

安徽大学 2021—2022 学年第 2 学期

《高等代数（下）》 考试试卷（A 卷）

（闭卷 满分 100 分 时间 120 分钟）

考场登记表序号_____

题 号	一	二、1	二、2	二、3	二、4	总分
得 分						
阅卷人						

一、填空题（每空 5 分，共 40 分）。答案不完整或没有化简均不得分。

得分

设实方阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，欧氏空间 $V = \mathbb{R}^{4 \times 1}$ ， V 的内积 $(\alpha, \beta) = \alpha^T \beta$ 。

1. 多项式 $x^6 + 1$ 在 $\mathbb{R}$ 上的不可约分解为_____。
2. A 的极小多项式 $m(\lambda) =$ _____，特征值 0 的几何重数=_____。
3. λ -方阵 $\lambda I - A$ 的 Smith 标准形为 $\begin{bmatrix} & \\ & \\ & \\ & \end{bmatrix}$ 。
4. $B = A^2$ 的 Jordan 标准形为 $\begin{bmatrix} & \\ & \\ & \\ & \end{bmatrix}$ 。
5. V 上的实二次型 $Q_1(x) = x^T A x$ 的规范形为_____，
 $Q_2(x) = x^T x - \lambda Q_1(x)$ 是正定的当且仅当实数 λ 满足_____。
6. 对 V 的一组基 $\alpha_1 = (-1, 0, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, -1, 0, 1)^T, \alpha_3 = (0, 0, -1, 1)^T, \alpha_4 = (0, 0, 0, -1)^T$
作 Schmidt 正交化，得 V 的标准正交基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ ，则 $\beta_4 =$ _____。

二、解答题（每小题 15 分，共 60 分）。需给出详细解答过程。禁止使用课本习题结论或其他参考书中的结论。

1. 设实系数多项式 $f(x) = x^2 + x + 1$ ， $g(x) = x^2 - x + 1$ 。
求次数最小的 $u(x), v(x) \in \mathbb{R}[x]$ ，使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$ 。

得分

2. 设 A 是置换方阵, 即 A 的行向量是单位方阵的行向量的一个排列。

证明: 存在可逆复方阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 是对角阵。

得分	
----	--

3. $Q(x)$ 是一个 n 阶实二次型, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ 使得 $Q(\alpha) < 0 < Q(\beta)$ 。

证明: 存在 $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}^n$, 使得 $Q(\gamma_1) = Q(\gamma_2) = 0$ 且 γ_1, γ_2 线性无关。

得分	
----	--

4. 设 A 是 n 阶实正交方阵, $\alpha + i\beta$ 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量,

其中 $\lambda \neq \pm 1$, α, β 是实向量, i 是虚数单位。证明: α 与 β 模相等, 且相互正交。

得分	
----	--