

安徽大学 2023—2024 学年第二学期

《 高等代数（下） 》期中考试卷

参考答案与评分细则

一、填空题（每小题 6 分，共 30 分）

1、 $7x(x-1)(x-2)(x-3)+43x(x-1)(x-2)+44x(x-1)+8x-9$

2、 -48

3、
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) \end{pmatrix}$$

4、（1）存在一个基，在该基下的矩阵是对角矩阵；（2）有 n 个线性无关的特征向量（ n 维空间）；（3）空间 V 可以表示成特征子空间的直和；（4）每个特征子空间的几何重数等于它的特征值的代数重数；（5）极小多项式是特征值一次因式的乘积；（6）有 n 个不同的特征值（ n 维空间，且该条件是充分不必要条件）。

5、回答如下：

定理 5.5.7 (Eisenstein 判别法). 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ 为整系数多项式. 若存在素数 p , 满足

(1) $p \mid a_i, i = 0, 1, \cdots, n-1$;

(2) $p \nmid a_n$;

(3) $p^2 \nmid a_0$,

则 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

二、计算题（共 50 分）

6（10 分）、

13. 用辗转相除法,得

$$f(x) = 1 \cdot g(x) + (-x^2 + x + u - 1)$$

$$g(x) = [-x - (t+2)](-x^2 + x + u - 1) +$$

$$(t+u+1)x + 1 + (t+2)(u-1)$$

由于 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式是一个二次多项式,所以有

$$t+u+1=0, \quad 1+(t+2)(u-1)=0$$

$$\text{解之得} \begin{cases} t=-1 \\ u=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} t=-3 \\ u=2 \end{cases}.$$

.....10 分

7（15 分）、解 （1）由题设

$$\sigma(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\sigma(E_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

..... 3 分

$$\sigma(E_{21}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\sigma(E_{22}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{故 } \sigma \text{ 在基 } E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} \text{ 下的矩阵为 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

.....5 分

(2) 因 A 第 1, 2 列是极大线性无关组, 所以 $\sigma(E_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma(E_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 可作为 σ 的值域

的基, 即 $\sigma(P^{2 \times 2}) = L(\sigma(E_{11}), \sigma(E_{12}))$ 是 2 维的空间.

..... 10 分

$$\text{设 } X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in \sigma^{-1}(0), \text{ 则}$$

$$\sigma(X) = x_{11}\sigma(E_{11}) + x_{12}\sigma(E_{12}) + x_{21}\sigma(E_{21}) + x_{22}\sigma(E_{22}) = \begin{pmatrix} x_{12} - x_{22} & x_{11} - x_{21} \\ -x_{12} + x_{22} & -x_{11} + x_{21} \end{pmatrix} = 0$$

得到齐次线性方程组 $\begin{cases} x_{12} - x_{22} = 0 \\ x_{11} - x_{21} = 0 \end{cases}$ ，它的基础解系为 $(1 \ 0 \ 1 \ 0)', (0 \ 1 \ 0 \ 1)'$ 。

所以 $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 可作为 $\sigma^{-1}(0)$ 的基，即 $\sigma^{-1}(0) = L(X_1, X_2)$ 是 2 维的。

..... 15 分

8 (15 分)、解

24. 取 P^3 的基 e_1, e_2, e_3 ，可求得 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{又有 } P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{使得 } P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{由 } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) =$$

$(e_1, e_2, e_3)P$ 得 P^3 的基

$$\alpha_1 = -e_1 + 2e_2 = (-1, 2, 0)$$

$$\alpha_2 = -e_1 + 2e_3 = (-1, 0, 2)$$

$$\alpha_3 = 2e_1 + e_2 + e_3 = (2, 1, 1)$$

$\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵为 Λ .

.....15 分

9 (10 分)、

6. 可求得 $|\lambda E - A| = (\lambda - 1)^3$ ，容易验证

$$A - E \neq O, (A - E)^2 = O$$

故 $m_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2$.

..... 5 分

$$A \text{ 的 Jordan 标准形是 } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

..... 10 分

四、证明题 (共 20 分)

10 (10 分)、

证 法 1 设 $ABx = \lambda x$, 即 λ 是 AB 的特征值, x 是对应 λ 的特征向量. 用 B 左乘之得 $BA(Bx) = \lambda(Bx)$.

(1) 若 $\lambda \neq 0$, 则 $Bx \neq 0$. 否则, 若 $Bx = 0$, 则 $0 = ABx = \lambda x$, 这与 $\lambda \neq 0$ 和 $x \neq 0$ 矛盾. 可见 λ 也是 BA 的特征值 (此时, 对应的特征向量是 Bx).

(2) 若 $\lambda = 0$, 即 BA 有零特征值, 则

$$0 = |AB - 0E| = |A||B| = |B||A| = |BA| = |BA - 0E|$$

即 0 也是 BA 的特征值.

综合(1)与(2)得证 AB 与 BA 有相同的特征值.

..... 20 分

或者

法 2 对分块矩阵 $\begin{pmatrix} \lambda E & B \\ A & E \end{pmatrix} (\lambda \neq 0)$ 分别作分块初等变换:

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -\lambda^{-1}A & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda E & B \\ A & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E & B \\ O & E - \lambda^{-1}AB \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E & -B \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda E & B \\ A & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E - BA & O \\ A & E \end{pmatrix}$$

分别取行列式得

$$\begin{vmatrix} \lambda E & B \\ A & E \end{vmatrix} = |\lambda E| |E - \lambda^{-1}AB| = \lambda^n |\lambda^{-1}(\lambda E - AB)| = |\lambda E - AB|$$

$$\begin{vmatrix} \lambda E & B \\ A & E \end{vmatrix} = |\lambda E - BA| |E| = |\lambda E - BA|$$

即 $|\lambda E - AB| = |\lambda E - BA|$ 或 $|AB - \lambda E| = |BA - \lambda E|$. 这表明 AB 与 BA 有相同的非零特征值. 当 $\lambda = 0$ 时, 同法 1 类似的证明.

..... 20 分