

北 京 交 通 大 学

2017-2018-1-《几何与代数B》期末考试 参考答案

一. 选择题 (每小题 3 分, 满分 15 分) (请把答案填在答题纸上).

1. 若混合积 $(\alpha \times \beta) \cdot \gamma = 2$, 则混合积 $[(\alpha - \gamma) \times (\alpha - \beta)] \cdot (\beta - \gamma) = \underline{A}$.

- (A) 0 (B) 2 (C) -2 (D) 4

2. $\alpha_1 = (0, 2, 1, 0), \alpha_2 = (2, 0, -1, 3), \alpha_3 = (1, 3, 1, 3), \alpha_4 = (1, 1, 0, 2)$ 的一个最大无关组是 C.

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (B) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ (D) α_1, α_4

3. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, 若 A, B 均非零且满足 $AB = 0$, 则必有 C.

- (A) A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关
 (B) A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关
 (C) A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关
 (D) A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关

4. 方程 $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 4xz + 1 = 0$ 在 R^3 中表示的图形是 D.

- (A) 椭球面 (B) 单叶双曲面 (C) 椭圆柱面 (D) 双叶双曲面

5. 下面四个矩阵中不能与对角阵相似的是 B.

- (A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

二. 填空题 (每小题 3 分, 满分 15 分) (请把答案填在答题纸上).

1. 若 α, β, γ 为单位向量, 且 $\alpha + \beta + \gamma = 0$, 则 $\alpha \cdot \beta + \beta \cdot \gamma + \gamma \cdot \alpha = \underline{\left[-\frac{3}{2} \right]}$.

2. 若 2 阶方阵 A 有特征值 1, 2, 则行列式 $|A^2 - 3A| = \underline{\left[4 \right]}$.

3. 若实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2kx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 正定, 则 k 的取值范围是 $\left[-\frac{4}{5} < k < 0 \right]$.

4. 设 A 是 n 阶方阵, $|A| = \frac{1}{4}$. 若 A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 $\left| \left(\frac{1}{2}A \right)^{-1} + 4A^* \right| = \underline{\left[4 \cdot 3^n \right]}$.

5. 设 $|A_{3 \times 3}| = -2$, 将 A 列分块为 $[A_1, A_2, A_3]$, 则行列式 $|A_3 - 2A_1 \quad 2A_2 \quad 2A_3| = \underline{\left[16 \right]}$.

三. (10 分) 计算 n 阶行列式 $d = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

解: 将第一行-1 倍加到其它各行

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad \dots 5 \text{ 分}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1)^{n-1} (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} = 2(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad \dots 10 \text{ 分}$$

解法二) 相邻两行相减

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \dots 10 \text{ 分}$$

$$= 2(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} (-1)^{n-1} = 2(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

四 (10 分) 求过点 $M(2,1,3)$, 且与直线 $l: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程.

解: 设所求直线方向向量为 $\{s, p, q\}$, 则有
$$\begin{cases} 3s + 2p - q = 0 \\ \begin{vmatrix} 2 - (-1) & 1 - 1 & 3 - 0 \\ s & p & q \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

解得 $s = -2p, q = -4p$. 所求直线方程为

$$\frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-4}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

五. (10 分) 已知平面 π 垂直于 $\pi_1: 5x - y - 3z - 2 = 0$, 并与 π_1 的交线落在 xoy 平面上, 求 π .

解: 由题意, π 过 π_1 与 xoy 的交线 $l: \begin{cases} 5x - y + 3z - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

可设 π 的方程为 $5x - y + 3z - 2 + \lambda z = 0$, $\dots\dots 4 \text{ 分}$

由 π 垂直于 π_1 , 得 $\lambda = -\frac{35}{3}$. $\dots\dots 8 \text{ 分}$

π 的方程

$$15x - 3y + 26z - 6 = 0. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

六. (10 分) 三阶阵 A, B, X 满足 $BX = AB$, 其中 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

试求 X^n (n 是自然数).

解: 由 $BX = AB$ 得, $X = B^{-1}AB$, $X^n = B^{-1}A^nB$. $\dots\dots 3 \text{ 分}$

由 $B^{-1} = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 知

$$X = B^{-1}AB = BAB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

因 $A^n = \begin{cases} A & n \text{ 是奇数} \\ I & n \text{ 是偶数} \end{cases}$, 故

$$X^n = B^{-1}A^nB = \begin{cases} B^{-1}AB = X = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & n \text{ 是奇数} \\ I, & n \text{ 是偶数} \end{cases}. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

七. (12 分) 当实数 a 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases} x_1 + ax_2 & = 1 \\ & x_2 + ax_3 & = -1 \\ & & x_3 + ax_4 & = 0 \\ ax_1 & & & + x_4 & = 0 \end{cases}$

(1) 无解; (2) 有惟一解; (3) 有无穷多组解? 此时写出它的所有解 (用向量组表示).

解: 将原方程组的增广矩阵化为阶梯形:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^4 & -a-a^2 \end{array}\right) \quad \cdots 3 \text{ 分}$$

(1) 当 $1-a^4 \neq 0$ 时, 即 $a \neq \pm 1$ 时, 原方程组有惟一解. $\cdots 6 \text{ 分}$

(2) 当 $1-a^4 = 0, -a-a^2 \neq 0$ 时, 即 $a = 1$ 时, 原方程组无解. $\cdots 7 \text{ 分}$

(3) 当 $1-a^4 = 0, -a-a^2 = 0$ 时, 即 $a = -1$ 时, 方程组有无穷多组解. 此时

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

原方程组的一个特解是 $\eta_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 导出组的基础解系是 $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

原方程组的一般解是 $\eta_0 + k\xi (k \text{ 任取})$. $\cdots 12 \text{ 分}$

八. (12 分) 实对称阵 $A_{3 \times 3}$ 的各行元素之和为 3. 向量 $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是方程组 $Ax = 0$ 的两个解.

(1) 求 A 的特征值和特征向量; (2) 求正交阵 P 使 $P^T A P$ 为对角阵; (3) 求矩阵 A .

分析: 其实直接设出 A 的元素, 用已知条件直接求得 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

解: (1) A 的各行元素之和为 3, 可推出 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 A 的属于特征值 3 的特征向量;

向量 $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是方程组 $Ax = 0$ 的两个解, 推出 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 A 的属于特征值 0

的特征向量.

所以 A 的全部特征值是 3, 0, 0.

A 的属于特征值 3 的全部特征向量是 $k\alpha_1$ ($k \neq 0$);

A 的属于特征值 0 的全部特征向量是 $k\alpha_2 + l\alpha_3$ (k, l 不全为零). ...6 分

(2) 将 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 单位化得 $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 将 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化得

$$\beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-3}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 单位化得}$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{令 } P = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \text{ 则 } P^T A P = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}. \quad \dots 10 \text{ 分}$$

$$(3) \text{ 由上, 知 } A = P \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} P^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \dots 12 \text{ 分}$$

九. (6 分) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵. 若 $r(A) = n$, 证明: $r(AB) = r(B)$.

证: 只需证明方程组 $ABX = 0$ 与 $BX = 0$ 同解.

显然 $BX = 0$ 的解都是 $ABX = 0$ 的解.

反过来, 任取 $ABX = 0$ 的一个解 η , 即 $AB\eta = 0$.

由 $r(A) = n$, 知 $B\eta = 0$, 从而 η 是 $BX = 0$ 的解. ...6 分

北 京 交 通 大 学

2018-2019-1-《几何与代数 B》期末考试 参考答案

一、选择题 (本题满分 15 分, 共有 5 道小题, 每道小题 3 分)

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 则 $(A^*)^{-1} = \mathbf{【 \quad \quad \quad 】}$.

(A) A ; (B) A^{-1} ; (C) $6A$; (D) $6^{-1}A$.

解: 因为 $A(A^*) = |A|E$, 所以, $|A|^{-1}A(A^*) = E$,

故, $(A^*)^{-1} = |A|^{-1}A = 6^{-1}A$.

2. 设 A, B 均为 n 阶可逆阵, 且 $(A+B)^2 = E$, 则 $(E+BA^{-1})^{-1} = \mathbf{【 \quad \quad \quad 】}$.

(A) $(A+B)B$; (B) $E+AB^{-1}$; (C) $A(A+B)$; (D) $(A+B)A$.

解: 由已知, 得 $A(A+B) + B(A+B) = E$, 或 $A(A+B) + BA^{-1}A(A+B) = E$,

即 $(E+BA^{-1})A(A+B) = E$, 因此, $(E+BA^{-1})^{-1} = A(A+B)$.

3. 设有两向量组 (I): $\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}), \alpha_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}), \alpha_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$ 和向量组

(II): $\beta_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}), \beta_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}), \beta_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34})$. 则下述命题

正确的是 $\mathbf{【 \quad \quad \quad 】}$.

(A) (I) 相关 $\Rightarrow$ (II) 相关; (B) (I) 无关 $\Rightarrow$ (II) 无关;

(C) (II) 无关 $\Rightarrow$ (I) 无关; (D) (II) 相关 $\Rightarrow$ (I) 无关.

解: 由向量组线性相关性: 整体无关, 则部分即无关;

整体相关, 则减维亦相关。

因此, (II) 相关 $\Rightarrow$ (I) 相关, 其逆否命题, 即为 (B).

4. 设 A 是 n 阶方阵, 对齐次线性方程组 (I): $A^n x = 0$ 和 (II): $A^{n+1} x = 0$, 现有 4 个命题:

①、(I) 的解必是 (II) 的解, ②、(II) 的解必是 (I) 的解,

③、(I) 的解未必是 (II) 的解, ④、(II) 的解未必是 (I) 的解.

以上命题中正确的是 $\mathbf{【 \quad \quad \quad 】}$.

(A) ①、②; (B) ①、④; (C) ③、④; (D) ②、③.

解: (I) 的解必是 (II) 的解, 即①必然成立.

仅需证明 $A^{n+1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解必然是 $A^n\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解即可 (或 $R(A^{n+1}) = R(A^n)$ 亦可).

利用反证法: 假设 $A^{n+1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 但 $A^n\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,

考虑向量组: $\alpha, A\alpha, A^2\alpha, \dots, A^n\alpha$ 的线性相关性, 即若

$$k_0\alpha + k_1A\alpha + k_2A^2\alpha + \dots + k_nA^n\alpha = \mathbf{0},$$

用 A^n 左乘上式两边, 得

$$k_0A^n\alpha + k_1A^{n+1}\alpha + k_2A^{n+2}\alpha + \dots + k_nA^{2n}\alpha = \mathbf{0},$$

得 $k_0A^n\alpha = \mathbf{0}$, 因此 $k_0 = 0$.

类似地, 用 A^{n-1} 左乘上式两边, 得 $k_1 = 0, \dots$

以此类推, 最后会得到 $k_0 = k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$, 即 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha, \dots, A^n\alpha$ 线性无相.

但这 $n+1$ 个 n 维向量组显然相关 (向量个数大于维数), 矛盾.

假设不成立. 因此 $A^{n+1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解必然是 $A^n\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解. 所以②亦成立.

5. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma$ 均为 3 维列向量, 且行列式

$$|\alpha_1, \beta_1, \gamma| = |\alpha_1, \beta_2, \gamma| = |\alpha_2, \beta_1, \gamma| = |\alpha_2, \beta_2, \gamma| = 3,$$

则行列式 $|2\gamma, \alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + 2\beta_2| = \mathbf{[\quad \quad]}$.

(A) 18; (B) 36; (C) 54; (D) 72.

