

安徽大学2024-20245学年第2学期《高等代数(下)》 期末模拟考试B卷参考答案与评分标准

一、填空题 (每小题4分, 共20分).

注: 对于有两空的小题, 答对一空得2分, 全对得4分

1. 实矩阵若有虚特征值必共轭成对出现, 又 A 的特征值之积等于 $|A| = 1$, 由此可求得 A 的其余特征值为 $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, 1$.

2. 由 Eisenstein 判别法可知, 这两个多项式在有理数域上不可约. 又后者不能整除前者, 故两者必互素, 因此最大公因式为 1.

3. 易知 $|A| = 4$, 由假设可令 $A^{-1}\alpha = \lambda_0\alpha$, 即 $A\alpha = \frac{1}{\lambda_0}\alpha$, 故 $\frac{1}{\lambda_0}$ 为 A 的特征值. 计算

$$\text{特征多项式 } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4), \text{ 得 } A \text{ 的特征值为}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$, 因此 $\frac{1}{\lambda_0} = 1$ 或 4 , 即 $\lambda_0 = 1$ 或 $\frac{1}{4}$.

$$\text{当 } \lambda_0 = 1 \text{ 时, 由 } (E - A)\alpha = 0 \text{ 得 } \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 1 + k + 1 = 0 \Rightarrow k = -2$$

$$\text{当 } \lambda_0 = \frac{1}{4} \text{ 时, 由 } (4E - A)\alpha = 0 \text{ 得 } \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow k = 1$$

因此, $k = 1$ 或 $k = -2$.

4. 利用初等变换求: 先将 $A(\lambda)$ 的第三列加到第一、二列, 得

$$\begin{aligned} A(\lambda) &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 + \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & -\lambda \\ 1 & 0 & -\lambda^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第一列乘}\lambda^2} \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 + \lambda & \lambda^2 + \lambda \\ 0 & 0 & -\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \lambda^2 + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 + \lambda \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5. 二次型的系数矩阵为 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & -1 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, A 的顺序主子式为 $|A_1| = \lambda$,

$$|A_2| = \lambda^2 - 1, |A_3| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2), |A_4| = |A_3| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2).$$

要使 f 为正定型, 必须有 $\lambda > 0, \lambda^2 - 1 > 0, (\lambda + 1)^2(\lambda - 2) > 0$, 解得 $\lambda > 2$.

二、简答题 (每小题 5 分, 共 20 分, 判断正误 2 分, 说明理由 3 分, 可酌情给分).

6. 正确. 理由如下: 显然 $\text{Im } \varphi = \varphi(U_1) + \varphi(U_2)$, 又 $\varphi(U_1) \cap \varphi(U_2) \subseteq U_2 \cap U_1 = 0$, 因此 $\text{Im } \varphi = \varphi(U_1) \oplus \varphi(U_2)$, 取维数后即得结论. $\square$

7. 正确. 理由如下: 由余数定理可得 $f(1) = 0$, 故 $(x - 1) \mid f(x)$, 于是 $(x^2 - 1) \mid f(x^2)$. $\square$

8. 错误. 理由如下: 证明. 只需证明 A, B 的 Jordan 标准形相同. 3 阶复矩

阵 A 的 Jordan 标准形只有以下几种情形:

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & 1 & \\ & a_1 & \\ & & a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & 1 & \\ & a_1 & 1 \\ & & a_1 \end{pmatrix},$$

