

安徽大学 2023-2024 学年第二学期《高等代数（下）》 考试试卷（A 卷）

一、填空题（每空 4 分，共 40 分）填写不完整或结果没有化简均不得分。

1. 已知 5 阶方阵 A 满足 $A^2 - 3A + 2I = 0$ ，其中 I 为单位阵。若迹 $\text{Tr}(A - I) = 2$ ，则 A 的特征值为 _____，其几何重数分别为 _____。

解答. 1 和 2; (两个特征值对一个得 2 分)

(1 的重数为) 3, (2 的重数为) 2 (两个几何重数对一个得 2 分) □

2. 设 3 阶方阵 A 只有一个 Jordan 块，则 A 有 _____ 个互不相同的不变子空间。

解答. 4。

设 A 的特征值为 λ_0 (3 重)。根据题设条件， λ_0 作为 A 的极小多项式的根的重数为 3。 A 的全部互不相同的不变子空间为: $\{0\}, V_{\lambda_0} = \text{Ker}(A - \lambda_0 I)$, $\text{Ker}(A - \lambda_0 I)^2, \mathbb{C}^3 = \text{Ker}(A - \lambda_0 I)^3$. □

3. 已知一个线性变换在某组基下方阵为 $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，而在另一组基下方阵为 $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 。则 $x =$ _____, $y =$ _____。

解答. $-3, -2$. □

4. 使得实对称方阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 正定的实数 a 的取值范围是 _____。

解答. $\emptyset$ 或 “空集”。 □

5. 设 α_1, α_2 为欧氏空间中的一组向量， $|\alpha_1| = 1, |\alpha_2| = 2$ ，考虑向量 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \beta = \alpha_1 - \alpha_2$ 。则 α 的最大长度为 _____， α 与 β 的最小夹角为 _____。

解答. $2\arctan 2$ (或 $\arccos \frac{3}{5}$)。 □

6. 设方阵 A 的特征多项式为 $f(x) = x^n + x + 1, n \geq 3$ 。则

$\text{Tr}(A) =$ _____, A 的伴随方阵行列式 $|A^*| =$ _____。

解答. 11. □

二、解答题（共 60 分）需给出详细解答过程。禁止使用课本习题结论或其他参考书中的结论。

1. (20 分) 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 。考察左乘变换 $L_A: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$,

$L_A(X) = AX, \forall X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 。

(1) 证明 L_A 为可逆线性变换当且仅当 A 为可逆方阵，并求出其逆变换。

(2) 分别求 L_A 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 以及基 $E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}$ 下的矩阵，其中 E_{ij} 表示 (i, j) -分量为 1，其他分量为 0 的矩阵。

(3) 问形如 L_A 的线性变换全体能否给出 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 上的所有线性变换，简要说明理由。

(4) 设方阵 $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的特征多项式为 $f(x)$ 。试写出左乘映射

$L_B: \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ 的特征多项式（不需要给出详细计算过程）。

(1) (满分 7 分) 解. 对任意 $X, Y \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $a, b \in \mathbb{R}$, 有

$$L_A(aX + bY) = A(aX + bY) = aAX + bAY = aL_A(X) + bL_A(Y)$$

故 L_A 为线性变换. 若 A 为可逆阵, 则

$$L_A \circ L_{A^{-1}} = \text{Id}_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} = L_{A^{-1}} \circ L_A$$

故 L_A 为可逆变换, 且此时 $L_A^{-1} = L_{A^{-1}}$. 若 L_A 可逆, 则存在线性变换 $\varphi: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$, 使得

$$L_A \circ \varphi = \text{Id}_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} = \varphi \circ L_A$$

故对任意 $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, 有 $A\varphi(X) = X$. 令 $X = I_2$, 则有 $A\varphi(I_2) = I_2$. 故 A 可逆.

