

安徽大学 2022—2023 学年第二学期

《高等代数（下）》 考试试卷（A 卷）

（闭卷 满分 100 分 时间 120 分钟）

考场登记表序号_____

题 号	一	二、1	二、2	二、3	二、4	总分
得 分						
阅卷人						

一、填空题（每空 4 分，共 40 分）填写不完整或结果没有化简均不得分。

得分	
----	--

- 已知方阵 A 满足 $A^2 + 3A + 2I = 0$ ，其中 I 为单位阵。则 A 的特征值为_____，逆方阵 A^{-1} 的特征值为_____。
- 二次型 $x_1x_2 - 2x_2x_3 + x_1x_3$ 的正惯性指数为_____。
- 已知实对称方阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 是正定的。则 a 的取值范围是_____。
- 在标准欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 中，考虑向量组 $\{(1, -2, 1, 1), (-1, 1, 2, 1), (-1, 0, 5, 3), (0, -1, 3, 2)\}$ 张成的子空间 V 。则正交补空间 $V^\perp$ 的维数为_____。
- 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为欧氏空间的一组基，其度量矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ，考虑向量 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \beta = \alpha_2 + \alpha_3$ 。则 α 的长度为_____， α 与 β 的夹角为_____。
- 已知方阵 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & x \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似。则 $x =$ _____, $y =$ _____。
- 设 P 为正交方阵，其伴随方阵记为 P^* 。则行列式 $|P^*| =$ _____。

二、解答题（共 60 分）需给出详细解答过程。禁止使用课本习题结论或其他参考书中的结论。

- （10 分）已知列向量 $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ 是方阵 $\begin{pmatrix} b & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ 的特征向量。请分别求出 a 和 b 的值。

得分	
----	--

- （25 分）设 $\mathbb{R}_4[x]$ 为实系数且次数严格小于 4 的多项式组成的实线性空间。

得分	
----	--

对于任意 $f(x), g(x) \in \mathbb{R}_4[x]$, 定义 $(f(x), g(x)) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ 。考虑线性变换 $\sigma: \mathbb{R}_4[x] \rightarrow \mathbb{R}_4[x]$ 使得 $\sigma(f(x)) = f(x) - \frac{2(f(x), x)}{(x, x)}x$ 。

- (1) 试证：以上定义的 $(-, -)$ 是 $\mathbb{R}_4[x]$ 的一个内积。
- (2) 试将基 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 进行 Schmidt 标准正交化，得到标准正交基。
- (3) 证明： σ 是正交变换。
- (4) 试求 σ 在基 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 下的方阵。
- (5) 计算 σ 的特征值，描述相应的特征子空间。

3. (15 分) 考虑二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ 。

- (1) 试写出该二次型对应的实对称方阵。
- (2) 利用变量的正交替换，将该二次型化为标准型。
- (3) 计算该二次型的秩，并判断其是否正定。

得分	
----	--

4. (10 分) 设 n 阶复方阵 A 与 B 满足 $AB = BA$ 。试证明：存在可逆方阵 P 使得 PAP^{-1} 与 PBP^{-1} 同时为上三角方阵。

得分	
----	--