算方法.

八、(满分 10 分) 试求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^{n-1}$ 的收敛域及和函数.

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, 故 $R = 1$.

当 $x-2=1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 发散;

当 $x-2=-1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n$ 发散,

故原级数收敛域为 $(1, 3)$, 且有,

$$\begin{aligned} s(x) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x-2)^n \right)' = \left(\frac{x-2}{1-(x-2)} \right)' = \left(\frac{x-2}{3-x} \right)' \\ &= \frac{1}{(x-3)^2} \quad (1 < x < 3). \end{aligned}$$

北 京 交 通 大 学

2024-2025-2-《微积分 B》期末考试 参考答案

一、单选题 (每小题 4 分, 满分 20 分)

1、曲面 $z = 2x^2 + 3y^2$ 在点 $(1, 2, 14)$ 处的切平面方程为 【 】.

(A) $4x + 12y + z = 14$

(B) $4x + 12y + z = 42$

(C) $4x + 12y - z = 42$

(D) $4x + 12y - z = 14$.

解: 令 $F(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 - z$, 则

法向量可取为 $\vec{n} = (F_x, F_y, F_z)|_{(1,2,14)} = (4, 12, -1)$.

所求切平面方程 $4(x-1) + 12(y-2) - (z-14) = 0$

或 $4x + 12y - z - 14 = 0$.

故选 (D).

注: 将点 $(1, 2, 14)$ 代入, 易知 (D) 正确.

2、曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ z = x^2 - y^2 \end{cases}$ 在点 $(1, 2, -3)$ 处的切线方程是 【 】.

(A) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{8}$

(B) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{-8}$

(C) $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{8}$

(D) $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{8}$.

解: 令 $\begin{cases} F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ G(x, y, z) = x^2 - y^2 - z = 0 \end{cases}$ 则点 $M(1, 2, -3)$ 处的切线方程是

$$\frac{x-1}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_M} = \frac{y-2}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_M} = \frac{z+3}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_M}$$

或 $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{8}$.

故选 (C).

3、设 $f(x, y)$ 是连续函数, 交换二次积分 $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy$ 的积分次序的结果为 【 】.

(A) $\int_1^e dy \int_0^{\ln x} f(x, y) dx$

(B) $\int_e^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx$

$$(C) \int_0^{\ln x} dy \int_1^e f(x, y) dx \quad (D) \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx .$$

解: $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx .$ 故选 (D).

4、下列级数中, 条件收敛的是 【 】.

$$(A) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{\sqrt{2n^3+4}} \quad (B) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$(C) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} \quad (D) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n2^n} .$$

解: 选项 (B) (C) (D) 均绝对收敛, 而

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n} \times \frac{n}{\sqrt{2n^3+4}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2n^3+4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ 而 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ 发散,}$$

另 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{2n^3+4}} = 0$ 且显然 $u_{n+1} \leq u_n$. 故选 (A).

5、 L 是 $y = x^2$ 从 (0, 0) 到 (1, 1) 的线段, 则曲线积分 $I = \int_L \sqrt{y} ds =$ 【 】.

$$(A) \int_0^1 \sqrt{1+4x^2} dx \quad (B) \int_0^1 \sqrt{y} \sqrt{1+y} dy$$

$$(C) \int_0^1 x \sqrt{1+4x^2} dx \quad (D) \int_0^1 \sqrt{y} \sqrt{1+\frac{1}{y}} dy .$$

解: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1+(2x)^2} dx, \quad x: 0 \rightarrow 1 .$

所以, $I = \int_L \sqrt{y} ds = \int_0^1 x \sqrt{1+4x^2} dx .$ 故选 (C).

二、填空题 (每小题 4 分, 满分 20 分)

1、设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $\sin x + 2y - z = e^z$ 所确定, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ 【 】.

解: 令 $F(x, y, z) = \sin x + 2y - z - e^z$, 则

$$F_x = \cos x, \quad F_y = 2, \quad F_z = -1 - e^z .$$

$$\text{故, } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{\cos x}{1+e^z} .$$

2、函数 $z = x^y$ 在点 (1, 2) 沿 $\vec{a} = (1, 1)$ 方向的方向导数是 【 】.

解: 计算, 有 $\text{grad}z(1, 2) = (2, 0)$, $\vec{a}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$,

$$\text{故, } \left. \frac{\partial z}{\partial a} \right|_{(1, 2)} = \text{grad}z(1, 2) \cdot \vec{a}^0 = \sqrt{2}.$$

3、设 $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ x - \frac{\pi}{2}, & -\frac{\pi}{2} < x < 0. \end{cases}$ 已知 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的以 2π 为周期的正弦级数展开式的和

$$\text{函数, 则 } S\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \text{【 } \quad \text{】}.$$

解: $S(x)$ 是奇函数, 所以, $S\left(\frac{9\pi}{4}\right) = S\left(\frac{\pi}{4}\right) = -S\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$

4、二次积分 $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ 在极坐标系下先对 r 积分的二次积分为 **【 】**.

