

安徽大学2022-2023学年第二学期

《高等代数（下）》期末考试试卷（B卷）

（闭卷 时间120分钟）

考场登记表序号 _____

题号	一	二	三	四	总分
得分					
阅卷人					

一、填空题（每小题3分，共15分）

得分

- 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & x \\ 2 & -1 & y \end{pmatrix}$ 的特征值为1, 2, 3. 则 $x =$ _____, $y =$ _____.
- 设向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 都是 n 维行向量, 且 $\sum_{i=1}^n a_i b_i = 2$. 则矩阵 $A = \alpha^T \beta$ 的特征多项式为 _____.
- 已知矩阵 A 的初等因子组为 $\lambda, \lambda^2, (\lambda - 1)^2, \lambda - 2, (\lambda - 2)^3$. 则 A 的极小多项式为 _____.
- 设 A 是4阶实对称矩阵, 且 A 的特征值为 $-2, 0, 1, 2$. 若 $A - tE_4$ 为正定矩阵, 则参数 t 的取值范围为 _____.
- 设 $\mathbb{R}^3$ 是带标准内积的3维欧氏空间, 对 $\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (1, -1, 0), \alpha_3 = (1, 0, 0)$ 作Schmidt正交化, 得 V 的标准正交基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. 则 $\beta_3 =$ _____.

二、选择题（每小题3分，共15分）

得分

- 设 n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 在 V 的基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 A , 且 $\text{秩}(A) = r$. 则下列结论不正确的是 ()

(A) $\dim \text{Ker } \mathcal{A} = n - r$.

(B) $\dim \text{Im } A = n - r$.

(C) $\mathcal{A}$ 是可逆线性变换当且仅当 $|A| \neq 0$.

(D) 0 是 $\mathcal{A}$ 的特征值当且仅当 $r < n$.

7. 设 $\mathcal{A}$ 是 n 维复线性空间 V 上的线性变换, 且 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 为 $\mathcal{A}$ 所有两两不同的特征值, V_{λ_i} 为 $\mathcal{A}$ 属于特征值 λ_i 的特征子空间, $i = 1, 2, \dots, s$. 则“ $\mathcal{A}$ 可对角化”的充分必要条件是 ()
- (A) $\mathcal{A}$ 有 n 个互不相同的特征值. (B) $\mathcal{A}$ 有 n 个互不相同的特征向量.
 (C) $V = V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \dots + V_{\lambda_s}$. (D) $\mathcal{A}$ 的特征多项式无重根.
8. 设 A 是 n 阶实对称阵, $n \geq 2$. 则 A 是半正定阵的充分必要条件是 ()
- (A) 存在可逆阵 C , 使得 $A = CC^T$. (B) A 的所有顺序主子式大于等于零.
 (C) A 的所有主子式大于等于零. (D) A 合同于 n 阶单位阵.
9. 设 $\mathcal{A}$ 是 n 维欧氏空间 V 上的正交变换. 则下列说法正确的是 ()
- (A) 若 $\mathcal{A}$ 不是恒等变换, 则 $\mathcal{A}$ 一定不可对角化.
 (B) 若 n 是奇数, 则 -1 必为 $\mathcal{A}$ 的特征值.
 (C) $\mathcal{A}$ 在任一组基下的矩阵都是正交阵.
 (D) 若复数 $a + bi$ 为 $\mathcal{A}$ 的特征值, 则 $a^2 + b^2 = 1$, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$, i 为虚数单位.
10. 设 $\mathbb{F}$ 是数域, $p(x) \in \mathbb{F}[x]$, 且 $\deg p(x) \geq 1$. 则下列说法正确的是 ()
- (A) 若对任意 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 都有 $p(x) \mid f(x)$, 或 $(p(x), f(x)) = 1$. 则 $p(x)$ 不可约.
 (B) 若 $p(x) \mid f(x)g(x)$, 则必有 $p(x) \mid f(x)$ 或 $p(x) \mid g(x)$.
 (C) 若 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k - 1$ 重因式, 则 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式, $k \geq 2$.
 (D) 若存在正整数 k , $p(x) \mid f(x)^k$, 则 $p(x) \mid f(x)$.

三、计算题 (每小题10分, 共40分)

得分	
----	--

11. 设 $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$, $g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$. 求 $(f(x), g(x))$, 以及多项式 $u(x), v(x)$, 使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x))$.

12. 已知3阶实对称阵 A 的特征值为 $1, 1, -1$, 且 $\alpha_1 = (0, 1, 1)^T$ 为 A 属于特征值 -1 的特征向量.

(1) 求 A 属于特征值 1 的特征向量;

(2) 求矩阵 A .

13. 设实二次型 $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 6x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3$. 用合同变换法将 $q(x_1, x_2, x_3)$ 化为规范形, 并求对应的非退化线性替换.

14. 设复矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的 Jordan 标准形.

(2) 求 A 的初等因子组、所有不变因子和各级行列式因子.

内部资料

四、证明题(每小题10分, 共30分)

得分	
----	--

15. 设 A, B 都是 n 阶方阵, 且满足 $AB = A + B$. 证明: 1一定不是 A, B 的特征值.

16. 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 都是线性空间 V 上的线性变换, 且 $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$. 证明: $\text{Ker } \mathcal{A}$ 与 $\text{Im } \mathcal{A}$ 都是 $\mathcal{B}$ 的不变子空间.

17. 设 $\mathbb{F}$ 是数域, $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \in \mathbb{F}[x]$. 证明: $f(x)$ 无重根.

内部资料