

安徽大学 2022-2023 学年第二学期《高等代数（下）》
期末考试（A 卷）参考答案与评分标准

一、填空题（每空 4 分， 共 40 分）

1. -2 或 -1 , $-\frac{1}{2}$ 或 -1 . 2. 正惯性指数为 2. 3. $\frac{1-\sqrt{10}}{3} < a < \frac{1+\sqrt{10}}{3}$.
4. 维数为 2. 5. $\sqrt{2}$, 夹角为 $\frac{\pi}{2}$. 6. $x = 2, y = -1$. 7. 1 或 -1 .

二、解答题（共计 60 分）

1. 解. 设相应特征值为 λ , 则 $\begin{pmatrix} b & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$. (5 分)

由此可得

$$-3b - 2 + a = -3\lambda, \quad -6 + 3 + a = \lambda, \quad -9 - 1 + 4a = \lambda a$$

故 $a^2 - 7a + 10 = 0$. 从而 $a = 5, b = 3$, 或 $a = 2, b = -1$. (10 分)

2. （每小题 5 分， 共 25 分）

解. (1) 按定义验证.

(2) 所得的标准正交基为

$$\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}x, \frac{3\sqrt{10}}{4}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right), \frac{5\sqrt{14}}{4}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right).$$

(3) 直接验证 $(\sigma(f), \sigma(g)) = (f, g)$.

(4) 直接计算得

$$\sigma(1) = 1, \sigma(x) = -x, \sigma(x^2) = x^2, \sigma(x^3) = x^3 - \frac{6}{5}x.$$

故矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -6/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(5) σ 的特征值分别为 1 和 -1 . 属于特征值 1 的特征子空间的基: $1, x^2, x^3 - \frac{3}{5}x$;

属于特征值 -1 的特征子空间的基： x

3. 解. (1) 矩阵 $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. (5 分)

(2) 矩阵 A 的特征多项式 $f(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$, 故 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$.

属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

属于特征值 $\lambda_2 = 4$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (8 分)

对 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 做 Schmidt 正交化得 ξ_1, ξ_2, ξ_3 , 得到正交阵

$$P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

则 $P^{-1}AP = \text{diag}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$.

令 $(x_1, x_2, x_3) = P(y_1, y_2, y_3)$, 得原二次型的标准形 $\frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + 2y_3^2$. (10 分)

(3) 秩为 3, 正定的. (15 分)

4. 证明. 对 n 用数学归纳法. (2 分)

当 $n = 1$ 时, 结论显然成立. 假设结论对 $n - 1$ 阶矩阵成立.

设 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. 因为 $AB = BA$, 故 A 与 B 有共同特征向量 α_1 . (5 分)

将 α_1 扩充成为 $\mathbb{C}^n$ 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 令 $Q = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. 则 Q 可逆, 且

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \mu & * \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}.$$

其中 A_1, B_1 都是 $n - 1$ 阶方阵, 且 $A_1B_1 = B_1A_1$. 由归纳假设, 存在 $n - 1$ 阶可逆阵 P_1 , 使得

$$P_1^{-1}A_1P_1, P_1^{-1}B_1P_1 \text{ 同为上三角阵. 令 } P = Q \begin{pmatrix} 1 & \\ & P_1 \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & \\ & P_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & P_1^{-1}A_1P_1 \end{pmatrix} \\ P^{-1}BP &= \begin{pmatrix} 1 & \\ & P_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & * \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & * \\ 0 & P_1^{-1}B_1P_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

同为上三角阵. (10 分)