

2024 – 2025 学年第 2 学期
安徽大学《高等代数(下)》期末模拟试卷B卷
(闭卷笔试 120 分钟)

题号	一	二	三	总分
分数				

一、填空题 (每小题4分, 共20分)

得分	
----	--

1. 已知三阶正交矩阵 A 有一个特征值 $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 且 A 的行列式值等于 1, 则 A 的其余两个特征值为_____.
2. 设 p 是素数, 则 $x^p + px + p$ 和 $x^2 + p$ 的最大公因式是_____.
3. 设已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 且 $\alpha = (1, k, 1)^T$ 是 A^{-1} 的一个特征向量, 则 $k =$ _____.
4. 设 $A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$, 则 $A(\lambda)$ 的 Smith 标准形为_____.
5. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda x_1^2 + \lambda x_2^2 + \lambda x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$, 若此实二次型为正定型, 则 λ 的取值范围是_____.

二、简答题 (每问5分, 共20分, 判断叙述是否正确并简要说明理由.)

得分	
----	--

6. 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, U_1, U_2 是 V 的子空间且 $V = U_1 \oplus U_2$. 若 $\varphi(U_1) \subseteq U_2, \varphi(U_2) \subseteq U_1$, 则 $r(\varphi) = \dim \varphi(U_1) + \dim \varphi(U_2)$.
7. 如果 $(x-1) \mid f(x^n)$, 则 $(x^n-1) \mid f(x^n)$.

8. 设 A, B 均为复数域上 $n (n \geq 3)$ 阶方阵, 则 A 与 B 相似的充分必要条件是 A, B 有相同的特征多项式与最小多项式.

9. 正定实对称矩阵 A 为正交矩阵的充要条件是 A 为单位矩阵.

三、解答题(每小题12分, 共60分, 需给出详细解答过程. 禁止使用课本习题的结论或其他参考书中的结论.)

得分	
----	--

10. 设 n 阶复矩阵 A 可对角化, 证明: 矩阵 $\begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A \end{pmatrix}$ 也可对角化.
11. 设 $f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$, 其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个不同的整数, 求证: $f(x)$ 在有理数域上不可约.

12. 设 A 为 n 阶实矩阵, A 的 $n-1$ 阶行列式因子是 $n-2$ 次多项式, 求 A 的不变因子组.

14. 设 V 是 n 维的欧氏空间, 对于非零向量 $\alpha \in V$, 令 $P_\alpha = \{\beta \in V | (\beta, \alpha) = 0\}$, 若由 α 决定的正交变换 σ_α 把 α 映成 $-\alpha$, 并保持 P_α 中的每一点都不动, 则称 σ_α 为由 α 决定的反射.

(1) 向量 $\alpha \in V$, 证明对任意 $\beta \in V$, 有 $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$;

(2) 若 β, η 是 V 中不同的单位向量, 证明存在单位向量 α , 使得 $\sigma_\alpha(\beta) = \eta$.

13. 设 A 是 n 阶可逆实对称矩阵, S 是 n 阶实反对称矩阵且 $AS = SA$, 求证: $A + S$ 是可逆矩阵.