解: $|2\gamma, \alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + 2\beta_2| = 2|\gamma, \alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + 2\beta_2|$

$$= 2|\gamma, \alpha_1, \beta_1 + 2\beta_2| + 2|\gamma, \alpha_2, \beta_1 + 2\beta_2|$$

$$= 2|\alpha_1, \beta_1 + 2\beta_2, \gamma| + 2|\alpha_2, \beta_1 + 2\beta_2, \gamma|$$

$$= 2|\alpha_1, \beta_1, \gamma| + 4|\alpha_1, \beta_2, \gamma| + 2|\alpha_2, \beta_1, \gamma| + 4|\alpha_2, \beta_2, \gamma|$$

$$= 12 \times 3 = 36.$$

二、填空题 (本题满分 15 分, 共有 5 道小题, 每道小题 3 分)

1. 设点 $A(a, b, 3)$ 、 $B(b, a, 0)$ 、 $C(1, -1, 1)$ 共线, 则 $a + b = \underline{\hspace{2cm}}$. 0

解: 由已知, 得

$$\frac{a-b}{a-1} = \frac{b-a}{b+1} = \frac{3-0}{3-1},$$

整理得 $3a + 3b = 0$, 故 $a + b = 0$.

2. 已知 α, β 均为 3 维列向量, 且满足 $3\alpha + 2\beta = (1, 13, 5)^T$, $\beta = (-1, 2, 4)^T$, 则内积 $(\alpha, \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$. 1

解: 由 $3\alpha + 2\beta = (1, 13, 5)^T$, $\beta = (-1, 2, 4)^T$, 得

$$3\alpha = (1, 13, 5)^T - 2(-1, 2, 4)^T = (3, 9, -3)^T,$$

所以, $\alpha = (1, 3, -1)^T$, 且 $(\alpha, \beta) = -1 + 6 - 4 = 1$.

3. 设线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + kx_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ 的系数矩阵为 A , B 为 3 阶方阵. 已知 $B \neq 0$,

且 $AB = 0$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$. 1

解: 由已知, 知 $R(A) < 3$.

$$\text{又 } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & k \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & k+10 \\ 0 & 0 & 1-k \end{pmatrix}, \text{ 故 } k = 1.$$

4. 已知 $\alpha = (1, -2, 3)^T$ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & 1 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量, 则 $a + b = \underline{\hspace{2cm}}$.

解: $A\alpha = \lambda\alpha$, 所以, $\lambda = -4$, $a = -2$, $b = 9$. 故 $a + b = 7$.

5. 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_2x_3$ 是正定的, 则常数 a 的取值范

围是 $\underline{\hspace{2cm}}$. $-\sqrt{\frac{7}{2}} < a < \sqrt{\frac{7}{2}}$

解: $f = xAx^T$, $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, 计算得

$$A_1 = 1 > 0, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 4 \end{vmatrix} = 4 - a^2 > 0, \quad A_3 = |A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 - 2a^2 > 0,$$

整理得: $-\sqrt{\frac{7}{2}} < a < \sqrt{\frac{7}{2}}$.

三、(满分 10 分) 计算 n 阶行列式值:

$$D_n = \begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x+a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & x+a_n \end{vmatrix}$$

解: 利用行列式基本性质, 有

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x+a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & x+a_n \end{vmatrix} = (x + \sum_{k=1}^n a_k) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & x+a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & x+a_n \end{vmatrix} \\ &= (x + \sum_{k=1}^n a_k) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = x^{n-1} (x + \sum_{k=1}^n a_k). \end{aligned}$$

四、(满分 10 分) 问 a, b 为何值时, 非齐次线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 6x_3 + x_4 = -1 \\ 7x_1 + 3x_2 + ax_3 + 2x_4 = -1 \\ -x_1 + x_2 - 6x_3 - x_4 = b \end{cases}$$

无解, 有惟一解, 有无穷多解? 并在有无穷多解的情况下, 写出它的

所有解 (用导出组基础解系表示)。

解: 将原方程组的增广矩阵化为阶梯型:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -6 & 1 & -1 \\ 7 & 3 & a & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -6 & -1 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 10 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a+8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+2 \end{pmatrix} \quad \text{---2 分}$$

1、当 $b \neq -2$ 时, $R(A) < R(\bar{A})$, 原方程组无解;

2、不论 a, b 取何值时, 原方程组都没有唯一解;

---6 分

3、当 $b = -2, a = -8$ 时, 原方程组有无穷解: 原方程组等价于

$$\begin{cases} 2x_1 = -2x_3 - x_4 + 1 \\ 2x_2 = 10x_3 + x_4 - 3 \end{cases}$$

一般解是

$$k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \text{ 任取} \quad \text{---8 分}$$

4、当 $b = -2, a \neq -8$ 时, 原方程组有无穷解: 原方程组等价于

$$\begin{cases} 2x_1 = -x_4 + 1 \\ 2x_2 = x_4 - 3 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

一般解是

$$k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k_2 \text{ 任取} \quad \text{---10 分}$$

五、(满分 10 分) 已知平面 π 过 $\pi_1: 2x - 3y - z + 1 = 0$ 与 $\pi_2: x + y + z = 0$ 的交线, 且与 π_2 垂直, 求此平面 π 的方程.

解: 设过平面 π_1 与 π_2 交线的平面束(族)为

$$\lambda(2x - 3y - z + 1) + \mu(x + y + z) = 0.$$

整理, 得, $(\mu + 2\lambda)x + (\mu - 3\lambda)y + (\mu - \lambda)z + \lambda = 0$

由平面 π 与 π_2 垂直, 得

$$\vec{n} \cdot \vec{n}_2 = (\mu + 2\lambda) + (\mu - 3\lambda) + (\mu - \lambda) = 0,$$

解之得, $3\mu = 2\lambda \neq 0$.

因此, 所求平面方程为: $8x - 7y - z + 3 = 0$.

六、(满分 10 分) 已知直线 $L_1: \begin{cases} 3y + 2z = 6 \\ x = 0 \end{cases}$ 与 $L_2: \begin{cases} 3x + z = -3 \\ y = 0 \end{cases}$, 求

1) L_1 与 L_2 间的距离; 2) 过 L_1 , 且与 L_2 平行的平面方程.

解: 1) 化 L_1 , L_2 的方程为对称式, 则有:

$$L_1: \frac{x}{0} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{3}; \quad L_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{3}.$$

则 L_1 的方向向量 $\vec{s}_1 = (0, -2, 3)$, L_2 的方向向量 $\vec{s}_2 = (-1, 0, 3)$, 且有

$$\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-6, -3, -2),$$

法一: 再取 L_1 的点 $M_1(0, 2-2t_1, 3t_1)$, L_2 的点 $M_2(-1-t_2, 0, 3t_2)$,

由题意, 应有

$$\overrightarrow{M_1M_2} \parallel \vec{s}_1 \times \vec{s}_2,$$

$$\text{即 } \frac{-1-t_2}{6} = \frac{-2+2t_1}{3} = \frac{3t_2-3t_1}{2}, \text{ 解得, } t_1 = \frac{31}{49}, \quad t_2 = \frac{23}{49},$$

$$\text{故此, } M_1(0, \frac{36}{49}, \frac{93}{49}), \quad M_2(\frac{72}{49}, 0, \frac{69}{49}),$$

$$d(L_1, L_2) = d(M_1, M_2) = \frac{12}{7}.$$

法二: 取 L_1 上点 $M_1(0, 2, 0)$, L_2 上点 $M_2(-1, 0, 0)$; 则有

$$(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2) = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0,$$

即 L_1 与 L_2 是异面直线.

$$\text{又 } \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-6, -3, -2),$$

$$\text{从而, } d(L_1, L_2) = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2)|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|} = \frac{12}{7}.$$

2) 所求平面的法向量为 $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = (-6, -3, -2)$.

又点 M_1 在所求平面上, 故所求平面方程为:

$$-6(x-0) - 3(y-2) - 2(z-0) = 0,$$

$$\text{或 } 6x + 3y + 2z - 6 = 0.$$

七、(满分 10 分) 求一个正交变换 $X = PY$, 将下列二次型化为标准形

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3,$$

并指出 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 是何二次曲面.

解: 1) 二次型矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix},$

2) A 的特征多项式

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(10-\lambda),$$

所以, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 10.$

● 将 $\lambda_1 = 1$ 代入到齐次方程组 $(A - \lambda E)X = 0$, 有

$$(A - E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 得基础解系 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

正交化, 令 $\beta_1 = \alpha_1 = (-2, 1, 0)^T$, $\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \frac{1}{5}(2, 4, 5)^T$,

● 将 $\lambda_3 = 10$ 代入到齐次方程组 $(A - \lambda E)X = 0$:

$$(A - 10E) = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 得基础解系 } \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

● 单位化, $\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \gamma_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}; \gamma_3 = \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$

3) 令 $P = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, 则由正交变换 $X = PY$, 得 $f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2.$

且, $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 是 (旋转) 椭球面.

八、(满分 10 分) 设 $\alpha_1 = (1, 0, 2, 3), \alpha_2 = (1, 1, 3, 5), \alpha_3 = (1, -1, a+2, 1),$

$\alpha_4 = (1, 2, 4, a+8), \beta = (1, 1, b+3, 5)$, 问: a, b 为何值时?

1) β 不能表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合;

2) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 惟一线性表示, 并写出该表示式.

$$\text{解: } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 & b+3 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{pmatrix},$$

1) 当 $a = -1, b \neq 0$ 时, $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2 < 3 = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta)$,

因此, β 不能被 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出.

2) 当 $a \neq -1$ 时, $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta) = 4$,

β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 惟一线性表示, 且由

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2b}{a+1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a+b+1}{a+1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{b}{a+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{即, } \beta = \frac{-2b}{a+1}\alpha_1 + \frac{a+b+1}{a+1}\alpha_2 + \frac{b}{a+1}\alpha_3 + 0\alpha_4.$$

九、(满分 10 分)

1) 设 α, β 为线性相关的 3 维列向量, 矩阵 $A = \alpha\alpha^T + \beta\beta^T$, 证明: $R(A) < 2$;

2) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, B 为 3 阶非零阵, 且 $AB = O$, 求 t 的取值范围.

解: 1) 由 α, β 为线性相关, 不妨令 $\beta = k\alpha$, 则 $A = \alpha\alpha^T + (k\beta)(k\beta)^T = (1+k^2)\alpha\alpha^T$

因此, $R(A) = R(\alpha\alpha^T) \leq 1 < 2$.

2) 由 B 为 3 阶非零阵, 知 $R(B) \geq 1$, 再由 $AB = O$, 得 $R(A) + R(B) \leq 3$,

$$\text{所以, } R(A) < 3, \text{ 即 } \det A = 0, \text{ 而 } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & t+3 & 0 \end{pmatrix},$$

因此, $t = -3$.

北 京 交 通 大 学

2019-2020-1-《几何与代数 B》期末考试 参考答案

一、单选题 (本题满分 30 分, 共有 10 道小题, 每道小题 3 分)

1、设 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} \neq 0$, 则 x 需满足 【 C 】.

- (A) $x \neq 2$ (B) $x \neq 3$ (C) $x \neq 2$ 且 $x \neq 3$ (D) $x \neq 2$ 或 $x \neq 3$.

解: $D = (x-3)(x-2)(2-1) = (x-3)(x-2)$.

2、设 A, B 均为 n 阶方阵, 则下列结论中, 正确的是 【 C 】.

- (A) $AB = O \Rightarrow A = O$ 或 $B = O$ (B) $A = O \Leftrightarrow |A| = 0$
 (C) $|AB| = 0 \Rightarrow |A| = 0$ 或 $|B| = 0$ (D) $A = 2I \Rightarrow |A| = 2$.

3、设 A 是 3 阶方阵, $|A| = \frac{1}{3}$, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 $|(3A)^{-1} + 2A^*| =$ 【 B 】.

- (A) 1 (B) 3 (C) 6 (D) 9.

解: $|(3A)^{-1} + 2A^*| = |3^{-1}A^{-1} + 2A^*| = \left| \frac{1}{3|A|} A^* + 2A^* \right| = 3^3 \times |A|^2 = 1$.

4、已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 均为 4 维列向量, $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1)$, $B = (\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2, \beta_2)$, 且

$|A| = 2$, $|B| = 3$, 则行列式 $|A+B| =$ 【 B 】.