(2) (满分 8 分)

$$\begin{aligned} L_A(E_{11}) &= AE_{11} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = aE_{11} + cE_{21}, & L_A(E_{12}) &= AE_{12} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = aE_{12} + cE_{22} \\ L_A(E_{21}) &= AE_{21} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = bE_{11} + dE_{21}, & L_A(E_{22}) &= AE_{22} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = bE_{12} + dE_{22} \end{aligned}$$

故 L_A 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$$

L_A 在基 $E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$$

..... (8 分)

(3) 不能. (2 分) 理由: $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 上的线性变换全体空间为 16 维, 而 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 为 4 维. 或举出具体例子说明 (例如将所有 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 均映到单位阵的线性映射). ... (3 分)

(4) 若 $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的特征多项式为 $f(x)$, 则 $L_B: \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ 的特征多项式为 $f(x)^n$. (2 分) $\square$

2. (20 分) 令 $V = \{X \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid X = -X^T\}$ 为 3 阶反对称实方阵空间. 记 $[A, B] = AB - BA, \forall A, B \in V$. 考察 $A \in V$ 定义的伴随变换

$\text{ad}_A = [A, -]: V \rightarrow V, B \mapsto [A, B]$.

(1) 试验证 ad_A 为 V 上线性变换, 且

$$\text{ad}_{[A, B]} = [\text{ad}_A, \text{ad}_B] := \text{ad}_A \circ \text{ad}_B - \text{ad}_B \circ \text{ad}_A.$$

(2) 考察向量空间 V 的一组基 $e_1 = E_{12} - E_{21}, e_2 = E_{23} - E_{32}, e_3 = E_{13} - E_{31}$. 分别求出 $\text{ad}_{e_1}, \text{ad}_{e_2}, \text{ad}_{e_3}$ 在上述基下的矩阵.

- (3) 验证 $(A, B) := -\frac{1}{2} \text{tr}(\text{ad } A \circ \text{ad } B)$ 为 V 上的一个内积, 且对任意的 $A, B, C \in V$, 均有 $([A, B], C) = (A, [B, C])$ 成立。
- (4) 试对基 $\alpha_1 = e_1 + e_2 + e_3, \alpha_2 = e_2 + e_3, \alpha_3 = e_3$ 进行 Schmidt 正交化, 得到标准正交基。
- (1) (满分 8 分) 解. 对任意 $X \in V$, 有 $X = -X^\top$. 又因为 $A = -A^\top$, 所以

$$(\text{ad}_A(X))^\top = (AX - XA)^\top = X^\top A^\top - A^\top X^\top = XA - AX = -\text{ad}_A(X)$$

故 $\text{ad}_A(X) \in V$.

对任意 $X, Y \in V, a, b \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} \text{ad}_A(aX + bY) &= [A, aX + bY] = A(aX + bY) - (aX + bY)A \\ &= a(AX - XA) + b(AY - YA) = a\text{ad}_A(X) + b\text{ad}_A(Y). \end{aligned}$$

故 ad_A 为 V 上的线性变换。(4 分)

对任意 $X \in V$, 有

$$\begin{aligned} \text{ad}_{[A, B]}(X) &= [[A, B], X] = (AB - BA)X - X(AB - BA) \cdots \cdots (6 \text{ 分}) \\ (\text{ad}_A \circ \text{ad}_B - \text{ad}_B \circ \text{ad}_A)(X) &= \text{ad}_A(\text{ad}_B(X)) - \text{ad}_B(\text{ad}_A(X)) \\ &= [A, [B, X]] - [B, [A, X]] = [A, BX - XB] - [B, AX - XA] \\ &= ABX + XBA - BAX - XAB = (AB - BA)X - X(AB - BA) \\ &= \text{ad}_{[A, B]}(X) \cdots \cdots (8 \text{ 分}) \end{aligned}$$

- (2) (满分 6 分) 设 $e_1 = E_{12} - E_{21}, e_2 = E_{23} - E_{32}, e_3 = E_{13} - E_{31}$, 则

$$\text{ad}_{e_1}(e_1) = [e_1, e_1] = 0;$$

$$\text{ad}_{e_1}(e_2) = [e_1, e_2] = (E_{12} - E_{21})(E_{23} - E_{32}) - (E_{23} - E_{32})(E_{12} - E_{21}) = E_{13} - E_{31} = e_3;$$

$$\text{ad}_{e_1}(e_3) = [e_1, e_3] = (E_{12} - E_{21})(E_{13} - E_{31}) - (E_{13} - E_{31})(E_{12} - E_{21}) = E_{32} - E_{23} = -e_2.$$

