

2023-2024 学年高等代数 (下) 期中模拟测试题参考答案

一、

1. 2(2 重), 无

$g(x)$ 没有重根: 求 $f(x)$ 的微商得 $f'(x) = 1 + x + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$, 所以 $f(x) = f'(x) + \frac{x^n}{n!}$. 由习题 5.2 第 7 题的结果得 $(f(x), f'(x)) = \left(\frac{x^n}{n!}, f'(x)\right)$. 因为 $\frac{x^n}{n!}$ 的不可约因式只有 x (不计重数), 而 $x \nmid f'(x)$, 所以 $\left(\frac{x^n}{n!}, f'(x)\right) = 1$. 从而 $(f(x), f'(x)) = 1$. 因此根据推论 5.3.7, $f(x)$ 无重因式, 也就没有重根.

2. 24.

依题意, $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$ 是 B 的所有特征值, 则 $6B^* + I$ 的特征值为 2, 3, 4, 故 $\det(6B^* + I) = 24$.

3. 2, 3.

由
$$\begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 5 & -3 & b \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$
 解得 $\lambda = -1, a = 2, b = 3$.

4. $D_1 = D_2 = D_3 = 1, D_4 = m(\lambda)$.

极小多项式等于最后一个不变因子, 特征多项式等于不变因子的乘积, 因此可以得到矩阵的不变因子为 $1, 1, 1, m(\lambda)$, 从而行列式因子为 $1, 1, 1, m(\lambda)$.

5.2 和 $-\frac{1}{3}$.

这个多项式的最高次项系数 3 的因数是 $\pm 1, \pm 3$, 常数项 -2 的因数是 $\pm 1, \pm 2$. 所以可能的有理根是 $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}$. 计算得到 2 和 $-\frac{1}{3}$ 是 $f(x)$ 的根.

二、

6. 对.

充分性显然. 必要性: 由于 $f'(x) \mid f(x)$, 所以 $f'(x)$ 就是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的最大公因式, 次数为 $n-1$, 所以 $\frac{f(x)}{(f(x), f'(x))}$ 是一个次数为 1 的多项式, 设为 $c(x-a)$, 则 $f(x)$ 只有 $x-a$ 这么一个不可约因式, 从而只能是 $f(x) = c(x-a)^n$, 其中 c 是一个非零常数. 这说明 $f(x)$ 只有一个 n

重根. □

7. 错误. $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 仅有相同的初等因子组, 并不能确定 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价, 因为

不变因子的个数有可能不同. 例如 $A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & (\lambda-1)^2 & \\ & & (\lambda-1)^2(\lambda-3) \end{pmatrix}$ 和 $B(\lambda) =$

$\begin{pmatrix} (\lambda-1)^2 & & \\ & (\lambda-1)^2(\lambda-3) & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ 有相同的初等因子组 $(\lambda-3), (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2$, 但它们不

等价. □

8. 错, 定理 6.4.1: 数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶 λ - 方阵 $A(\lambda)$ 可逆的充分必要条件是行列式 $\det(A(\lambda))$

是数域 $\mathbb{F}$ 中非零常数. $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ 满秩, 但是由 $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(\lambda) & 0 \\ 0 & f(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 得到

$g(\lambda) = f(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$, 不是关于 λ 的多项式, 因此 $A(\lambda)$ 不可逆.

三、

9. 对矩阵 $\lambda I - A$ 进行初等变换, 有

$$\begin{aligned}
\lambda I - A &= \begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda-3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & -(\lambda-2)^2 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda-3 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda-2)^2 & \lambda-1 & (\lambda-2)^2 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & (\lambda-2)^2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda-2)^2 & 0 & (\lambda-2)^2 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-2)^2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda-2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-2)^2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-2)^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

因此, A 的初等因子为 $(\lambda-2)^2, (\lambda-2)^2$. 故 A 的若尔当标准形为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

$$10. \text{ 对于矩阵 } A, \text{ 由 } 2I - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可知 $\lambda = 2$ 有 $3 - r(2I - A) = 2$ 个线性无关的特征向量; 而 $\lambda = 1$ 有 1 个线性无关特征向量 (因为 $\lambda = 1$ 是单根), 故 A 有 3 个线性无关特征向量, 从而 A 可对角化, 即 A 与 C 相似. 同

$$\text{理对于矩阵 } B, \text{ 由 } 2I - B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可知 B 属于 $\lambda = 2$ 的线性无关特征向量只有 $3 - r(2I - B) = 1$ 个, 因此 B 不能对角化, 从而

B 与 C 不相似. 进一步可知 A 与 B 也不相似, 这是因为假设 A 与 B 相似, 而 A 与 C 相似, 由传递性可知 B 与 C 相似, 矛盾.