- (A) 5 (B) 10 (C) 12 (D) 24.

解: $A+B = (\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \beta_1 + \beta_2) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + \beta_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

所以, $|A+B| = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + \beta_2| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(|A| + |B|) = 10$.

5、设 α 为 n 维实列向量, $\alpha^T \alpha = a$. 记 $A = I - b\alpha\alpha^T$ (I 为 n 阶单位矩阵, α^T 为 α 的转置矩阵, b 为实数). 则 A 为正交矩阵当且仅当 【 D 】.

- (A) $ab = 0$ (B) $ab = 2$ (C) $ab(ab-2) \neq 0$ (D) $ab(ab-2) = 0$.

解: 由 $A = I - b\alpha\alpha^T$, 知

$$AA^T = (I - b\alpha\alpha^T)(I - b\alpha\alpha^T) = I - 2b\alpha\alpha^T + ab^2\alpha\alpha^T = I + (ab^2 - 2b)\alpha\alpha^T.$$

因此, A 为正交矩阵 $\Leftrightarrow AA^T = I$

$$\Leftrightarrow (ab^2 - 2b)\alpha\alpha^T = 0 \Leftrightarrow ab(ab-2) = 0.$$

6、设三维向量组 α, β, γ , 则 $\alpha - \beta, \beta - \gamma, \gamma - \alpha$ 的相互关系是 【 A 】.

- (A) 共面 (B) 共线 (C) 共点 (D) 既不共线也不共面.

解: $(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) + (\gamma - \alpha) = 0$

$$\Rightarrow \alpha - \beta, \beta - \gamma, \gamma - \alpha \text{ 线性相关} \quad \Rightarrow \alpha - \beta, \beta - \gamma, \gamma - \alpha \text{ 共面}.$$

7、设直线 $L: \begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$ 及平面 $\pi: 4x-2y+z-2=0$, 则 【 C 】.

- (A) L 平行于 π (B) L 在 π 上 (C) L 垂直于 π (D) L 与 π 斜交.

解: 对于直线 $L: \begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$,

$$\text{令 } z=0, \text{ 得 } x = \frac{-10}{7}, y = \frac{1}{7}; \text{ 令 } x=0, \text{ 得 } y = \frac{-4}{7}, z = \frac{5}{14}.$$

$$\text{故, } L: \frac{x-0}{4} = \frac{y+\frac{4}{7}}{-2} = \frac{z-\frac{5}{14}}{1}, \text{ 显然 } L \text{ 垂直于 } \pi.$$

8、若 2 阶方阵 A 相似于 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, I 为 2 阶单位矩阵, 则 $A-I$ 相似于 【 B 】.

- (A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$

解: A 的特征值为 1、3, 因此 $A-I$ 的特征值必为 0、2,

显然 $\det(A-I) = 0$, 因此, A、D 选项不对;

C 选项的特征值为 0、1; B 的特征值为 0、2, 因此, 选 B.

——这是简单的解法, 当然, 硬求特征值也可以.

9、曲线 $\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ 围绕 y 轴旋转一周所围成的曲面是 【 A 】.

- (A) 单叶双曲面 (B) 双叶双曲面 (C) 抛物面 (D) 柱面.

解: 曲线 $\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ 围绕 y 轴旋转一周所围成的曲面是: $4x^2 + 4z^2 - y^2 = 1$.

注: 基本口诀: **绕着哪个轴转, 那个量就不变.**

10、若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2kx_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 的秩为 2, 则 k 的值为

【 B 】.

(A) $1 \pm \sqrt{2}$ (B) $-1 \pm \sqrt{2}$ (C) $\pm 1 + \sqrt{2}$ (D) $\pm 1 - \sqrt{2}$.

解: $A = \begin{pmatrix} 3 & k & -1 \\ k & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2+k & 1+k \\ 0 & k+3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-k \\ 0 & 0 & k^2+2k-1 \end{pmatrix},$

$$R(A) = 2 \Rightarrow k^2 + 2k - 1 = 0 \Rightarrow k = -1 \pm \sqrt{2}.$$

二、选择题 (本题满分 20 分, 共有 5 道小题, 每道小题 4 分)

1、二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + (1-k)x_3^2 + 2kx_1x_2 + 2x_1x_3$ 正定二次型, 则 k 应满足 **【 C 】**.

(A) $k < 0$ (B) $-2 < k < 0$ (C) $-1 < k < 0$ (D) $0 < k < 1$.

解: 二次型矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1-k \end{pmatrix}$, 二次型正定当且仅当它的矩阵的各阶顺序主子式大于 0.

$$\text{即, } |1| = 1 > 0, \begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 2 \end{vmatrix} = 2 - k^2 > 0, \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1-k \end{vmatrix} = k^3 - k^2 - 2k > 0. \text{ 解得 } -1 < k < 0.$$

2、已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 可相似对角化当且仅当 **【 A 】**.

(A) $a + b = 0$ (B) $a + b = 1$ (C) $a = b = 0$ (D) $a = b = 1$

解 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -a & \lambda - 1 & -b \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$, 所以, A 有特征值: 1 (二重), -1.

因为 A 可以对角化, 所以, 对应于特征值 1 的线性无关的特征向量有 2 个.

故, $R(I - A) = 1$.

$$\text{由 } I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -a & 0 & -b \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -b-a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 知 } a + b = 0.$$

3、已知 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ k & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 是 A 的特征向量, 则 $k = \mathbf{【 B 】}$.

(A) 2 (B) -2 (C) 4 (D) -4.

解: 设 λ 是矩阵 A 的对应于 α 的特征值, 则

$$A\alpha = \begin{pmatrix} 3-4-3 \\ k+4+6 \\ 3-12-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ k+10 \\ -12 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

所以, $\lambda = -4$, $k = -2$.

4、设 A, B 是 n 阶方阵, I 为 n 阶单位矩阵. 若 $(AB)^2 = I$, 则 $\mathbf{【 D 】}$.

(A) $AB = I$ 或 $AB = -I$ (B) $|A| \cdot |B| = 1$
(C) $AB = BA$ (D) $(BA)^2 = I$.

解: 若令 $A = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$, 则 A、B 均不成立;

若令 $A = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{pmatrix}$, 则 $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ & -1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ & -1 \end{pmatrix}$, 即 C 不成立;

由已知, 有 $B = BI = B(AB)^2 = BABAB = (BA)^2 B$,

易知, B, A, AB, BA 均可逆, 因此, $(BA)^2 = I$, 即 D 成立.

5、在平面 $x + y + z - 2 = 0$ 与 $x + 2y - z - 1 = 0$ 的交线上有一点 M , 其到平面 $x + 2y + z + 1 = 0$ 和 $x + 2y + z - 3 = 0$ 的距离相等. 则 M 的坐标是 $\mathbf{【 D 】}$.

(A) (3, 1, 1) (B) (3, 2, 1) (C) (2, 3, 2) (D) (3, -1, 0).

解: 由题意, 点 M 的坐标 (x, y, z) 是如下方程组的解:

$$\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0, \\ x + 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{再由 } (A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

易求得 $x = 3$, $y = -1$, $z = 0$. 故选 (D).

三、(满分 10 分) 计算三对角型行列式: $D_n =$

$$\begin{vmatrix} \alpha + \beta & \beta & & & \\ & \alpha & \alpha + \beta & \beta & \\ & & \alpha & \alpha + \beta & \beta \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \alpha & \alpha + \beta & \beta \\ & & & & & \alpha & \alpha + \beta \end{vmatrix}.$$

解: 利用数学归纳法:

$$1) D_1 = \alpha + \beta = \sum_{i=0}^1 \alpha^i \beta^{1-i}; \quad D_2 = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix} = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \sum_{i=0}^2 \alpha^i \beta^{2-i};$$

$$2) \text{ 假设 } D_k = \sum_{i=0}^k \alpha^i \beta^{k-i}, \quad (k < n), \text{ 则}$$

$$\begin{aligned} D_{k+1} &= (\alpha + \beta)D_k - \alpha\beta D_{k-1} = (\alpha + \beta) \sum_{i=0}^k \alpha^i \beta^{k-i} - \alpha\beta \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i \beta^{k-1-i} \\ &= \sum_{i=0}^k \alpha^{i+1} \beta^{k-i} + \sum_{i=0}^k \alpha^i \beta^{k+1-i} - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{i+1} \beta^{k-i} \\ &= \alpha^{k+1} + \sum_{i=0}^k \alpha^i \beta^{k+1-i} = \sum_{i=0}^{k+1} \alpha^i \beta^{k+1-i}. \end{aligned}$$

$$\text{综合上述, 有 } D_n = \sum_{i=0}^{n+1} \alpha^i \beta^{n+1-i} = \begin{cases} (n+1)\alpha^n, & \alpha = \beta, \\ \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}, & \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

注: 仅求出当 $\alpha = \beta$ 时, $D_n = (n+1)\alpha^n$. ———给 4 分.

四、(满分 10 分) 直线 L_1 , L_2 的方程分别为: $L_1: \begin{cases} \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ 与 $L_2: \begin{cases} x + \frac{z}{3} = -1 \\ y = 0 \end{cases}$,

1) 求 L_1 , L_2 间的距离; 2) 求过 L_1 且与 L_2 平行的平面方程.

解: 1) 化 L_1 , L_2 的方程为对称式, 则有:

$$L_1: \frac{x}{0} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{3}; \quad L_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{3}.$$

取 L_1 上点 $M_1(0, 2, 0)$, L_2 上点 $M_2(-1, 0, 0)$;

L_1 的方向向量 $\vec{s}_1 = (0, -2, 3)$, L_2 的方向向量 $\vec{s}_2 = (-1, 0, 3)$.

$$\text{则有 } (\vec{M_1M_2}, \vec{s_1}, \vec{s_2}) = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0, \text{ 从而 } L_1 \text{ 与 } L_2 \text{ 是异面直线.}$$

$$\text{又 } \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-6, -3, -2), \text{ 从而,}$$

$$L_1 \text{ 与 } L_2 \text{ 的距离为 } \frac{|(\vec{M}_1 \vec{M}_2, \vec{s}_1, \vec{s}_2)|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|} = \frac{12}{7}.$$

2) 所求平面的法向量为 $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = (-6, -3, -2)$. 又点 M_1 在所求平面上,

$$\text{故所求平面方程为: } -6(x-0) - 3(y-2) - 2(z-0) = 0,$$

$$\text{或 } 6x + 3y + 2z - 6 = 0.$$

注: 1) 取 L_2 上任意点 $N(-t_2-1, 0, 3t_2)$, 将其代入 L_1 的方程组中, 有

$$\frac{-t-1}{0} = \frac{0-2}{-2} = \frac{3t}{3},$$

无解, 因此 L_1 与 L_2 不相交, 显然, L_1 与 L_2 也不平行. 因此, L_1 与 L_2 不共面.

2) 取 L_1 上任意点 $M(0, -2t_1+2, 3t_1)$, L_2 上任意点 $N(-t_2-1, 0, 3t_2)$, 由

$$\overrightarrow{MN} \perp \vec{s}_1, \quad \overrightarrow{MN} \perp \vec{s}_2$$

$$\text{有 } \begin{cases} 0 \cdot (-t_2-1) - 2 \cdot (2t_1-2) + 3 \cdot (3t_2-3t_1) = 0 \\ -1 \cdot (-t_2-1) + 0 \cdot (2t_1-2) + 3 \cdot (3t_2-3t_1) = 0 \end{cases}$$

解得 $t_1 = \frac{31}{49}$, $t_2 = \frac{23}{49}$, 得公垂线的垂足分别为

$$M(0, \frac{36}{49}, \frac{108}{49}), N(\frac{72}{49}, 0, \frac{69}{49}),$$

亦可, 求得.

五、(满分 10 分) $\alpha_1 = (1, 0, 2, 3), \alpha_2 = (1, 1, 3, 5), \alpha_3 = (1, -1, a+2, 1), \alpha_4 = (1, 2, 4, a+8),$
 $\beta = (1, 1, b+3, 5)$, 求:

1) a, b 为何值时, β 不能表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合?