解: $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^\pi d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r dr.$

5、设 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 4$, 则 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS = \text{【 } \quad \text{】}.$

解: $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS = \frac{2}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS = \frac{8}{3} \iint_{\Sigma} dS = \frac{8}{3} \times 4\pi \cdot 2^2 = \frac{128}{3} \pi.$

三、(满分 10 分) 函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^z + yz + x^2 = e + \ln(1+x)$ 所确定, 求 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}}.$

解: 当 $x = 0, y = 0$ 时, $z = 1$;

$$\text{由 } e^z \cdot z_y + z + y \cdot z_y = 0, \text{ 得 } \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = -\frac{1}{e}.$$

$$\text{再由 } e^z \cdot (z_y)^2 + e^z z_{yy} + 2z_y + y \cdot z_{yy} = 0, \text{ 得 } \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \frac{1}{e^2}.$$

四、(满分 10 分) 求内接于椭圆 $x^2 + 4y^2 = 16$ 且边平行于坐标轴, 并具有最大面积的长方形的面积.

解: 设矩形的长、宽分别为 $2x, 2y$.

$$\text{则矩形面积 } A = 4xy, \text{ 且 } x^2 + 4y^2 = 16.$$

$$\text{令 } L = 4xy + \lambda(x^2 + 4y^2 - 16).$$

$$\text{由 } \begin{cases} L_x = 4y + 2\lambda x = 0, \\ L_y = 4x + 8\lambda y = 0, \\ L_\lambda = x^2 + 4y^2 - 16 = 0 \end{cases} \quad \text{得驻点 } (2\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

由于实际问题必定存在最大值.

因此, 当矩形的长、宽分别取 $2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ 时, 有最大面积 16.

五、(满分 10 分) 设 Ω 是由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 $z = 1$ 所围成的有界闭区域.

试计算三重积分 $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv$.

$$\begin{aligned} \text{解: } I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_{\cos \varphi}^1 r \cdot r^2 dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \varphi}{\cos^4 \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{6} (2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

六、(满分 10 分) 计算曲面积分 $I = \int_L (2x^2 + 2xy - y^2)dx + (3x^2 - y^2)dy$, 其中 L 为曲线

$2x^2 - y^2 = 1$ 上从点 $A(1, -1)$ 至 $B(1, 1)$ 的一段弧.

$$\begin{aligned} \text{解: } I &= \int_L (2x^2 + 2xy - y^2)dx + (3x^2 - y^2)dy \\ &= \int_L (1 + 2xy)dx + (1 + x^2)dy. \end{aligned}$$

此时, $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 故积分与路径无关.

取路径 $L_1 = \overline{AB}: x = 1, y: -1 \rightarrow 1$.

$$\text{所以, } I = \int_L (1 + 2xy)dx + (1 + x^2)dy = \int_{-1}^1 2dy = 4.$$

七、(满分 10 分) 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdx dy$, 其中 Σ 是 $z = 1 - x^2 - y^2$ 在面上方的部分曲面的上侧.

解: 补充面 $\Sigma_1: z = 0, x^2 + y^2 \leq 1$, 取下侧. ——— 2 分

$$\text{则 } \iint_{\Sigma_1} = \iint_D 0 dx dy = 0, \quad \text{———— 4 分}$$

Σ 和 Σ_1 围成立体 Ω , 由高斯公式

$$\text{因此 } I = \iint_{\Sigma + \Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} \quad \text{———— 6 分} \quad \text{方法}$$

$$= \iiint_{\Omega} 3dv - 0 \quad \text{———— 8 分} \quad \text{计算}$$

$$\begin{aligned}
&= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_0^{1-r^2} dz \\
&= 6\pi \int_0^1 r(1-r^2) dr = \frac{3\pi}{2}. \quad \text{—— 10 分}
\end{aligned}$$

另: $\Sigma: z = 1 - x^2 - y^2 \quad (D: x^2 + y^2 \leq 1)$, 取上侧. —— 2 分

则 $z'_x = -2x, \quad z'_y = -2y$. —— 4 分

故, $I = \iint_{\Sigma} [x \cdot (2x) + y \cdot (2y) + (1 - x^2 - y^2)] dx dy$ —— 6 分

$$= \iint_D (1 + x^2 + y^2) dx dy \quad \text{—— 8 分}$$

$$= \pi + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \pi + \frac{2\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}. \quad \text{—— 10 分}$$

注: 6 分段, 是题的关键, 给出了计算方法.

八、(满分 10 分) 试求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$ 的和函数 $s(x)$, 并计算 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ 的值.

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+1)x^{2n}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(2n-1)x^{2n-2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+1)}{2(2n-1)} \cdot x^2 \right| = \frac{x^2}{2}.$

当 $x = \pm\sqrt{2}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} \cdot 2^{n-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) = \frac{1}{2} (1+3+5+\dots)$, 显然发散.

故, 级数的收敛域为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

所以, 当 $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 时,

$$\begin{aligned}
s(x) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{2n-1} \right)' = \left(\frac{x}{2-x^2} \right)' \\
&= \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}.
\end{aligned}$$

故, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = s(1) = 3$.