对于第一种情形, A 的极小多项式无重根, 因为 A, B 的特征多项式与极小多项式都相同, 所以 B 的特征值也

是 a_1, a_2, a_3 且 B 的极小多项式也无重根, 从而 B 与 $\text{diag}(a_1, a_2, a_3)$ 相似. 对于第二种情

形, 若 $a_1 = a_2$, 则 B 的极小多项式为 $(a - a_1)^2$, 故 B 的 Jordan 标准形

$$\text{为 } \begin{pmatrix} a_1 & 1 & \\ & a_1 & \\ & & a_2 \end{pmatrix}. \text{ 若 } a_1 \neq a_2, \text{ 则 } B \text{ 的极小多项式为 } (a - a_1)^2(a - a_2),$$

$$\text{故 } B \text{ 的 Jordan 标准形为 } \begin{pmatrix} a_1 & 1 & \\ & a_1 & \\ & & a_2 \end{pmatrix}. \text{ 对于第三种情形, 则 } B \text{ 的极小多项式}$$

为 $(a - a_1)^3$, 故 B 的Jordan标准形为 $\begin{pmatrix} a_1 & 1 & & \\ & a_1 & 1 & \\ & & a_1 & \\ & & & a_1 \end{pmatrix}$. 对于 $n \geq 4$ 阶矩阵, 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

显然 A, B 的特征多项式均为 $(a - 1)^4$, 极小多项式均为 $(a - 1)^4$. □

9. 正确. 理由如下: 充分性显然成立, 下证必要性.

证法1: 由 $A' = A$ 可得 $I_n = AA' = A^2$, 从而 $(A + I_n)(A - I_n) = O$. 由 A 正定可知 $A + I_n$ 也正定, 从而可逆, 于是 $A - I_n = O$, 即 $A = I_n$.

证法2: 由于 A 是正定实对称矩阵, 故存在正交矩阵 P , 使得 $P'AP = \Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$, 其中 $\lambda_i > 0$. 又 A 为正交矩阵, 故 $\Lambda = P'AP$ 也是正交矩阵, 从而所有的 $\lambda_i = 1$, 于是 $A = P\Lambda P' = PI_nP' = I_n$. □

三、解答题 (每小题 12分, 需给出详细解答过程, 可酌情给分. 禁止使用课本习题结论或其他参考书中的结论).

10. 证明. 因为 A 可对角化, 故可设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 A 的 n 个线性无关的特征向量, 满足 $A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$ ($1 \leq i \leq n$) (6 分)

$$\begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \alpha_i \end{pmatrix} = (\lambda_i + \lambda_i^2) \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \alpha_i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_i \\ -\alpha_i \end{pmatrix} = (\lambda_i - \lambda_i^2) \begin{pmatrix} \alpha_i \\ -\alpha_i \end{pmatrix}.$$

通过定义不难验证 $\begin{pmatrix} \alpha_i \\ \alpha_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_i \\ -\alpha_i \end{pmatrix}$ ($1 \leq i \leq n$) 是线性无关的, 因此

$$\begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A \end{pmatrix}$$

有 $2n$ 个线性无关的特征向量, 从而可对角化.....(12 分)

11. 证明. 只要证明 $f(x)$ 在整数环上不可约即可. 用反证法, 设 $f(x) = g(x)h(x)$, 其中 $g(x), h(x)$ 都是次数小于 n 的首一整系数多项式.....(2 分)

注意到 $g(a_i)h(a_i) = -1$, (4 分)

因为 $g(x), h(x)$ 是整系数多项式, 故 $g(a_i) = 1, h(a_i) = -1$ 或 $g(a_i) = -1, h(a_i) = 1$, 无论是哪种情况, 都有 $g(a_i) + h(a_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \dots \dots \dots (8 \text{ 分})$

即次数小于 n 的多项式 $g(x) + h(x)$ 有 n 个不同的根, 故 $g(x) + h(x) = 0. \dots \dots \dots (10 \text{ 分})$

因此 $f(x) = -g(x)^2$, 但 $f(x)$ 是首一多项式, 而 $-g(x)^2$ 的首项系数为 -1 , 矛盾.. (12 分)

12. 证明. 设 $\mathbf{A}$ 的不变因子组为 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_n(\lambda)$, 其中 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$