2) a, b 为何值时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 惟一线性表示.

解: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 & b+3 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{pmatrix},$$

1) 当 $a = -1, b \neq 0$ 时, $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2 < 3 = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta)$,

因此, β 不能被 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出.

2) 当 $a \neq -1$ 时, $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta) = 4$,

因此, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 惟一线性表示.

3) 当 $a = -1, b = 0$ 时, $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta) = 2 < 4$,

因此, β 能被 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出, 且表示法不惟一.

六、(满分 10 分) 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & a-3 \end{pmatrix}$ 不可逆, 又矩阵 $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ b+1 & c-2 \end{pmatrix}$, 使得矩阵方程

$AX = B$ 有解.

1) 求 a, b, c 的值;

2) 求 X .

解: 将矩阵方程的增广矩阵, 化为阶梯形:

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & a-3 & b+1 & c-2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & a-1 & b+3 & c+1 \end{pmatrix},$$

1) 由 A 不可逆, 得 $a = 1$;

再由矩阵方程 $AX = B$ 有解, 知 $R(A, B) = R(A) = 2$, 得 $b = -3, c = -1$.

所以, $a = 1, b = -3, c = -1$.

$$2) (A, B) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

不妨令 $B = (\beta_1, \beta_2)$, 则

$$Ax = \beta_1 \text{ 的解为 } X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$Ax = \beta_2 \text{ 的解为 } X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

其中, k_1, k_2 为任意常数.

故矩阵方程的解

$$X = (X_1, X_2) = \begin{pmatrix} 2-2k_1 & 3-2k_2 \\ -1-k_1 & -2-k_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} \text{ 或 } X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k_1 & 2k_2 \\ k_1 & k_2 \\ -k_1 & -k_2 \end{pmatrix}.$$

七、(满分 10 分) 已知三元二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3.$$

1) 用正交变换 $X = TY$ 化二次型为标准形, 并写出相应正交矩阵 T ;

2) 指出方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 表示何种二次曲面.

解: 1) 二次型矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, 有特征多项式

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 3 \\ -1 & 5-\lambda & -3 \\ 3 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 4)(\lambda - 9)\lambda$$

解得特征值为 $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 0$.

对应三个特征值得三个两两正交的特征向量

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

将它们单位化为

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

作矩阵 $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, 则 T 是正交矩阵.

经正交变换 $X = TY$, 可将二次型化为

$$f = 4y_1^2 + 9y_2^2.$$

2) $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 可化为 $\frac{y_1^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y_2^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1$. 它是一个椭圆柱面.

北 京 交 通 大 学

2020-2021-1-《几何与代数B》期末考试 参考答案

一、单选题 (本题满分 30 分, 共有 10 道小题, 每道小题 3 分)

1、行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & x-1 \\ 1 & -2 & x+1 & -1 \\ 1 & x-2 & 1 & -1 \\ x+1 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, 则 x 满足 **【 C 】**.

(A) $x \neq 0, x \neq 2$ (B) $x \neq 0$ 或 $x \neq 2$ (C) $x \neq 0, x \neq 1$ (D) $x \neq 0$ 或 $x \neq 1$.

解: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & x-1 \\ 1 & -2 & x+1 & -1 \\ 1 & x-2 & 1 & -1 \\ x+1 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{聚}} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & x-1 \\ 1 & -2 & x+1 & -1 \\ 1 & x-2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (x-1)x^3$.

2、已知行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, M_{ij} 是 a_{ij} 的余子式, A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式, 则

$$2A_{11} + 3M_{12} + 2M_{13} - A_{14} = \text{【 A 】}.$$

(A) 6

(B) -6

(C) 12

(D) -12.

解: $2A_{11} + 3M_{12} + 2M_{13} - A_{14} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{箭型}} \begin{vmatrix} 6 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6$.

3、函数 $f(x) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & x \\ x & 2 & 5 \\ 1 & 4 & x \end{vmatrix}$ 在 y 轴上的截距为 **【 C 】**.

(A) -60

(B) 60

(C) -65

(D) 65.

解: $f(x) = 5x^2 + 4x - 65$.

4、若 $\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$, 则 $\begin{vmatrix} 6x & -2y & -10z \\ -6 & -1 & 5 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \text{【 B 】}$.

- (A) -60 (B) 60 (C) -120 (D) 120.

$$\text{解: } \begin{vmatrix} 6x & -2y & -10z \\ -6 & -1 & 5 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -3x & y & 5z \\ -6 & -1 & 5 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5(-2)(-3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 60.$$

5、设 A 是 3 阶方阵, $|A| = \frac{1}{4}$, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 $|(4A)^{-1} + 3A^*| = \mathbf{【 B 】}$.

- (A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16.

$$\text{解: } |(4A)^{-1} + 3A^*| = |4^{-1}A^{-1} + 3A^*| = \left| \frac{1}{4|A|}A^* + 3A^* \right| = 4^3 \times |A|^2 = 4.$$

6、已知 $\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 4x_3 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 + (\lambda-5)x_3 = \lambda + 1, \end{cases}$ 有唯一解, 则 λ 满足 $\mathbf{【 D 】}$.

- (A) $\lambda \neq 1$ (B) $\lambda \neq 10$ (C) $\lambda \neq 1$ 或 $\lambda \neq 10$ (D) $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq 10$.

解: $Ax = b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow A$ 可逆 $\Leftrightarrow A$ 非奇异阵 $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & \lambda-9 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ \lambda & 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-10).$$

7、 $A = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}$, 其中 $a_i \neq 0, b_i \neq 0, (i=1, 2, \dots, n)$, 则 $R(A) = \mathbf{【 C 】}$.

- (A) $R(A) = n$ (B) $R(A) = n-1$ (C) $R(A) = 1$ (D) $R(A) = 0$.

解: $A = \alpha\beta^T$, 故 $R(A) \leq 1$, 再由 $a_i \neq 0, b_i \neq 0$, 知 $R(A) \geq 1$, 故 $R(A) = 1$.

8、三点 $A(a, b, 3)$, $B(b, a, 0)$, $C(1, -1, 1)$ 共线, 则 a, b 分别为 $\mathbf{【 B 】}$.

- (A) $a=3, b=3$ (B) $a=-3, b=3$ (C) $a=3, b=-3$ (D) $a=-3, b=-3$.

$$\text{解: } A, B, C \text{ 共线} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \frac{b-a}{1-a} = \frac{a-b}{-1-b} = \frac{-3}{-2} \Rightarrow a = -3, b = 3.$$

9、曲线 $\begin{cases} 4y^2 - z^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ 围绕 y 轴旋转一周所围成的曲面是 $\mathbf{【 B 】}$.

- (A) 单叶双曲面 (B) 双叶双曲面 (C) 抛物面 (D) 柱面.

解: 曲线 $\begin{cases} 4y^2 - z^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ 围绕 y 轴旋转一周所围成的曲面是: $4y^2 - z^2 - x^2 = 1$.

注: 基本口诀: **绕着哪个轴转, 那个量就不变.**

10、二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + 5x_4^2$ 正定, 则 **【 C 】**.

- (A) $\lambda < -2$ (B) $1 < \lambda$ (C) $-2 < \lambda < 1$ (D) $\lambda < -2$ 或 $1 < \lambda$.

解: 二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 0 \\ \lambda & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$,

$$P_1 = 1 > 0, \quad P_2 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 4 \end{vmatrix} = 4 - \lambda^2 > 0, \quad P_3 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 4\lambda - 4\lambda^2 > 0,$$

$$P_4 = |A| = 5P_3 > 0,$$

整理, 得 $\begin{cases} -2 < \lambda < 2 \\ -2 < \lambda < 1 \end{cases}$, 即 $-2 < \lambda < 1$ 时, f 为正定二次型.

二、选择题 (本题满分 20 分, 共有 5 道小题, 每道小题 4 分)

11、设 $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\alpha^T \alpha = 1$, 令 $A = I - 2\alpha\alpha^T$. 则论述: ① A 是对称阵; ② A^2 是单位阵; ③ A 是可逆阵; ④ A 是正交阵; ⑤ A 可相似对角化. 中正确的个数 **【 D 】**.

① A 是对称阵; ② A^2 是单位阵; ③ A 逆阵; ④ A 是正交阵; ⑤ A 可相似对角化.

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5.

解: $A^T = (I - 2\alpha\alpha^T)^T = I - 2(\alpha\alpha^T)^T = I - 2\alpha\alpha^T = A$;

$$A^2 = (I - 2\alpha\alpha^T)(I - 2\alpha\alpha^T) = I - 2\alpha\alpha^T - 2\alpha\alpha^T + 4\alpha\underline{\alpha^T\alpha}\alpha^T = I.$$

12、设向量组 $\alpha_1 = (3, 1, 2, 5), \alpha_2 = (1, 1, 1, 2), \alpha_3 = (2, 0, 1, 3), \alpha_4 = (1, -1, 0, 1), \alpha_5 = (4, 2, 3, 7)$, 则其秩为 **【 B 】**.

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4.

解: $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ ——竖起来写, 不要拘泥

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{显然, } R(A) = 2.$$

13、已知 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ k & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 是 A 的特征向量, 则 $k =$ **【 B 】**.

- (A) 2 (B) -2 (C) 4 (D) -4.

解: 设 λ 是矩阵 A 的对应于 α 的特征值, 则

$$A\alpha = \begin{pmatrix} 3-4-3 \\ k+4+6 \\ 3-12-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ k+10 \\ -12 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

所以, $\lambda = -4$, $k = -2$.

14、向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 则下列向量组中线性无关的是 【 C 】.

- (A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$ (B) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$
 (C) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ (D) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$.

解: $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1)$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{而 } |K| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

15、在平面 $x + y + z - 2 = 0$ 与 $x + 2y - z - 1 = 0$ 的交线上有一点 M , 其到平面 $x + 2y + z + 1 = 0$ 和 $x + 2y + z - 3 = 0$ 的距离相等. 则 M 的坐标是 【 D 】.

- (A) (3, 1, 1) (B) (3, 2, 1) (C) (2, 3, 2) (D) (3, -1, 0).

解: 由题意, 点 M 的坐标 (x, y, z) 是如下方程组的解
$$\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \\ x + 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{再由 } (A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

易求得 $x = 3$, $y = -1$, $z = 0$.

三、(满分 10 分) 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 + a_1^2 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2 + a_2^2 & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & a_n + a_n^2 \end{vmatrix}.$$

解:

$$\begin{aligned}
& D_n \xrightarrow{\text{增阶}} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 + a_1^2 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ 0 & a_2 a_1 & a_2 + a_2^2 & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & a_n + a_n^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{散}} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad \dots 6 \text{ 分} \\
& \xrightarrow{\text{聚}} \begin{vmatrix} 1 + \sum_{k=1}^n a_k & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \left(1 + \sum_{k=1}^n a_k\right) a_1 a_2 \cdots a_n. \quad \dots 10 \text{ 分} \\
& \text{另解: } D_n = a_1 a_2 \cdots a_n \cdot \begin{vmatrix} 1 + a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1 + a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1 + a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \cdot \begin{vmatrix} 1 + a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \quad \dots 6 \text{ 分} \\
& = a_1 a_2 \cdots a_n \cdot \begin{vmatrix} 1 + \sum_{k=1}^n a_k & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 + \sum_{k=1}^n a_k\right). \quad \dots 10 \text{ 分}
\end{aligned}$$

四、(满分 10 分) 平面 π 过 $\pi_1: 2x - 3y - z + 1 = 0$ 与 $\pi_2: x + y + z = 0$ 的交线且与 π_2 垂直, 求 π 的方程.

解: 设过平面 π_1 与 π_2 交线的平面束(族)为

$$\lambda(2x - 3y - z + 1) + \mu(x + y + z) = 0. \quad \dots 4 \text{ 分}$$

整理, 得 $(\mu + 2\lambda)x + (\mu - 3\lambda)y + (\mu - \lambda)z + \lambda = 0$.

