

安徽大学 2023-2024 学年第二学期《高等代数（下）》 考试试卷（A 卷）

一、填空题（每空 4 分，共 40 分）填写不完整或结果没有化简均不得分。

1. 已知 5 阶方阵 A 满足 $A^2 - 3A + 2I = 0$ ，其中 I 为单位阵。若迹 $\text{Tr}(A - I) = 2$ ，则 A 的特征值为 _____，其几何重数分别为 _____。

2. 设 3 阶方阵 A 只有一个 Jordan 块，则 A 有 _____ 个互不相同的不变子空间。

3. 已知一个线性变换在某组基下方阵为 $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，而在另一组基下方阵为 $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 。则 $x =$ _____， $y =$ _____。

4. 使得实对称方阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 正定的实数 a 的取值范围是 _____。

5. 设 α_1, α_2 为欧式空间中的一组向量， $|\alpha_1| = 1, |\alpha_2| = 2$ ，考虑向量 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \beta = \alpha_1 - \alpha_2$ 。则 α 的最大长度为 _____， α 与 β 的最小夹角为 _____。

6. 设方阵 A 的特征多项式为 $f(x) = x^n + x + 1, n \geq 3$ 。则

$\text{Tr}(A) =$ _____， A 的伴随方阵行列式 $|A^*| =$ _____。

二、解答题（共 60 分）需给出详细解答过程。禁止使用课本习题结论或其他参考书中的结论。

1. (20 分) 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 。考察左乘变换 $L_A : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ， $L_A(X) = AX, \forall X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 。

(1) 证明 L_A 为可逆线性变换当且仅当 A 为可逆方阵，并求出其逆变换。

(2) 分别求 L_A 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 以及基 $E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}$ 下的矩阵，其中 E_{ij} 表示 (i, j) -分量为 1，其他分量为 0 的矩阵。

(3) 问形如 L_A 的线性变换全体能否给出 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 上的所有线性变换，简要说明理由。

(4) 设方阵 $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的特征多项式为 $f(x)$ 。试写出左乘映射

$L_B : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ 的特征多项式（不需要给出详细计算过程）。

2. (20 分) 令 $V = \{X \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid X = -X^T\}$ 为 3 阶反对称实方阵空间。记

$[A, B] = AB - BA, \forall A, B \in V$ 。考察 $A \in V$ 定义的伴随变换

$\text{ad}_A = [A, -] : V \rightarrow V, B \mapsto [A, B]$ 。

(1) 试验证 ad_A 为 V 上线性变换，且

$\text{ad}_{[A, B]} = [\text{ad}_A, \text{ad}_B] := \text{ad}_A \circ \text{ad}_B - \text{ad}_B \circ \text{ad}_A$ 。

(2) 考察向量空间 V 的一组基 $e_1 = E_{12} - E_{21}, e_2 = E_{23} - E_{32}, e_3 = E_{13} - E_{31}$ 。

分别求出 $\text{ad}_{e_1}, \text{ad}_{e_2}, \text{ad}_{e_3}$ 在上述基下的矩阵。

(3) 验证 $(A, B) := -\frac{1}{2} \text{tr}(\text{ad}_A \circ \text{ad}_B)$ 为 V 上的一个内积，且对任意的

$A, B, C \in V$ ，均有 $([A, B], C) = (A, [B, C])$ 成立。

- (4) 试对基 $\alpha_1 = e_1 + e_2 + e_3, \alpha_2 = e_2 + e_3, \alpha_3 = e_3$ 进行 Schmidt 正交化, 得到标准正交基。
3. (15 分) 考虑实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3$ 。
- (1) 试写出该二次型对应的实对称方阵。
- (2) 证明该二次型半正定。
- (3) 利用变量的正交替换, 将该二次型化为标准型。
4. (5 分) 设 n 阶复方阵 A 与 B 满足 $AB = BA$, 且存在 $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, 使得 $\mathbf{v}, A\mathbf{v}, A^2\mathbf{v}, \dots, A^{n-1}\mathbf{v}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 的一组基。试证明: 存在次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$, 使得 $B = f(A)$ 。