11. 对任意 $(x_1, y_1)^T, (x_2, y_2)^T \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}\varphi((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= \varphi(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2, 2x_1 + 2x_2 + 3y_1 + 3y_2) \\ &= (x_1 + y_1, x_1 - y_1, 2x_1 + 3y_1) + (x_2 + y_2, x_2 - y_2, 2x_2 + 3y_2) \\ &= \varphi(x_1, y_1) + \varphi(x_2, y_2), \\ \varphi(\lambda(x_1, y_1)) &= \varphi(\lambda x_1, \lambda y_1) = (\lambda x_1 + \lambda y_1, \lambda x_1 - \lambda y_1, 2\lambda x_1 + 3\lambda y_1) \\ &= \lambda(x_1 + y_1, x_1 - y_1, 2x_1 + 3y_1) = \lambda\varphi(x_1, y_1).\end{aligned}$$

因此, φ 是线性映射.

取 $\mathbb{R}^2$ 的基 $\varepsilon_1 = (1, 0), \varepsilon_2 = (0, 1)$.

$\mathbb{R}^3$ 的基 $\eta_1 = (1, 0, 0), \eta_2 = (0, 1, 0), \eta_3 = (0, 0, 1)$.

$$\varphi(\varepsilon_1) = \varphi(1, 0) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(\varepsilon_2) = \varphi(0, 1) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{故 } \varphi \text{ 在两组基下的矩阵为 } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{做初等行变换得 } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ 故 } \text{Im } \varphi = L(\eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3, \eta_1 - \eta_2 + 3\eta_3), \ker \varphi = \{0\}.$$

12. 因为 $\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ -a & \lambda - 2 & 0 \\ -b & -c & \lambda - 1 \end{pmatrix}$, 所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$. A

可对角化的充分必要条件是每个特征值的代数重数等于几何重数, 故仅需要考虑重根的情形.

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $2I - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ -b & -c & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 故 A 可对角化的充要条件是 $a = 0$.

13. 证法一 由于 $\mathcal{A}$ 的特征值 λ 满足 $\lambda^2 = \lambda$, 得 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 1$. 取定 V 的一个基 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, 设 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵为 A , 则 $A^2 = A$, 因为 $A(I - A) = O$, 所以 $r(A) + r(I - A) \leq n$. 又 $n = r(I) \leq r(A) + r(I - A)$, 故 $r(A) + r(I - A) = n$. 又 $\dim V_0 = n - r(A)$, $\dim V_1 = n - r(I - A)$, 所以 $\dim V_0 + \dim V_1 = n$. 所以 $V = V_0 \oplus V_1$.

证法二 先证 $V = V_0 + V_1$. 事实上, 对任意 $\alpha \in V$, 取 $\alpha_0 = \alpha - \mathcal{A}(\alpha), \alpha_1 = \mathcal{A}(\alpha)$. 则有 $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1$. 由 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, 直接验证得到 $\mathcal{A}(\alpha_0) = 0, \mathcal{A}(\alpha_1) = \alpha_1$. 所以 $\alpha_0 \in V_0, \alpha_1 \in V_1$. 其次, 证明 $V_0 \cap V_1 = \{0\}$. 事实上, 设 $\alpha \in V_0 \cap V_1$, 则 $\mathcal{A}(\alpha) = 0$ 且 $\mathcal{A}(\alpha) = \alpha$, 故 $\alpha = 0$. 综上, $V = V_0 \oplus V_1$.

证法三 因为 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, 所以 $f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$ 是 $\mathcal{A}$ 的零化多项式. 由 $m_{\mathcal{A}}(\lambda) \mid f(\lambda)$ 知 $m_{\mathcal{A}}(\lambda)$ 没有重根, 所以 $\mathcal{A}$ 可以对角化且主对角线上的元素为 A 的特征值.

证法四 设 $\mathcal{A}$ 的 Jordan 标准形为 $J = \text{diag}(J(\lambda_1, e_1), J(\lambda_2, e_2), \dots, J(\lambda_t, e_t))$. 因为 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, 所以 $J^2 = J$, 进而有 $J(\lambda_i, e_i)^2 = J(\lambda_i, e_i) (1 \leq i \leq t)$. 用元素比较得到 $e_i = 1, \lambda_i = 1, 0$. $V = V_0 \oplus V_1$.

证法五 因为 $A^2 = A$, 易见 A 的特征值为 1 和 0. 记特征值 1 的代数重数和几何重数分别为 t_1 和 s_1 , 特征值 0 的代数重数和几何重数分别为 t_2 和 s_2 . 与证法一相同, 可以得到 $r(1I - A) + r(0I - A) = n$. 由于 $r(1I - A) = n - s_1, r(0I - A) = n - s_2$, 所以 $s_1 + s_2 = n$, 由于 $n = s_1 + s_2 \leq t_1 + t_2 = n$, 故 $s_1 = t_1, s_2 = t_2$. 因而 A 可对角化且对角元素为 1, 0.