由平面 π 与 π_2 垂直, 得

$$\vec{n} \cdot \vec{n}_2 = (\mu + 2\lambda) + (\mu - 3\lambda) + (\mu - \lambda) = 0. \quad \dots 8 \text{ 分}$$

解之得, $3\mu = 2\lambda \neq 0$.

因此, 所求平面方程为: $8x - 7y - z + 3 = 0$10 分

五、(满分 10 分) 列向量组 $\alpha = (1, 2, 1)^T$, $\beta = (1, \frac{1}{2}, 0)^T$, $\gamma = (0, 0, 8)^T$. 记 $A = \alpha\beta^T$, $B = \beta^T\alpha$, I 为 3 阶单位矩阵. 1) 计算矩阵 $2B^2A^2 - A^4 - 16I$; 2) 求方程组 $(2B^2A^2 - A^4 - 16I)X = \gamma$ 的所有解.

解: 1) $A = \alpha\beta^T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \beta^T\alpha = 2. \quad \dots 2 \text{ 分}$

$$A^2 = \alpha(\beta^T\alpha)\beta^T = 2\alpha\beta^T = 2A, \quad A^4 = 8A,$$

所以, $2B^2A^2 - A^4 - 16I = 8A^2 - 8A - 16I = 8(A - 2I) = \begin{pmatrix} -8 & 4 & 0 \\ 16 & -8 & 0 \\ 8 & 4 & -16 \end{pmatrix}. \quad \dots 3 \text{ 分}$

2) 方程组 $(2B^2A^2 - A^4 - 16I)X = \gamma$ 等价于 $\begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ x_3 = x_1 - \frac{1}{2} \end{cases}$

它有一个特解 $\eta = (0, 0, -\frac{1}{2})^T$, 导出组的基础解系为 $\xi_1 = (1, 2, 1)^T$,

所求方程组的通解是 $X = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k \text{ 为任意数}. \quad \dots 10 \text{ 分}$

注: 特解不唯一, 也可能是 $\eta_1 = (1, 2, \frac{1}{2})^T$, $\eta_2 = (\frac{1}{2}, 1, 0)^T$ 等等.

非齐次的特解占 2 分, 齐次的通解占 3 分, 错了不给分.

六、(满分 10 分) 设 $k_1(1, 0, 2)^T + k_2(0, 1, -1)^T$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的通解, 又

$$A\alpha_3 = 2\alpha_3, \quad \text{其中 } \alpha_3 = (1, 2, 3)^T. \quad \text{求矩阵 } A.$$

解: 设 $\alpha_1 = (1, 0, 2)^T, \quad \alpha_2 = (0, 1, -1)^T,$

由于 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的通解, 知 α_1, α_2 是 $Ax = 0$ 的解.

又 $A\alpha_3 = 2\alpha_3$, 则 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = (0, 0, 2\alpha_3), \quad \dots 5 \text{ 分}$

可知, $A = (0, 0, 2\alpha_3)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1} \quad \dots 7 \text{ 分}$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -8 & 4 & 4 \\ -12 & 6 & 6 \end{bmatrix}. \quad \dots 10 \text{ 分} \end{aligned}$$

七、(满分 10 分) 已知三元二次型 $f = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$.

1) 用正交变换 $X = CY$ 化二次型为标准形, 并写出相应正交矩阵 C ;

2) 指出方程 $f = 1$ 表示何种二次曲面.

解: 1) 由 $|\lambda I - A| = 0$, 得特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 7$ 2 分

● 将 $\lambda_1 = 1$ 代入到齐次方程组 $(\lambda I - A)X = 0$:

$$(I - A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{得基础解系: } \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{单位化, 得 } \gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \dots 4 \text{ 分}$$

● 将 $\lambda_2 = 3$ 代入到齐次方程组 $(\lambda I - A)X = 0$:

$$(3I - A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{得基础解系: } \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{单位化, 得 } \gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \dots 6 \text{ 分}$$

● 将 $\lambda_3 = 7$ 代入到齐次方程组 $(\lambda I - A)X = 0$:

$$(7I - A) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{得基础解系: } \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{单位化, 得 } \gamma_3 = \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad \dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{令 } C = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

则由正交变换 $X = CY$, 得 $f_1 = y_1^2 + 3y_2^2 + 7y_3^2$ 8 分

2) 令 $f = y_1^2 + 3y_2^2 + 7y_3^2 = 1$, 则其为椭球面. ... 10 分

北 京 交 通 大 学

2022-2023-1-《几何与代数 B》期末考试 参考答案

一、单选题 (本题满分 30 分, 共有 10 道小题, 每道小题 3 分)

1、函数 $f(x) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & x \\ x & 2 & 5 \\ 1 & 4 & x \end{vmatrix}$ 在 y 轴上的截距为 【 】.

- (A) -45 (B) -55 (C) -65 (D) 65.

【解】在 y 轴上的截距即 $f(0) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -5 - 40 = -45$. 故选 (A).

2、设 A 是 3 阶方阵, $|A| = \frac{1}{4}$, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 $|(4A)^{-1} + 3A^*| =$ 【 】.

- (A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16.

【解】 $|(4A)^{-1} + 3A^*| = |4^{-1}A^{-1} + 3A^*| = \left| \frac{1}{4|A|}A^* + 3A^* \right| = 4^3 \times |A|^2 = 4$. 故选 (B).

3、设 A 为 3 阶矩阵, 交换 A 的第二行和第三行, 再将第二列的 -1 倍加到第一列, 得到矩阵

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则 } A^{-1} \text{ 的迹 } tr(A^{-1}) = \text{【 】}.$$

- (A) -1 (B) -2 (C) 1 (D) 2.

【解】 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

因此, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. 故 $tr(A^{-1}) = -1$. 故选 (A).

4、 $A = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}$, $a_i \neq 0, b_i \neq 0 (i=1,2,\cdots,n)$, 则 $R(A) =$ 【 】.

- (A) $R(A) = n-1$ (B) $R(A) = n$ (C) $R(A) = 1$ (D) $R(A) = 0$.

【解】由于 $A = \alpha\beta^T$, 故 $R(A) \leq 1$, 再由 $a_i \neq 0, b_i \neq 0$, 知 $R(A) \geq 1$. 故选 (C).

5、向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 则下列向量组中线性无关的是 【 】.

- (A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$ (B) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$

(C) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ (D) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$.

解: $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1)$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 而 } |K| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0. \quad \text{故选 (C).}$$

6、二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 - 2x_1 x_3 + 4x_2 x_3 + 5x_4^2$ 正定, 则 【 】.

(A) $\lambda < -2$ (B) $1 < \lambda$ (C) $-2 < \lambda < 1$ (D) $\lambda < -2$ 或 $1 < \lambda$.

【解】二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 0 \\ \lambda & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$,

$$P_1 = 1 > 0, \quad P_2 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 4 \end{vmatrix} = 4 - \lambda^2 > 0, \quad P_3 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 4\lambda - 4\lambda^2 > 0,$$

$$P_4 = |A| = 5P_3 > 0,$$

整理, 得 $\begin{cases} -2 < \lambda < 2 \\ -2 < \lambda < 1 \end{cases}$, 即 $-2 < \lambda < 1$ 时, f 为正定二次型. 故选 (C).

7、设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$, 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 等价, 则 λ 的取值范围是 【 】.

(A) $\{0, 1\}$ (B) $\{\lambda | \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq -2\}$
(C) $\{\lambda | \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq -1, \lambda \neq -2\}$ (D) $\{\lambda | \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq -1\}$.

【解】向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 等价 $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$.

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & \lambda(1 - \lambda) \\ 0 & 0 & (1 - \lambda)(2 + \lambda) & (1 - \lambda)(1 + \lambda)^2 \end{pmatrix}.$$

(1) $\lambda = 1 \Rightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 1$, 等价;

(2) $\lambda = 0 \Rightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$, 等价;

(3) $\lambda = -1 \Rightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3, r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = 2$, 不等价;

(4) $\lambda = -2 \Rightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2, r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = 3$, 不等价;

(5) 其它时, $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$, 等价.

故 $\{\lambda | \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq -1, \lambda \neq -2\}$.

故选 (C).

8、 A 和 $E - A$ 均可逆阵, E 为单位阵, 若 B 满足 $(E - (E - A)^{-1})B = A$, 则 $B - A = \mathbf{【 \quad \quad \quad 】}$.

(A) O

(B) E

(C) $-E$

(D) $-A$.

【解】由条件得 $B - (E - A)^{-1}B = A$, 于是 $B - A = (E - A)^{-1}B$, 因此

由 $B = (E - A)(B - A) = B - A - AB + A^2$, 得

$$-A - AB + A^2 = -A(E + B - A) = O,$$

因为 A 可逆, 所以 $E + B - A = O$, 故 $B - A = -E$.

故选 (C).

9、设 A 为 3 阶矩阵, 则 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 的特征值为 $-1, 0, 1$ 的充分必要条件是 $\mathbf{【 \quad \quad \quad 】}$.

(A) 存在可逆矩阵 P, Q , 使得 $Q = PAQ$

(B) 存在可逆矩阵 P , 使得 $A = PAP^{-1}$

(C) 存在正交矩阵 Q , 使得 $A = QAQ^{-1}$

(D) 存在可逆矩阵 P , 使得 $A = PAP^T$.

【解】有 3 个不同特征值, A 必可对角化, 于是存在可逆矩阵 P , 使 $A = PAP^{-1}$. 故选 (B).

10、设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, 则线性方程组 $Ax = b$ 解的情况为 $\mathbf{【 \quad \quad \quad 】}$.

(A) 无解

(B) 有无穷多解或无解

(C) 有解

(D) 有唯一解或无解.

【解法 1】 $|A| = (b-1)(b-a)(a-1)$.

(1) 当 $a \neq b \neq 1$ 时, $r(A) = r(A \parallel b) = 3$ 时有唯一解;

(2) 当 $b = 1(b \neq 1)$ 或 $a = 1(b \neq 1)$ 或 $a = b = 1$ 时, 均有 $r(A) < r(A \parallel b)$ 无解.

因此, 线性方程组有唯一解或无解.

故选 (D).

$$\text{【解法 2】} (A | b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & a & a^2 & | & 2 \\ 1 & b & b^2 & | & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & | & 1 \\ 0 & b-1 & b^2-1 & | & 3 \end{pmatrix},$$

(1) 若 $a \neq b \neq 1$, 则 $r(A) = r(A | b) = 3$, 此时方程组有唯一解;

(2) 若 $a = b = 1$, 则 $r(A) = 1 \neq r(A | b) = 2$, 此时方程组无解;

(3) 若 $a = b \neq 1$, 则 $r(A) = 2 \neq r(A | b) = 3$, 此时方程组无解;

(4) 若 $a \neq b$, $a = 1$ 或 $a \neq b$, $b = 1$, 则 $r(A) = 2 \neq r(A | b) = 3$, 此时无解.

二、还是单选题 (本题满分 20 分, 共有 5 道小题, 每道小题 4 分)

11、已知 n 阶矩阵 A, B, C 满足 $ABC = O$, E 为 n 阶单位矩阵. 记矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ BC & E \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} AB & C \\ O & E \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} E & AB \\ AB & O \end{pmatrix}$ 的秩分别为 r_1, r_2, r_3 , 则 【 】.

(A) $r_1 \leq r_2 \leq r_3$

(B) $r_1 \leq r_3 \leq r_2$

(C) $r_3 \leq r_1 \leq r_2$

(D) $r_2 \leq r_1 \leq r_3$.

答案: (B).

12、下列矩阵中不能相似于对角矩阵的是 【 】.

$$(A) \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (B) \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (C) \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (D) \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

答案: (D).

