

安徽大学 2021—2022 学年第 2 学期《高等代数（下）》考试 B

卷参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 3 分，其中第 7 小题答对 1 空得 2 分）

1. $-\frac{1}{2}$, 2. $(\lambda-1)^3$, 3. $-\frac{27}{2}$, 4. $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda-1 & \\ & & (\lambda-1)(\lambda+2) \end{pmatrix}$, 5. 2, 6. $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$,

7. $L(\xi_1); U$, 8. I_n , 9. $\overbrace{1, \dots, 1}^{n-1}, (\lambda-1)^n$, 10. $\{(-4y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ 或 $L((-4, 1))$.

二、计算题

11. 解.

$$A(\varepsilon_2) = a_{22}\varepsilon_2 + a_{32}\varepsilon_3 + a_{12}\varepsilon_1,$$

$$A(\varepsilon_3) = a_{23}\varepsilon_2 + a_{33}\varepsilon_3 + a_{13}\varepsilon_1,$$

$$A(\varepsilon_1) = a_{21}\varepsilon_2 + a_{31}\varepsilon_3 + a_{11}\varepsilon_1,$$

5分

$$A(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_1) = (\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_1) \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \\ a_{12} & a_{13} & a_{11} \end{pmatrix}. \quad \square \quad 7分$$

12.

解.

	$g(x)$	$f(x)$	
$q_2(x) = -\frac{x}{3} + \frac{10}{9}$	$x^3 - 3x^2 + 0x + 1$ $x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x$	$x^4 - 4x^3 + 0x^2 + 0x + 1$ $x^4 - 3x^3 - 0x^2 + x$	$x - 1 = q_1(x)$
	$-\frac{10}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$ $-\frac{10}{3}x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{20}{9}$	$-x^3 + 0x^2 - x + 1$ $-x^3 + 3x^2 + 0x - 1$	
	$r_2(x) = \frac{16}{9}x - \frac{11}{9}$	$r_1(x) = -3x^2 - x + 2$	

因为 $r_2(x) = \frac{16}{9}(x - \frac{11}{16})$, $r_1(x) = -3(x+1)(x - \frac{2}{3})$,

所以 $(r_1(x), r_2(x)) = 1$.

从而 $(f(x), g(x)) = (r_1(x), r_2(x)) = 1$.

8分

13.

解. (1) 此二次型的矩阵为 $\begin{pmatrix} 9 & -4 & 4 \\ -4 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 11 \end{pmatrix}$.

3分

(2) 正交线性替换为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, 其中 $C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, 标准形为 $3y_1^2 + 9y_2^2 + 15y_3^2$. 12分

(3) 正定(因为标准形中平方项系数都是正数).

□ 15分

三、证明题 (每小题 10 分)

14.

证法1. 设上三角正交阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_1 = (a_{11}, 0, \dots, 0)^T$, $\alpha_2 = (a_{12}, a_{22}, 0, \dots, 0)^T$,
 $\dots, \alpha_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn})^T$, 其中 $a_{kk} \neq 0, k = 1, 2, \dots, n$.

由 $\alpha_1^T \alpha_k = 0 (k \neq 1)$ 得, $a_{11}a_{1k} = 0$. 从而 $a_{1k} = 0, k = 2, 3, \dots, n$.

同理, $a_{2j} = 0, j = 3, \dots, n$.

依此做下去, $a_{ij} = 0, i = 3, \dots, n-1; j = i+1, \dots, n$.

因此, $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

因为 $\alpha_i = (0, \dots, 0, a_{ii}, 0, \dots, 0), i = 1, \dots, n$, 为单位向量, 所以 $a_{ii} = 1$ 或 -1 . □

证法2. 对矩阵的阶数 n 进行归纳.

当 $n = 1$ 时显然成立.

假设结论对于阶数为 $n-1$ 的矩阵成立.

设 A 为 n 阶的上三角正交阵, 记 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ O & A_1 \end{pmatrix}$, 其中 α 为 $n-1$ 阶列向量,

O 为 $n-1$ 阶零向量, A_1 为 $n-1$ 阶上三角矩阵. 由 $A^T A = I_n$ 可知,

$$\begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{11}\alpha^T \\ a_{11}\alpha & \alpha\alpha^T + A_1^T A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & I_{n-1} \end{pmatrix}.$$

故 $a_{11}^2 = 1, a_{11}\alpha = O, \alpha\alpha^T + A_1^T A_1 = I_{n-1}$. 解得 $a_{11} = \pm 1, \alpha = O, A_1^T A_1 = I_{n-1}$.

即 A_1 为 $n-1$ 阶上三角正交阵. 由归纳假设, A_1 为对角阵, 且 $a_{ii} = \pm 1, 2 \leq i \leq n$.

进一步可知, A 为对角阵, 且 $a_{ii} = \pm 1, 1 \leq i \leq n$. □

15.

证法1. A 的特征多项式

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= |\lambda I_n - A| \\ &= \begin{vmatrix} (\lambda-1)I_r & -B \\ O & (\lambda+1)I_{n-r} \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)^r (\lambda+1)^{n-r}. \end{aligned}$$

解得特征值 $\lambda_1 = 1$ (r 重), $\lambda_2 = -1$ ($n-r$ 重).

注意到矩阵 $(1 \cdot I_n - A) = \begin{pmatrix} O & -B \\ O & 2I_{n-r} \end{pmatrix}$ 的秩等于 $n-r$.

因此, 特征值 1 的几何重数 $= n - \text{rank}(I_n - A) = r =$ 其代数重数.

同理可证, 特征值 -1 的几何重数等于其代数重数.

从而 A 可对角化. $\square$

证法2. 由 $\begin{pmatrix} I_r & \frac{1}{2}B \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & B \\ O & -I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & -\frac{1}{2}B \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & -I_{n-r} \end{pmatrix}$ 即得 $\square$

16.

证明. 由于方阵 A 与 B 相似, C 与 D 相似, 则存在可逆矩阵 $P_i (i=1,2)$,

使得 $B = P_1^{-1}AP_1, D = P_2^{-1}CP_2$.

$$\text{因此} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}.$$

又因为 $\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$ 可逆, 故 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ 相似.

五、分析题 (10 分)

17.

解. 不一定. 例如: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 不是任何矩阵的平方.

$$\text{设} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} ad - bc = 0, & (1) \text{ (两边取行列式得)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + bc = 0, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab + bd = 1, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ac + cd = 0, & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} bc + d^2 = 0. & (5) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow ad + a^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ 或 } d = -a.$$

$$(i) a = 0 \xRightarrow{(2)} bc = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ 或 } c = 0 \xRightarrow{(5)} d = 0 \text{ 与 (3) 矛盾.}$$

$$(ii) d = -a, \text{ 代入 (3) 式左边, 得 } ab + bd = ab - ab = 0 \neq 1, \text{ 矛盾. } \square$$