

安徽大学2024-2025学年第2学期《高等代数(下)》 期末模拟考试A卷参考答案与评分标准

一、选择题 (每小题4分, 共20分).

1. 答案: D

解析: 设余式为 $ax + b$, $x^2 + x + 1$ 的根为三次单位根 ω ($\omega^3 = 1, \omega \neq 1$). 代入 $x = \omega$, 得 $\omega^{3m} + \omega^{3n} = 1 + 1 = 2 = a\omega + b$; 同理 $x = \omega^2$ 时, 结果仍为2. 解得 $a = 0, b = 2$, 余式为2.

2. 答案: C

解析: 矩阵仅与自身相似, 说明其Jordan标准型为数量矩阵 kI , 即必为数量矩阵.

3. 答案: C

解析: 矩阵可逆的充要条件是其 λ -矩阵的最后一个不变因子为非零常数, 即有非零常数项.

4. 答案: A

解析: $A^2 = 0$ 表明Jordan块平方为零, 而3阶Jordan块平方非零, 故最大阶数为2.

5. 答案: D

解析: 正交矩阵经相似变换 $P^{-1}AP$ (P 非正交) 后不一定保持正交性, 其他选项均为正交矩阵.

二、填空题 (每小题 4 分, 共20分).

6. 答案: 秩2, 零度2.

解析: $\varphi(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的像为行相同的矩阵, 形如 $\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix}$, 维数2, 故秩2, 零度 $= 4 - 2 = 2$.

7. 答案: 13, 25, 37.

解析: $|A| = 1 \times 2 \times 3 = 6$, A^* 特征值为6, 3, 2; A^2 特征值为1, 4, 9.

则 $2A^2A^* + I_3$ 特征值为 $2 \times 1 \times 6 + 1 = 13$, $2 \times 4 \times 3 + 1 = 25$, $2 \times 9 \times 2 + 1 = 37$.

8. 答案: $-\frac{6}{7}, -\frac{6}{7}$.

9. 答案: $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

解析: 实对称矩阵合同由秩 r 和正惯性指数 p 决定, r 从0到 n , 每个 r 对应 $r+1$ 种 p , 总类数为 $1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

10. 答案: $\lambda, \lambda^2, \lambda^2, (\lambda-1), (\lambda-1)^3, (\lambda+i), (\lambda-i)$

三、解答题 (每小题 12分, 需给出详细解答过程, 可酌情给分. 禁止使用课本习题结论或其他参考书中的结论).

11. 由于 $x^8 + 1$ 不能直接应用艾森斯坦判别法, 我们进行变量替换:

令 $x = y + 1$, 则有

$$x^8 + 1 = (y + 1)^8 + 1$$

展开多项式 (使用二项式定理):

$$\begin{aligned} (y + 1)^8 + 1 &= \sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} y^k + 1 \\ &= y^8 + 8y^7 + 28y^6 + 56y^5 + 70y^4 \\ &\quad + 56y^3 + 28y^2 + 8y + 2 \end{aligned}$$

取素数 $p = 2$, 验证艾森斯坦判别法的条件: 因此, 根据艾森斯坦判别法, 多项式 $x^8 + 1$ 在有理数域上不可约.

12. 方法1: 假设矩阵 A 奇异, 则存在非零实向量 $\mathbf{x}$ 使得 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 考虑二次型:

$$\mathbf{x}^T (AB + B^T A) \mathbf{x} = (A\mathbf{x})^T B\mathbf{x} + \mathbf{x}^T B^T (A\mathbf{x}) = \mathbf{0}^T B\mathbf{x} + \mathbf{x}^T B^T \mathbf{0} = 0$$

然而, 由于 $AB + B^T A$ 是正定矩阵, 对于任意非零实向量 $\mathbf{y}$ 都应有:

$$\mathbf{y}^T (AB + B^T A) \mathbf{y} > 0$$

这与 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 时得到的结果0矛盾. 因此, 原假设不成立, A 必须是非奇异矩阵.

方法2: 设 A 的特征值为 λ , 其特征值为 α , 则有 $\alpha^T A^T = \lambda \alpha^T$, 得出 $\alpha^T A = \lambda \alpha^T$,
 $\alpha^T (AB + B^T A) \alpha = \lambda \alpha^T B \alpha + \alpha^T B^T \lambda \alpha = \lambda \alpha^T (B + B^T) \alpha > 0$, 从而 A 为非异阵.