13、设向量 $\alpha_1 = (1, 2, 3), \alpha_2 = (2, 1, 1), \alpha_3 = (2, 5, 9), \alpha_4 = (1, 0, 1)$. 若 γ 即可由 α_1, α_2 线性表示, 也可由 α_3, α_4 线性表示, 则 $\gamma =$ 【 】.

(A) $k(3, 3, 4), k \in \mathbb{R}$

(B) $k(3, 5, 10), k \in \mathbb{R}$

(C) $k(-1, 1, 2), k \in \mathbb{R}$

(D) $k(1, 5, 8), k \in \mathbb{R}$.

答案: (D).

14、已知 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ k & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 是 A 的特征向量, 则 $k =$ 【 】.

(A) 2

(B) -2

(C) 4

(D) -4.

答案: (B).

【解】设 λ 是矩阵 A 的对应于 α 的特征值, 则

$$A\alpha = \begin{pmatrix} 3-4-3 \\ k+4+6 \\ 3-12-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ k+10 \\ -12 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}. \text{ 所以, } \lambda = -4, k = -2.$$

15、二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 - 4(x_2 - x_3)^2$ 的规范型为 **【 】**.

(A) $y_1^2 + y_2^2$

(B) $y_1^2 - y_2^2$

(C) $y_1^2 + y_2^2 - 4y_3^2$

(D) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

答案: (B).

三、(满分 10 分) 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$, (其中 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$).

【解】 $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & \cdots & \frac{1}{a_1} \\ -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$ - 5 分

$= a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1+\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} & \frac{1}{a_1} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \right).$ -10 分

四、(满分 10 分) 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 有向量组 $A: \alpha_1 = (1, 2, 1)^T, \alpha_2 = (2, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 1, 1)^T$, 以及向量

组 $B: \beta_1 = (2, 1, 2)^T, \beta_2 = (2, 2, 1)^T, \beta_3 = (1, 2, -1)^T$.

1) 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 都是 $\mathbb{R}^3$ 的极大无关组;

2) 向量 $\gamma = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3$, 求其被 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示的系数.

【解】 1) 由 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

显然, $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$, 因此, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个极大无关组. - 2 分

同理, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

显然, $R(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 3$, 因此, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也是 $\mathbb{R}^3$ 的一个极大无关组. - 4 分

2) 设 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)P$,

$$\text{则, } P = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \quad - 6 \text{ 分}$$

令 γ 在 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的线性表示的系数向量为 $(x, y, z)^T$, 则

$$\gamma = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)P \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}, \quad - 8 \text{ 分}$$

$$\text{即 } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4k_1 + 3k_2 - k_3 \\ 6k_1 - 3k_2 + 2k_3 \\ -3k_1 + 2k_2 - k_3 \end{pmatrix}. \quad -10 \text{ 分}$$

五、(满分 10 分) 求 $L: \begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $\pi: x+y+z=0$ 上的投影直线方程, 并写出其对称式方程.

【解】设过直线 $L: \begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 的平面束方程为:

$$(a+b)x + (a-b)y + (b-a)z + b-a = 0, \quad \text{——最好设两个参数}$$

与 π 垂直的平面是 $-y+z+1=0$. - 5 分

因此, 所求的投影直线方程为 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ -y+z+1=0 \end{cases}$,

对称式方程为: $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$. -10 分

六、(满分 10 分) 当 a, b 为何值时, 线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有唯一解, 无解, 有无穷多组解, 并求出有无穷多组解时的通解.

【解】利用增广矩阵

$$(A, b) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{bmatrix}, \quad -3 \text{ 分}$$

当 $a \neq 1$ 时, $r(A) = r(A, b) = 4$, 此时, 方程组有唯一解; - 4 分

$$\text{当 } a = 1 \text{ 时, } (A, b) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

若 $b \neq -1$, 则 $r(A) = 2$, $r(A, b) = 3$, 此时, 方程组无解; - 6 分

若 $b = -1$, 则 $r(A) = r(A, b) = 2 < 4$, 方程组无穷多组解, 并且

$$(A, b) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad -8 \text{ 分}$$

$$\text{所以, } \begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 - 1 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 + 1 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases} \quad \text{即 } \mathbf{x} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2 \text{ 任意}).$$

-10 分

七、(满分 10 分) 已知三元二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3$.

1) 求正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Qy}$ 化二次型为标准形, 并写出相应的正交阵 $\mathbf{Q}$;

2) 证明: $\min_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = 2$.

$$\text{【解】1) 二次型的矩阵 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad -2 \text{ 分}$$

由 $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$, 得特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 2$. - 4 分

对 $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, 解方程 $(4\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 可得 $\alpha_1 = (0, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 0, 1)^T$;

对 $\lambda_3 = 2$, 解方程 $(2\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 可得 $\alpha_3 = (1, 0, -1)^T$.

$$\text{令 } \mathbf{Q} = \left(\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}, \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}, \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

故在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 下, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形:

$$f = 4y_1^2 + 4y_2^2 + 2y_3^2. \quad -7 \text{ 分}$$

2) 当 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 时, $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{y}$, 于是

$$\frac{f(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \frac{4y_1^2 + 4y_2^2 + 2y_3^2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} \geq \frac{2y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} = 2,$$

当 $y_1 = y_2 = 0, y_3 \neq 0$ 时, 等号成立, 因此, $\min_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = 2.$ -10 分

北 京 交 通 大 学

2023-2024-1-《几何与代数 B》期末考试 参考答案

一、单选题（本题满分 30 分，共有 10 道小题，每道小题 3 分）

1、设 α, β, γ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的非零向量，则 $\alpha - \beta, \beta - \gamma, \gamma - \alpha$ 的相互关系是 【 】.

- (A) 共点 (B) 共线 (C) 共面 (D) 既不共线也不共面.

解: $(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) + (\gamma - \alpha) = 0$.

$\Rightarrow \alpha - \beta, \beta - \gamma, \gamma - \alpha$ 线性相关.

$\Rightarrow \alpha - \beta, \beta - \gamma, \gamma - \alpha$ 共面.

故选 (C).

2、 $A = \begin{bmatrix} 2023 & a & a & \cdots & a \\ a & 2023 & a & \cdots & a \\ a & a & 2023 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 2023 \end{bmatrix}_{2024 \times 2024}$. 若 $r(A) = 2023$, 则 $a =$ 【 】.

- (A) -1 (B) -2023 (C) 2023 (D) 2024 .

解: 由 $r(A) = 2023$, 得 $\det A = (2023 + 2023a)(2023 - a)^{2023} = 0$.

解得, $a = 2023$ 或 $a = -1$.

当 $a = 2023$ 时, $r(A) = 1$;

当 $a = -1$ 时,

$$A = \begin{bmatrix} 2023 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 2023 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & 2023 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 2023 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2023 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & 2023 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 2023 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2024 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 2024 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 2024 \end{bmatrix}$$

显然, $r(A) = 2023$.

故选 (A).

3、设三维向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T$, $\alpha_2 = (2, 1, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, 1, 1)^T$ 及 $\beta_1 = (2, 1, 2)^T$, $\beta_2 = (2, 2, 1)^T$, $\beta_3 = (1, 2, -1)^T$. 则以下论述正确的是【 】.

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的基, 但 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不是 $\mathbb{R}^3$ 的基
 (B) $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的基, 但 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不是 $\mathbb{R}^3$ 的基
 (C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 都是 $\mathbb{R}^3$ 的基
 (D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 都不是 $\mathbb{R}^3$ 的基.

解: 1) 由 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

显然, $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$, 因此, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

同理, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

显然, $R(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 3$, 因此, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

故选 (C).

4、设 A , B 为同阶可逆矩阵, 则必有【 】.

- (A) $AB = BA$
 (B) 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$
 (C) 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^TAP = B$
 (D) 存在可逆矩阵 P 和 Q , 使得 $P^{-1}AQ^{-1} = B$.

解: 若 A , B 相似, 则存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$;

若 A , B 合同, 则存在可逆矩阵 P , 使得 $P^TAP = B$;

若 A , B 均可逆, 则存在可逆矩阵 P 和 Q , 使得

$$A^{-1}A = E, BB^{-1} = E, \text{ 即 } A^{-1}AB = B,$$

此时, 令 $P = A$, $Q = B$, 则 $P^{-1}AQ^{-1} = B$.

故选 (D).

5、设 A 是 $m \times n$ 矩阵, C 是 n 阶可逆矩阵, 又已知矩阵 A 的秩为 r , 矩阵 $B = AC$ 的秩为 r_1 , 则

r 与 r_1 的【 】.

- (A) $r > r_1$ (B) $r < r_1$ (C) $r = r_1$ (D) 关系依 C 而定.

解: 因为 C 是 n 阶可逆矩阵, 故 $R(B) = R(AC) = R(A)$,

因此, $r = r_1$.

故选 (C).

6、记三元齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + \lambda^2 x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$ 的系数矩阵为 A . 若存在三阶矩阵 $B \neq O$, 使得

$AB = O$, 则【 】.

- (A) $\lambda = -2$ 且 $|B| = 0$ (B) $\lambda = -2$ 且 $|B| \neq 0$
(C) $\lambda = 1$ 且 $|B| = 0$ (D) $\lambda = 1$ 且 $|B| \neq 0$.

解: 经过初等行变换, $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$.

再由已知, $r(B) \geq 1$, 有 $1 \leq r(A) \leq 3 - r(B) \leq 2$. 即 $2 \geq r(B) \geq 1$, $2 \geq r(A) \geq 1$.

因此, $\lambda = 1$, $r(A) = 1$, $|B| = 0$.

故选 (C).

7、矩阵 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 若矩阵 A 相似于 B , 则 $r(A-2E) + r(A+E) =$ 【 】.

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5.

解: 由 $|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$.

再由 A 相似于 B , 知 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$.

因此, $A - 2E$ 相似于 $\Lambda - 2E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$;

$A + E$ 相似于 $\Lambda + E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

因此, $r(A-2E)+r(A+E)=r(\Lambda-2E)+r(\Lambda+E)=3+2=5$.

故选 (D).

8、直线 $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ 绕 x 轴旋转一周所得曲面为 【 】.

(A) 双曲面 (B) 平面 (C) 椭球面 (D) 锥面.

解: 直线 $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ 与 x 轴垂直, 故绕 x 轴旋转一周, 得平面.

故选 (B).

9、设矩阵 A, B, C 均为 n 阶方阵, E 为 n 阶单位矩阵. 若 $B=AB+E, C=A+CA$, 则矩阵 $B-C=$ 【 】.

(A) E (B) $-E$ (C) A (D) $-A$.

解: 由已知, 有 $(E-A)B=E, C(E-A)=A$, 所以, 有

$$B=(E-A)^{-1}, \quad C=A(E-A)^{-1}.$$

所以, $B-C=(E-A)(E-A)^{-1}=E$.

故选 (A).

10、设矩阵 A, B 满足 $AB=E$ (单位矩阵), 则必有 【 】.

(A) A 的列向量组线性无关, B 的列向量组线性无关
(B) A 的列向量组线性无关, B 的行向量组线性无关
(C) A 的行向量组线性无关, B 的行向量组线性无关
(D) A 的行向量组线性无关, B 的列向量组线性无关.

解: 不妨令 $A_{m \times n}, B_{n \times m}$, 则 $AB=E_{m \times m}$,

且有 $r(A)=r(B)=m$, 即 A 行满秩, B 列满秩.

故选 (D).

二、还是单选题 (本题满分 20 分, 每道小题 4 分)

11、已知 α_1, α_2 为二维列向量, 矩阵 $A=(2\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1-\alpha_2), B=(\alpha_1, \alpha_2)$. 若行列式 $|A|=6$,

则行列式 $|B|=$ 【 】.

(A) -2 (B) -3 (C) -6 (D) -18 .

解: $A=(2\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1-\alpha_2)=(\alpha_1, \alpha_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=B\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

所以, $|A|=|B|\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-3|B|$.

故选 (A).

12、若 $A \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - 3a_{31} & a_{12} - 3a_{32} & a_{13} - 3a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, 则 $A = \mathbf{【 \quad \quad \quad 】}$.