$(1 \leq i \leq n-1)$, 则由条件可知, $\mathbf{A}$ 的极小多项式 $m(\lambda) = d_n(\lambda)$ 是一个二次实系数多项式. 下面分情况进行讨论: $\dots \dots \dots (4 \text{ 分})$

(1) 若 $m(\lambda) = (\lambda - a)^2 + b^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上不可约, 其中 $a, b \neq 0$ 为实数, 则由整除关系可知 $\mathbf{A}$ 的不变因子组为 $1, \dots, 1, m(\lambda), \dots, m(\lambda). \dots \dots \dots (8 \text{ 分})$

(2) 若 $m(\lambda) = (\lambda - a_1)(\lambda - a_2)$, 其中 a_1, a_2 为实数, 则由整除关系可知 $\mathbf{A}$ 的不变因子组为 $1, \dots, 1, \lambda - a_i, \dots, \lambda - a_i, m(\lambda), \dots, m(\lambda), i = 1$ 或 $2. \dots \dots \dots (12 \text{ 分})$

13. 证明. 对任一 n 维非零实列向量 α , 我们有

$$\begin{aligned} \alpha'(A+S)'(A+S)\alpha &= \alpha'(A'A + A'S + S'A + S'S)\alpha \\ &= \alpha'(A'A)\alpha + \alpha'(A'S + S'A)\alpha + \alpha'(S'S)\alpha. \dots \dots \dots (4 \text{ 分}) \end{aligned}$$

由于 $A'S + S'A = AS - SA = O$, 故上式等于 $\alpha'(A'A)\alpha + \alpha'(S'S)\alpha \dots \dots \dots (6 \text{ 分})$

$A'A$ 是正定阵, $S'S$ 是半正定阵.. $\dots \dots \dots (8 \text{ 分})$

所以上式总大于零, 即 $(A+S)'(A+S)$ 是正定阵.. $\dots \dots \dots (10 \text{ 分})$

于是 $|A+S|^2 > 0$, 从而 $A+S$ 是可逆矩阵.. $\dots \dots \dots (12 \text{ 分})$

14. 证明. (1) $\dim P_\alpha = n-1$, 设 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ 为 P_α 的一组标准正交基.. (2 分)

记 $\beta_n = \frac{\alpha}{|\alpha|}$, 则 $\sigma_\alpha(\beta_j) = \beta_j, j = 1, 2, \dots, n-1 \quad \sigma(\beta_n) = -\beta_n \dots \dots \dots (4 \text{ 分})$

任取 $\beta = \sum_{j=1}^n c_j \beta_j$, 则

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(\beta) &= \sigma_\alpha\left(\sum_{j=1}^n c_j \beta_j\right) = \sum_{j=1}^n c_j \sigma_\alpha(\beta_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} c_j \beta_j - c_n \beta_n = \sum_{j=1}^n c_j \beta_j - 2c_n \beta_n \\ &= \beta - 2(\beta, \beta_n) \beta_n = \beta - 2\left(\beta, \frac{\alpha}{|\alpha|}\right) \frac{\alpha}{|\alpha|} \\ &= \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha \end{aligned}$$

..... (6 分)

(2) 取 $\alpha = \frac{\eta - \beta}{|\eta - \beta|}$, 则 α 为单位向量 (8 分)

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\alpha}(\beta) &= \beta - 2(\beta, \alpha)\alpha \\
 &= \beta - 2 \left(\beta, \frac{\eta - \beta}{|\eta - \beta|} \right) \frac{\eta - \beta}{|\eta - \beta|} \\
 &= \beta - 2 \frac{(\beta, \eta) - |\eta|^2}{|\eta|^2 + |\beta|^2 - 2(\eta, \beta)} (\eta - \beta) \\
 &= \beta - 2 \frac{(\beta, \eta) - 1}{2 - 2(\eta, \beta)} (\eta - \beta) \\
 &= \beta + \eta - \beta = \eta
 \end{aligned}$$

..... (12 分)