故 ad_{e_1} 在基 e_1, e_2, e_3 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (3) (满分 2 分) 对任意 $A = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, B = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 \in V$, 于是

$$(A, B) = -\frac{1}{2} \text{tr}(\text{ad}_A \circ \text{ad}_B) = -\frac{1}{2} \text{tr}(a_1b_1e_2^2 + a_2b_2e_3^2 + a_3b_3e_1^2) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

由此可知, $(-, -)$ 为 V 中内积。又因为对任意 $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 有

$\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$, 所以

$$\begin{aligned}\text{tr}(\text{ad}_{[A,B]} \circ \text{ad}_C) &= \text{tr}(\text{ad}_A \circ \text{ad}_B \circ \text{ad}_C) - \text{tr}((\text{ad}_B \circ \text{ad}_A) \circ \text{ad}_C) \\ &= \text{tr}(\text{ad}_A \circ \text{ad}_B \circ \text{ad}_C) - \text{tr}(\text{ad}_C \circ (\text{ad}_B \circ \text{ad}_A)) \\ &= \text{tr}(\text{ad}_A \circ \text{ad}_B \circ \text{ad}_C) - \text{tr}((\text{ad}_C \circ \text{ad}_B) \circ \text{ad}_A) \\ &= \text{tr}(\text{ad}_A \circ \text{ad}_B \circ \text{ad}_C) - \text{tr}(\text{ad}_A \circ (\text{ad}_C \circ \text{ad}_B)) \\ &= \text{tr}(\text{ad}_A \circ \text{ad}_B \circ \text{ad}_C - \text{ad}_A \circ (\text{ad}_C \circ \text{ad}_B)) = \text{tr}(\text{ad}_A \circ \text{ad}_{[B,C]}) \\ \text{故}([A, B], C) &= -\frac{1}{2} \text{tr}(\text{ad}_{[A,B]} \circ \text{ad}_C) = -\frac{1}{2} \text{tr}(\text{ad}_A \circ \text{ad}_{[B,C]}) = (A, [B, C]).\end{aligned}$$

(4) (满分 4 分) 由 (3) 解答过程可知, e_1, e_2, e_3 构成 (3) 中欧氏空间 V 的一组标准正交基。对 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 作 Schmidt 正交化得

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha_1 = e_1 + e_2 + e_3; \\ \beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \frac{1}{3}(-2e_1 + e_2 + e_3); \\ \beta_3 &= \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 = \frac{1}{2}(-e_2 + e_3);\end{aligned}$$

单位化得

$$\xi_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(e_1 + e_2 + e_3), \xi_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}(-2e_1 + e_2 + e_3), \xi_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-e_2 + e_3).$$

□ 3. (15 分) 考虑实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3.$$

(1) 试写出该二次型对应的实对称方阵。

(2) 证明该二次型半正定。

(3) 利用变量的正交替换, 将该二次型化为标准型。

解. (1) $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. (5 分)

(2) 直接计算可得 A 有特征值 $\lambda_1 = 0$ (单重), 特征值 $\lambda_2 = 3$ (2 重), 故为半正定阵. 或利用合同变换将 A 化为标准形; 或计算 A 的所有主子式大于等于零.

(5 分)

(3) 取 $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \dots \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots \\ \dots & 3 & \vdots \\ \dots & 3 & \end{pmatrix}$. (5

分)

□

4. (5 分) 设 n 阶复方阵 A 与 B 满足 $AB = BA$, 且存在 $v \in \mathbb{C}^n$, 使得 $v, Av, A^2v, \dots, A^{n-1}v$ 为 $\mathbb{C}^n$ 的一组基。试证明: 存在次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$, 使得 $B = f(A)$ 。

证明. 由 $v, Av, \dots, A^{n-1}v$ 为 $\mathbb{C}^n$ 的一组基可知, 存在 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, 使得

$$Bv = a_0v + a_1Av + \dots + a_{n-1}A^{n-1}v.$$

令 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ 。则有 $Bv = f(A)v$ 。即有
($B - f(A)$) $v = 0$ 。进而对任意 $g(x)$ 有
($B - f(A)$) $g(A)v = g(A)(B - f(A))v = 0$ 。从而 $B - f(A) = 0$ 。(5 分)。 $\square$