

安徽大学 2024-2025 学年第二学期

《高等代数下》期中考试答案

一. 填空题 (每题 4 分)

1. $\underline{x-1, x^2+2x+2}$

2. $\underline{(x^2+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)}$

3. $\underline{-\frac{1}{2}}$

4. $\underline{1}$

5. $\underline{1, \lambda, \lambda(\lambda-2), \lambda^3(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2}$

二. 计算题

6. 解: 由辗转相除法知:

$$f(x) = 2xg(x) + x^2 - x - 2,$$

$$g(x) = (x+2)(x^2 - x - 2) + x - 2,$$

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2).$$

.....(3 分)

从而 $(f(x), g(x)) = x - 2$(5 分)

$u(x) = -x - 2, v(x) = 2x^2 + 4x + 1$(10 分)

7. 解: (1) $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda-5 & 2 \\ 2 & -4 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-3)$, 从而

$$\lambda_1 = 1(2\text{重}), \lambda_2 = 3.$$

.....(3 分)

解方程 $(I - A)X = 0$, 求得其基础解系 $\xi_1 = (2, 1, 0)^T, \xi_2 = (-1, 0, 1)^T$,

解方程 $(3I - A)X = 0$, 求得其基础解系 $\xi_3 = (0, 1, 1)^T$(6 分)

取 $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则此时有 $P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$(10 分)

(2) 计算 $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, 从而

$A^n = PJ^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-3^n & -1+2 \cdot 3^n & 1-3^n \\ 1-3^n & -2+2 \cdot 3^n & 2-3^n \end{pmatrix}$(15 分)

8. 解:(1) $|\lambda I - A| = (\lambda - 2)^4$, 从而 A 的特征值为 $\lambda = 2(4 \text{ 重})$. 解方程 $(2I - A)X = 0$, 求得其基础解系 $\xi_1 = (0, 1, 0, 0)^T, \xi_2 = (-1, -1, 0, 1)^T$, 故属于 $\lambda = 2$ 特征向量为 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = (-k_2, k_1 - k_2, 0, k_2)^T, k_1, k_2$ 为任意常数.....(5 分)

(2) 极小多项式为 $(\lambda - 2)^2$(10 分)

(3) 若当标准形 $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$(15 分)

三. 证明题

9. 证明: 由艾森斯坦判别法知其在有理数域上不可约.....(10 分)

10. 证明: 考虑矩阵 A 的特征多项式 $f(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$. 由 A 可逆知, $a_0 = (-1)^n|A| \neq 0$(3 分)

哈密顿-凯莱定理表明: $f(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I_n = 0$(6 分)

因此

$$-\frac{1}{a_0}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1I_n)A = -\frac{1}{a_0}(A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A) = I_n.$$

取 $g(\lambda) = -\frac{1}{a_0}(\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1)$, 此时有 $A^{-1} = g(A)$(10 分)

11. 证明: 考虑 A 的特征子空间 V_{λ_0} , 则由 $AB = BA$ 知: 任意 $\alpha \in V_{\lambda_0}$, $A(B\alpha) = BA\alpha = B\lambda_0\alpha = \lambda_0(B\alpha)$, 这表明 V_{λ_0} 是 B -不变子空间.....(5 分)

考虑矩阵 B 在 V_{λ_0} 上的限制, 显然其必存在特征向量 β , 从而 β 是 A 与 B 的公共特征向量.....(10 分)

12. 证明: 存在可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = J = \text{diag}(J_1(\lambda_1, n_1), J_2(\lambda_2, n_2), \cdots, J_s(\lambda_s, n_s)).$$

.....(3 分)

令

$$B_1 = \text{diag}(\underbrace{\lambda_1, \lambda_1 \cdots \lambda_1}_{n_1 \uparrow}, \underbrace{\lambda_2, \lambda_2 \cdots \lambda_2}_{n_2 \uparrow}, \cdots, \underbrace{\lambda_s, \lambda_s \cdots \lambda_s}_{n_s \uparrow}),$$

$$C_1 = \text{diag}(J_1(0, n_1), J_2(0, n_2), \cdots, J_s(0, n_s)),$$

.....(6 分)

则有 $P^{-1}AP = J = B_1 + C_1$, 从而 $A = PB_1P^{-1} + PC_1P^{-1}$.

显然, $B = PB_1P^{-1}$ 是可对角化的, $C = PC_1P^{-1}$ 是幂零的.....(10 分)