证法六 设 $r(A) = r$. 存在可逆矩阵 P , 使得 $A = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$. 因为 $A^2 = A$, 所以

$$P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$$

$$\text{故 } \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

记 $QP = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$, 则由上式得到 $C_1 = I_r$. 故 $Q = \begin{pmatrix} I_r & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} P^{-1}$. 所以

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} I_r & C_2 \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} I_r & -C_2 \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & C_2 \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

令 $R = P \begin{pmatrix} I_r & -C_2 \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix}$, 则有 $A = R \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} R^{-1}$, 即 A 相似于对角矩阵 $\text{diag}(I_r, O_{n-r})$.

14. 必要性. 设 $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ 为 A 的全部特征值 (重根按重数算).

A 可对角化.

$$\iff A \sim \Lambda = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}).$$

$\iff$ 存在可逆矩阵 $P = (X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$, 其中 $X_i, i = 0, 1, \dots, n-1$, 为矩阵 A 的属于特征值 λ_i 的特征向量, 使得 $A = P \Lambda P^{-1} = P \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) P^{-1}$.

$\iff$ 存在可逆矩阵 $P = (X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$, 其中 $X_i, i = 0, 1, \dots, n-1$, 为矩阵 A 的属于特征值 λ_i 的特征向量, 使得

$$(A - \lambda_0 I) = P \Lambda P^{-1} - \lambda_0 P P^{-1} = P (\Lambda - \lambda_0 I) P^{-1}$$

$$= P \text{diag}(0, \lambda_1 - \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} - \lambda_0) P^{-1}.$$

$\implies$ 存在可逆矩阵 $P = (X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$, 使得

$$(A - \lambda_0 I)^2 = P \operatorname{diag} \left(0, (\lambda_1 - \lambda_0)^2, \dots, (\lambda_{n-1} - \lambda_0)^2 \right) P^{-1}.$$

由于 $\lambda_i - \lambda_0 = 0$ 的充要条件是 $(\lambda_i - \lambda_0)^2 = 0$, 所以

$$\begin{aligned} r \left((A - \lambda_0 I)^2 \right) &= r \left(P \operatorname{diag} \left(0, (\lambda_1 - \lambda_0)^2, \dots, (\lambda_{n-1} - \lambda_0)^2 \right) P^{-1} \right) \\ &= r \left(\operatorname{diag} \left(0, (\lambda_1 - \lambda_0)^2, \dots, (\lambda_{n-1} - \lambda_0)^2 \right) \right) \\ &= r \left(\operatorname{diag} (0, \lambda_1 - \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} - \lambda_0) \right) \\ &= r \left(P \operatorname{diag} (0, \lambda_1 - \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} - \lambda_0) P^{-1} \right) \\ &= r (A - \lambda_0 I). \end{aligned}$$

充分性. 设 A 是线性变换 $\mathcal{A}$ 在复数域上某个 n 维线性空间 V 的某组基下的矩阵.

对 A 的每一特征值 λ_0 , $r(A - \lambda_0 I)^2 = r(A - \lambda_0 I)$.

$\implies r(A - \lambda_0 I) = r(A - \lambda_0 I)^2 = \dots = r(A - \lambda_0 I)^{r_0}$, 其中 r_0 为特征值 λ_0 的代数重数.

$\implies$ 对 A 的每一特征值 λ_0 , $V_{\lambda_0} = W_{\lambda_0}$, 即属于 λ_0 的特征子空间和根子空间相等.

$\implies$ 对 A 的每一特征值 λ_0 , λ_0 的几何重数等于代数重数.

$\implies A$ 可对角化. □

15. (1) 设 $(p(x), f(x)) = d(x)$, 则 $d(x) \mid p(x)$. 由于 $p(x)$ 不可约, 则 $d(x) = 1$, 或 $d(x) = \frac{1}{c}p(x)$ (c 为 $p(x)$ 的首项系数). 因此 $(p(x), f(x)) = 1$, 或 $p(x) \mid f(x)$.

(2) 设 $(F_1(x), \dots, F_s(x)) \neq 1$, 则存在不可约多项式 $p(x)$ 使得 $p(x) \mid F_i(x)$. 于是 $p(x) \mid f_1(x) \cdots f_{i-1}(x)f_{i+1}(x) \cdots f_s(x)$. 因此存在 $j \neq i$, $p(x) \mid f_j(x)$. 再由 $p(x) \mid F_j(x)$. 于是存在 $k \neq j$, $p(x) \mid f_k(x)$, 与 $(f_j(x), f_k(x)) = 1$ 矛盾, 因此 $(F_1(x), \dots, F_s(x)) = 1$.