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

解: 由 $\begin{bmatrix} a_{11} - 3a_{31} & a_{12} - 3a_{32} & a_{13} - 3a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. 故选 (B).

13、向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组中, 线性无关的是 $\mathbf{【 \quad \quad \quad 】}$.

(A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$

(B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$

(C) $\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 3\alpha_3 + \alpha_1$

(D) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + 22\alpha_3, 3\alpha_1 + 5\alpha_2 - 5\alpha_3$.

解: $(\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 3\alpha_3 + \alpha_1)$

$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) K$, 而 $|K| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$. 故选 (C).

14、 A 为 n 阶矩阵, 实数 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 若存在非零向量 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n$, 满足 $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$. 则

当 $\mathbf{【 \quad \quad \quad 】}$ 时, $x = k_1 x_1 + k_2 x_2$ 必为 A 的特征向量.

(A) $k_1 = 0$ 且 $k_2 = 0$

(B) $k_1 \neq 0$ 且 $k_2 \neq 0$

(C) $k_1 \cdot k_2 = 0$

(D) $k_1 = 0$ 且 $k_2 \neq 0$.

解: 根据特征值与对应的特征向量的性质.

故选 (D).

15、二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_2x_3$ 的标准形是 $\mathbf{【 \quad \quad \quad 】}$.

(A) $-2y_1^2 + 3y_2^2 + y_3^2$

(B) $2y_1^2 - y_2^2 + 3y_3^2$

(C) $2y_1^2 + y_2^2 - 3y_3^2$

(D) $2y_1^2 - 2y_2^2 - y_3^2$.

解: $f(x_1, x_2, x_3)$ 对应的实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

对 A 进行合同变换, 如下:

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

令 $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则通过合同变换 $X = CY$, 有

$$f(x_1, x_2, x_3) = X^T A X = Y^T \Lambda Y = 2y_1^2 - y_2^2 - 3y_3^2. \quad \text{故选 (D).}$$

注 1: 何谓合同变换? 即对于上述的 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$, 施以相同的行、列初等变换, 就是一次合同变换,

此时, 由 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$, 易知 $C^T A C = B$,

又因为 A 是实对称阵, C 为可逆阵, 显然 B 亦为实对称阵.

注 2: 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 经合同变换 $X = CY$, 得到标准形:

$$f = Y^T \Lambda Y = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + d_3 y_3^2,$$

这里的 d_1, d_2, d_3 , 不一定是矩阵 A 的特征值;

但总体上正负零系数的个数不变, 所以惯性定律才起作用.

三、(满分 10 分) 对于直线 $l_1: \frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}$ 与 $l_2: \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}$.

1) 证明它们不共面; 2) 写出过 l_2 且平行于 l_1 的平面方程.

证: 1) 取 l_2 上任意点 $M(6t+21, -4t-5, -t+2)$, 将其代入 l_1 的方程组中, 得

$$\frac{6t+28}{3} = \frac{-4t-1}{4} = \frac{-t+5}{-2},$$

显然无解, 故 l_1 与 l_2 不相交, 又易知 l_1 与 l_2 亦不平行.

综合上述, 知 l_1 与 l_2 不共面.

$$2) \text{ 取法向量 } \vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 9\vec{j} - 36\vec{k},$$

因此, 所求方程为 $12(x-21)+9(y+5)+36(z-2)=0$, 或 $4x+3y+12z-93=0$.

四、(满分 10 分) 设 n 阶矩阵 A 和 B 满足 $A+2B=AB$, E 是 n 阶单位阵.

$$1) \text{ 证明: } AB=BA; \quad 2) \text{ 已知 } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{ 求矩阵 } A.$$

解: 1) 由 $A+2B=AB$, 有 $2E=AB-2B-A+2E=(A-2E)(B-E)$.

因此, $(A-2E)(B-E)=(B-E)(A-2E)$.

即 $AB-A-2B+2E=BA-2B-A+2E$.

故, $AB=BA$.

2) 由 $2E=AB-2B-A+2E=(A-2E)(B-E)$, 知 $(A-2E)=2(B-E)^{-1}$,

因此, $A=2(B-E)^{-1}+2E$.

$$\text{再由, } (B-E)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{所以, } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

五、(满分 10 分) 已知 $\alpha_1 = (1, 2, -3, 1)^T$, $\alpha_2 = (5, 5, a, 11)^T$, $\alpha_3 = (1, -3, 6, 3)^T$ 和

$\beta = (2, -1, 3, b)^T$, 试问:

1) 当 a, b 取何值时, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示;

2) 当 a, b 取何值时, β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 并写出表达式.

$$\text{解: } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 & -1 \\ -3 & a & 6 & 3 \\ 1 & 11 & 3 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & b-8 \\ 0 & 0 & 0 & (a+6)(b-4) \end{pmatrix},$$

1) 当 $a \neq -6, b \neq 4$ 时, $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3 < 4 = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta)$,

因此, β 不能被 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

2) 当 $a = -6$ 或 $b = 4$ 时, $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) = 3$,

因此, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一线性表示.

此时,

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & b-8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5-b \\ 0 & 4 & 0 & b-4 \\ 0 & 0 & -4 & b-8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此, $\beta = (5-b)\alpha_1 + \frac{b-4}{4}\alpha_2 - \frac{b-8}{4}\alpha_3$.

六、(满分 10 分) 已知向量 $\alpha_1 = (1, 0, 2)^T, \alpha_2 = (2, -1, 3)^T, \beta_1 = (-3, 2, -5)^T, \beta_2 = (0, 1, -1)^T$,

证明: 存在非零向量 γ , 使得 γ 既可由 α_1, α_2 线性表出, 也可由 β_1, β_2 线性表出. 并求出所有的非零向量 γ .

解: 原题可等价于: $\gamma = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = x_3\beta_1 + x_4\beta_2$ 有非零解.

即 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 - x_3\beta_1 - x_4\beta_2 = 0$ 有非零解.

而 $2 \leq R(\alpha_1, \alpha_2, -\beta_1, -\beta_2) \leq 3 < 4$, 显然有非零解,

即存在非零向量 γ , 使得 γ 既可由 α_1, α_2 线性表出, 也可由 β_1, β_2 线性表出.

$$\text{由 } (\alpha_1, \alpha_2, -\beta_1, -\beta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

取 $x_4 = 1$, 则 $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -2$.

此时, $\gamma = 0\alpha_1 + 3\alpha_2 = -2\beta_1 + \beta_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$, 故所有的非零向量 $\gamma = k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} (k \neq 0)$.

七、(满分 10 分) 求一个正交变换 $X = CY$, 将下列二次型化为标准形

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

并指出 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 是何种二次曲面.

解: 1) 二次型矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$,

2) A 的特征多项式

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(10-\lambda),$$

所以, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 10$.

● 将 $\lambda_1 = 1$ 代入到齐次方程组 $(A - \lambda E)X = 0$, 有

$$(A - E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 得基础解系 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

正交化, 令 $\beta_1 = \alpha_1 = (-2, 1, 0)^T$, $\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \frac{1}{5}(2, 4, 5)^T$,

● 将 $\lambda_3 = 10$ 代入到齐次方程组 $(A - \lambda E)X = 0$:

$$(A - 10E) = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 得基础解系 } \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

● 单位化, $\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\gamma_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\gamma_3 = \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

3) 令 $P = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, 则由正交变换 $X = PY$, 得 $f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$.

因此, $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 是 (旋转) 椭球面.

北 京 交 通 大 学

2024-2025-1-《几何与代数 B》期末考试 参考答案

一、单选题 (本题满分 30 分, 共有 10 道小题, 每道小题 3 分)

1、已知 A 是行列式值为 -3 的 3 阶矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, A^T 是 A 的转置矩阵. 如果 kA 的逆矩阵是 $A^* - \frac{1}{2}A^T A^{-1}$, 则 $k = \underline{\hspace{1cm}}$.

- (A) $-\frac{2}{3}$ (B) $-\frac{8}{21}$ (C) $-\frac{8}{27}$ (D) $-\frac{2}{9}$.

解: $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1} = A^* - \frac{1}{2}A^T A^{-1}$

$$= |A| A^{-1} - \frac{1}{8}|A^T| A^{-1} = (-3 + \frac{3}{8})A^{-1} = -\frac{21}{8}A^{-1}. \quad \text{故选 (B).}$$

2、已知 $\alpha = (1, 3, 2)^T$, $\beta = (1, -1, -2)^T$, 设 $A = E - \alpha\beta^T$, k 是非零常数, 则矩阵 A 的最大特征值所对应的特征向量是 $\underline{\hspace{1cm}}$.

- (A) $k(1, 1, 0)^T$ (B) $k(1, -1, -2)^T$ (C) $k(1, 3, 2)^T$ (D) $k(1, 5, 1)^T$.

解: 令 $B = \alpha\beta^T$, 由 $\alpha^T\beta = -6$, 知 B 的特征值为: $-6, 0, 0$,

所以, A 的特征值为: $7, 1, 1$.

再由 $B\alpha = \alpha\beta^T\alpha = -6\alpha$, 知, $A\alpha = 7\alpha$. 故选 (C).

3、矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & a+1 \\ 2 & a & -1 & -1 \end{bmatrix}$ 的等价标准形是 $\underline{\hspace{1cm}}$.

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(D) 与 a 有关, 不能确定.

解: 对 A 施行初等行变换, 有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & a+1 \\ 2 & a & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 11 & 7 & a-1 \\ 0 & a+3 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

而 $a+3$, a 不能同时为 0, 故对 $\forall a$ 均有 $R(A) \equiv 3$.

故选 (B).

4、已知 $A = (a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, 满足 $a_{ij} = A_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$, 其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式, 则下列结论 “① A 是可逆矩阵; ② A 是对称矩阵; ③ A 是奇异矩阵; ④ A 是正交矩阵” 中, 正确的是 【 】.

(A) ①②

(B) ①④

(C) ②③

(D) ③④.

解: 由已知条件, 知 $A^T = A^*$.

$$\text{由 } 1 \leq R(A) = R(A^*) = \begin{cases} 3, & R(A) = 3 \\ 1, & R(A) = 2 \\ 0, & R(A) < 2 \end{cases}, \text{ 易知 } R(A) = R(A^*) = 3, \text{ 即 } A \text{ 可逆.}$$

再由 $|A^T| = |A^*| = |A|^2 = |A|$, 知 $|A| = 1$.

而 $AA^T = AA^* = |A|E = E$, 即 A 是正交矩阵.

故选 (B).

5、已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是 3 维非零向量, 则下列命题中错误的是 【 】.

(A) 若 α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关

(B) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 也线性相关

(C) 若向量 α_3 不能由 α_1, α_2 线性表出, α_4 不能由 α_2, α_3 线性表出, 则向量 α_1 可由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出

(D) 若 $R(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3) = R(\alpha_4, \alpha_1 + \alpha_4, \alpha_2 + \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_4)$, 则向量 α_4 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

解: 对于 (A). 可以通过其逆否命题, 易知选项 (A) 正确.

若令 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, 0)^T$, $\alpha_3 = (0, 2, 0)^T$, $\alpha_4 = (0, 0, 1)^T$. 故选 (B).

对于 (C). 由已知条件, 有 $R(\alpha_1, \alpha_2) < R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 及 $R(\alpha_2, \alpha_3) < R(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$.

若 $R(\alpha_2, \alpha_3) = 1$, 则 $R(\alpha_1, \alpha_2) = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 矛盾.

故必有 $R(\alpha_2, \alpha_3) = 2$, 则 $R(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$, 于是

$R(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$, 即 α_1 可由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出.