13. 设 A 为 n 阶矩阵且 $r(A) = 1$, 则 A 可表示为: $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$. 其中 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 为 n 维非零列向量.

计算 A 的平方: $A^2 = (\mathbf{v}^T \mathbf{u})A$, 令 $\lambda_0 = \mathbf{v}^T \mathbf{u}$, 这是 A 的非零特征值 (当 $\lambda_0 \neq 0$ 时).

情况1: $\mathbf{v}^T \mathbf{u} \neq 0$. 此时 $A^2 = \lambda_0 A$, 表明 A 可对角化. 其特征值为: 一个非零特征值 λ_0 ,
 $n - 1$ 个零特征值.

对应的Jordan标准形为对角矩阵: $J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

情况2: $\mathbf{v}^T \mathbf{u} = 0$. 所有特征值均为0. 此时 $A^2 = 0$ (幂零矩阵), 且 $r(A) = 1$,
 $r(A^2) = 0$. 由Jordan块性质: 幂零矩阵的Jordan块最大阶数为2 (因 $A^2 = 0$ 但 $A \neq 0$)
, 几何重数 $n - r(A) = n - 1$.

Jordan标准形由一

个2阶Jordan块 $J_2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $n - 2$ 个1阶Jordan块 $J_1(0) = [0]$ 组成, 形式为:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ & & \ddots & \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

综上, 秩为1的 n 阶矩阵 A 的Jordan标准形: 若 A 有非零特征值 (即迹 $\text{tr}(A) \neq 0$), 为
对角元含 $\text{tr}(A)$ 与 $n - 1$ 个0的对角矩阵, 若 A 所有特征值为0 (即迹 $\text{tr}(A) = 0$), 为含
一个2阶零Jordan块和 $n - 2$ 个1阶零Jordan块的分块矩阵.

14. (1) 给定矩阵 A 和 B 相似, 通过以下条件求解参数 x, y, z :

迹相等条件: $\text{tr}(A) = 1 + x + y$, $\text{tr}(B) = 2 + 2 + z$.

得到方程: $1 + x + y = 4 + z$ (①).

行列式相等条件: $|A| = xy - 3x + 2y + 4$, $|B| = 4z$.

得到方程: $xy - 3x + 2y + 4 = 4z$ (②).

特征值相同条件: B 的特征值为 $2, 2, z$, 故 2 是 A 的二重特征值, 满足: $|2E - A| = 0$, 其

中: $2E - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2-x & 2 \\ 3 & 3 & 2-y \end{pmatrix}$. 计算行列式并化简得到:

$xy - 5x - 4y + 14 = 0$ (③).

最终解为: $x = 4$, $y = 5$, $z = 6$.

(2) 给定矩阵 A 相似于对角矩阵 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, 构造可逆矩阵 P 的一种形式为:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

注: 此解不唯一, 任何由对应特征向量构成的可逆矩阵均可作为 P .

15. 设 V 为 n 维欧氏空间, σ 是 V 上的线性变换, A 为 σ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵,

$G = ((\alpha_i, \alpha_j))$ 为基的度量矩阵.

必要性证明: 若 σ 是对称变换, 则 $\forall \alpha, \beta \in V$ 有 $(\sigma(\alpha), \beta) = (\alpha, \sigma(\beta))$, 设 α, β 的坐标向量分别为 X, Y , 则

$$(\sigma(\alpha), \beta) = (AX)^T GY = X^T A^T GY$$

$$(\alpha, \sigma(\beta)) = X^T G(AY) = X^T GAY$$

由 X, Y 的任意性可得 $A^T G = GA$.

充分性证明: 若 $A^T G = GA$, 则对任意 $\alpha, \beta \in V$ 有

$$(\sigma(\alpha), \beta) = X^T A^T GY$$

$$(\alpha, \sigma(\beta)) = X^T GAY = X^T A^T GY$$

故 $(\sigma(\alpha), \beta) = (\alpha, \sigma(\beta))$, 即 σ 是对称变换.

综上, σ 是对称变换的充要条件为 $A^T G = G A$.