

**安徽大学2022-2023学年第二学期《高等代数(下)》
参考答案与评分标准(B卷)**

一、填空题 (每小题3分, 共15分)

1. $x = 2, y = 4$. 2. $\frac{\lambda^{n-1}(\lambda - 2)}{}$. 3. $\frac{\lambda^2(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^3}{}$.
4. $t < -2$. 5. $(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3})$.

二、选择题 (每小题3分, 共15分)

6. B. 7. C . 8. C. 9. D. 10. A.

三、计算题 (每小题10分, 共40分)

- 11. 解:** $f(x) = g(x) + r_1(x)$, $r_1(x) = (x^3 - 2x)$,
 $g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x)$, $q_2(x) = x + 1$, $r_2(x) = x^2 - 2$,
 $r_1(x) = r_2(x)x$.
由此可知, $(f(x), g(x)) = x^2 - 2$ (5分)
 $r_2(x) = g(x) - r_1(x)q_2(x) = g(x) - (f(x) - g(x))(x + 1)$
 $= (-x - 1)f(x) + (x + 2)g(x)$
取 $u(x) = -x - 1$, $v(x) = x + 2$,
则有 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = x^2 - 2$ (10 分)

- 12. 解:** (1) 设矩阵 A 属于特征值 1 的特征向量为 $\alpha_2 = (x_1, x_2, x_3)^T$.

因为实对称矩阵属于不同特征值的特征向量相互正交, 所以

$$x_2 + x_3 = 0.$$

解得: $(1, 0, 0)^T, (0, 1, -1)^T$. 故矩阵 A 属于特征值 3 的特征向量为

$k_1(1, 0, 0)^T + k_2(0, 1, -1)^T$, 其中 k_1, k_2 是不全为零的数. (6分)

(2) 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

所以, $A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(10\text{分})$

13. 解. 二次型 $q(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

对 A 作合同变换

$\left(\frac{A}{I}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(8\text{分})$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ 令 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. 则作非退化线性替换 $X = QY$,

可得规范形 $q(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. $\dots\dots\dots(10\text{分})$

14. 解.

(1) 求解 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2$ (二重), $\lambda_2 = -1$ (二重), 且属于 $\lambda_1 = 2$ 的线性无关特征向量只有一个, 属于 $\lambda_2 = -1$ 的线性无关的特征向量有两个.

因此, A 的 Jordan 标准形为 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (4分)

(2) 由 A 的 Jordan 标准形可知

初等因子组: $\lambda + 1, \lambda + 1, (\lambda - 2)^2$; (6分)

不变因子: $d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = 1, d_3(\lambda) = \lambda + 1, d_4(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 2)^2$, (8分)

行列式因子: $D_1(\lambda) = D_2(\lambda) = 1, D_3(\lambda) = \lambda + 1, D_4(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2)^2$. (10分)

四、证明题 (每小题10分, 共30分)

15. 证: 由题意得, $AB - A - B + I = I$, 则 $(A - I)(B - I) = I$ (5分)

故 $|A - I| \neq 0, |B - I| \neq 0$, 所以, 1 不是 A, B 的特征值. (10分)

16. 证: 对任意 $\alpha \in \text{Ker } \mathcal{A}$, 则 $\mathcal{A}(\alpha) = \mathbf{0}$. 故 $\mathcal{A}(\mathcal{B}(\alpha)) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\alpha)) = \mathbf{0}$.

即, $\mathcal{B}(\alpha) \in \text{Ker } \mathcal{A}$. 所以, $\text{Ker } \mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}$ 的不变子空间. (5分)

对任意 $\beta \in \text{Im } \mathcal{A}$, 则存在 $\gamma \in V$ 使得 $\mathcal{A}(\gamma) = \beta$. 故

$\mathcal{B}(\beta) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\gamma)) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\gamma)) \in \mathcal{A}(V)$.

所以, $\text{Im } \mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}$ 的不变子空间. (10分)

17. 证. $f'(x) = 1 + x + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$.

所以 $f(x) = f'(x) + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ (5分)

又因为 $(f(x), f'(x)) = (\frac{x^n}{n!}, f'(x)) = 1$, 所以 $f(x)$ 无重因式, 也就无重根. . (10分)