对于 (D). 利用初等变换, 可以有

$$(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

$$(\alpha_4, \alpha_1 + \alpha_4, \alpha_2 + \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_4) \rightarrow (\alpha_4, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$$

从而, $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 即 α_4 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

6、已知 3 阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ 可逆, $B = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} + 3a_{33} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} + 3a_{23} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} + 3a_{13} & a_{13} \end{bmatrix}$, 且 $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{则 } B^{-1} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}.$$

(A) $P_4 A^{-1} P_2$ (B) $P_2 A^{-1} P_4$ (C) $P_3 A^{-1} P_4$ (D) $P_4 A^{-1} P_1$.

解: 由已知, 有 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = P_4 A P_3$.

则有 $B^{-1} = P_3^{-1} A^{-1} P_4^{-1} = P_2 A^{-1} P_4$.

故选 (B).

7、设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, k_1, k_2 是任意常数. 若 B 满足 $AB = B$, 则 $B = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$.

(A) $\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} k_1 & -2k_2 \\ -2k_1 & k_2 \end{bmatrix}$
 (C) $\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$.

解: 由 $AB = B$ 有 $(A - E)B = O$, 因而 B 的列向量都是齐次方程组 $(A - E)x = 0$ 的解.

$$A - E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

故齐次方程组 $(A - E)x = 0$ 的基础解系是 $(-1, 1)^T$.

故选 (D).

8、三元二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + ax_3) \cdot (x_1 + 5x_2 + bx_3)$ 的正惯性指数 p 与负惯性指数 q 分别是 $\begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix}$.

(A) $p = 2, q = 1$ (B) $p = 2, q = 0$

(C) $p=1, q=1$ (D) 与 a, b 有关, 不能确定.

解: 令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + ax_3 \\ y_2 = x_1 + 5x_2 + bx_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ 及 $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 5 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, 所以经坐标变换 $x = B^{-1}y$.

得 $f(x_1, x_2, x_3) = y_1 \cdot y_2$.

再令 $\begin{cases} y_1 = z_1 + z_2 \\ y_2 = z_1 - z_2 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$ 及 $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$,

所以经坐标变换 $y = Cz$, 得 $f(x_1, x_2, x_3) = z_1^2 - z_2^2$.此时, $x = B^{-1}y = B^{-1}Cz$.

故选 (C).

9、下列矩阵 $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 中, 两两相

似的是 【 】.

(A) A_1, A_2 (B) A_1, A_3 (C) A_2, A_3 (D) A_3, A_4 .解: 利用排除法. A_3, A_4 虽然特征值一样, 但秩不相等, 故不相似; A_1, A_2 或 A_2, A_3 , 虽然秩相等, 但特征值不一样, 故不相似.

故选 (B).

10、二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 5x_4^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 是 4 元正定二次型, 则必有 【 】.

(A) $\lambda < -2$ (B) $1 < \lambda$ (C) $-2 < \lambda < 1$ (D) $\lambda < -2$ 或 $1 < \lambda$.

解: 二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 0 \\ \lambda & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

$$P_1 = 1 > 0, \quad P_2 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 4 \end{vmatrix} = 4 - \lambda^2 > 0, \quad P_3 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 4\lambda - 4\lambda^2 > 0,$$

$$P_4 = |A| = 5P_3 > 0.$$

整理, 得 $\begin{cases} -2 < \lambda < 2 \\ -2 < \lambda < 1 \end{cases}$, 即 $-2 < \lambda < 1$ 时, f 为正定二次型. 故选 (C).

二、填空题 (本题满分 20 分, 每道小题 4 分)

11、三点 $A(a, b, 3)$, $B(b, a, 0)$, $C(1, -1, 1)$ 共线, 则 $a+b = \underline{\quad\quad}$.

解: A, B, C 共线 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \frac{b-a}{1-a} = \frac{a-b}{-1-b} = \frac{-3}{-2} \Leftrightarrow a = -3, b = 3$. 故填: **0**.

12、曲线 $\begin{cases} 4y^2 - z^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ 围绕 y 轴旋转一周所围成的曲面是 **双叶双曲面**.

解: 基本口诀: **绕着哪个轴转, 那个量就不变**. 故所求曲面是 **双叶双曲面**.

或填 **$4y^2 - z^2 - x^2 = 1$** .

13、已知 4 维向量 α, β, γ 两两垂直, 且满足 $\|\alpha\| = 1, \|\beta\| = 2, \|\gamma\| = 3$, 则 $\|\alpha + \beta + \gamma\| = \underline{\quad\quad}$.

解: $\|\alpha + \beta + \gamma\|^2 = (\alpha + \beta + \gamma) \cdot (\alpha + \beta + \gamma)$

$$= \alpha \cdot \alpha + \beta \cdot \beta + \gamma \cdot \gamma + 2(\alpha \cdot \beta + \beta \cdot \gamma + \gamma \cdot \alpha)$$

$$= |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 14.$$

所以, $\|\alpha + \beta + \gamma\| = \sqrt{14}$.

故填: **$\sqrt{14}$** .

14、设线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + kx_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ 的系数矩阵为 A . 又 3 阶矩阵 $B \neq 0$, 且满足 $AB = 0$, 则

$k = \underline{\quad\quad}$.

解: 易知 $R(A) < 3$. 又 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & k \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & k+4 \\ 0 & 0 & 1-k \end{pmatrix}$. 故填: **1**.

15、已知 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ k & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 是 A 的特征向量, 则 $k = \underline{\quad\quad}$.

解: 设 λ 是矩阵 A 的对应于 α 的特征值, 则

$$A\alpha = A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4-3 \\ k+4+6 \\ 3-12-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ k+10 \\ -12 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

所以, $\lambda = -4$, $k = -2$.

故填: **【 -2 】**.

三、(满分 10 分)

计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 2024 \\ 1 & 1 & \cdots & 2024 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2024 & \cdots & 1 & 1 \\ 2024 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

解:

$$D_n = (2024 + n - 1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 2024 \\ 1 & 1 & \cdots & 2024 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2024 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{-- 3 分}$$

$$= (2024 + n - 1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 2023 \\ 1 & 0 & \cdots & 2023 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2023 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{-- 6 分}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (2024 + n - 1) \cdot 2023^{n-1} \quad \text{-- 8 分}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (2023 + n) \cdot 2023^{n-1}. \quad \text{-- 10 分}$$

四、(满分 10 分) 设 $P(1, 3, 2)$ 是平面 $\pi: 7x - 4y + 4z + 15 = 0$ 外一定点.

求: 1) 点 P 到平面 π 的距离; 2) 点 P 关于 π 的对称点 Q 的坐标.

解: (1) 利用点到平面距离的计算公式, 得

$$d(P, \pi) = \frac{|7 \cdot 1 - 4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 15|}{\sqrt{7^2 + (-4)^2 + 4^2}} = 2. \quad \text{-- 4 分}$$

(2) 过点 P 作平面 π 的垂线, 交平面于点 N .

$$\text{则垂线方程为 } l: \frac{x-1}{7} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-2}{4}.$$

$$\text{联立, 得方程组 } \begin{cases} \frac{x-1}{7} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-2}{4} \\ 7x - 4y + 4z + 15 = 0 \end{cases}$$

计算, 得 $N\left(\frac{-5}{9}, \frac{35}{9}, \frac{10}{9}\right)$. -- 8 分

由中点坐标公式, 得点 P 关于平面 π 的对称点 Q 的坐标分量为:

$$x = 2 \cdot \frac{-5}{9} - 1 = \frac{-19}{9}, \quad y = 2 \cdot \frac{35}{9} - 3 = \frac{43}{9}, \quad z = 2 \cdot \frac{10}{9} - 2 = \frac{2}{9} \quad \text{-- 10 分}$$

故, 点 Q 的坐标 $\left(\frac{-19}{9}, \frac{43}{9}, \frac{2}{9}\right)$. -- 10 分

五、(满分 10 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. 1) 求所有的 3×2 矩阵 X , 使得 $AX = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; 2) 求一

个 3×2 矩阵 X , 使得 $AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; 3) 求所有的 3×2 矩阵 X , 使得 $AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

解: 对 A 施行初等行变换, 有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{得 } Ax = 0 \text{ 的基础解系为 } \xi = (1, 0, -1)^T.$$

1) 故使 $AX = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的所有 $X = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \\ -a & -b \end{bmatrix}$ (a, b 任意). -- 3 分

2) 对 (A, E) 施行初等行变换, 有

$$(A, E) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

则 $X' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 满足 $AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (答案不唯一). -- 6 分

3) 综合 1), 2), 得 $AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的通解为

$$X + X' = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \\ -a & -b \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+1.5 & b-0.5 \\ -0.5 & 0.5 \\ -a & -b \end{bmatrix} \quad (a, b \text{ 任意}). \quad \text{--10 分}$$

六、(满分 10 分) 已知 4 元齐次线性方程组 (I):
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ ax_1 + a^2x_3 = 0 \\ ax_2 + a^2x_4 = 0 \end{cases}$$
 的解全部都是 4 元线性方程

(II): $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ 的解.

1) 求 a 的值; 2) 求齐次方程组 (I) 的解; 3) 求齐次方程 (II) 的解.

解: 对齐次线性方程组 (I) 的系数矩阵, 施行初等行变换, 有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & a & 0 & a^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -a & a^2 & -a \\ 0 & 0 & a^2 & a^2 - a \end{bmatrix}. \quad \text{-- 2 分}$$

$$1) \text{ 若 } a = 0, \text{ 此时, } A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

则 $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = 0$ 是 (I) 的解, 但不是 (II) 的解, 矛盾;

$$\text{若 } a = 1, \text{ 此时, } A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

则 $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1$ 是 (I) 的解, 但不是 (II) 的解, 矛盾;

$$\text{当 } a \neq 0, 1 \text{ 时, } A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & a-1 \end{bmatrix}.$$

得 $Ax = 0$ 的基础解系为 $\xi = (a^2 - a, -a^2, 1 - a, a)^T$.

带入到齐次方程 (II), 由 $(a^2 - a) + (-a^2) + (1 - a) = 0$, 得 $a = \frac{1}{2}$. -- 6 分

2) 齐次方程组 (I) 的基础解系为 $\xi = (-1, -1, 2, 2)^T$.

故, 齐次方程组 (I) 的通解为 $k\xi$ (k 为任意实数). -- 8 分

3) 方程 (II) 的基础解系:

$$\eta_1 = (-1, 1, 0, 0)^T, \quad \eta_2 = (-1, 0, 1, 0)^T, \quad \eta_3 = (0, 0, 0, 1)^T.$$

故, 齐次方程 (II) 的通解为

$$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3 \quad (k_1, k_2, k_3 \text{ 为任意实数}). \quad \text{-- 10 分}$$

七、(满分 10 分) 设二次型 $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2bx_1x_3 + 2cx_2x_3$, 矩阵 A 满足

$$AB = O, \text{ 其中 } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

1) 求一个正交变换 $X = CY$, 化二次型 $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ 化为标准形;

2) 指出 $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 1$ 表示何种曲面.

解: 二次型矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 4 & c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$. -- 3 分

1) 由 $AB = O$, 知 B 的列向量均为 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解.

记 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_2 = (2, -1, 0)^T$, 则 $A\alpha_1 = \mathbf{0} = 0\alpha_1$, $A\alpha_2 = \mathbf{0} = 0\alpha_2$.

所以, $\lambda = 0$ 是 A 的特征值 (至少是二重), α_1, α_2 是对应的线性无关的特征向量.

再由 $\text{tr}(A) = 0 + 0 + \lambda_3$, 得 $\lambda_3 = 6$.

令对应于特征值 $\lambda_3 = 6$ 的特征向量为 $\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$, 则有

$$\begin{cases} \alpha_1^T \alpha_3 = x_1 + x_3 = 0 \\ \alpha_2^T \alpha_3 = 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

解, 得 $\alpha_3 = (1, 2, -1)^T$. -- 6 分

正交化、单位化, 得

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)^T, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1)^T, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)^T.$$

令 $C = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. -- 8 分

则由正交变换 $X = CY$, 得 $f = 6y_3^2$. -- 9 分

2) 因此, $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 即 $y_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$, 是两个平行平面. -- 10 分