

安徽大学 2023-2024 学年第二学期
《高等代数（下）》模拟期中测试试卷

（闭卷 时间 120 分钟）

姓名 _____ 学号 _____

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

得分	
----	--

1. 判断下列多项式是否有重根 (无重根填写无, 有则写出重根以及对应的重数): $f(x) = x^4 + 2x^3 - 15x^2 + 4x + 20$: _____, $g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$: _____.

2. 设 A, B 是 3 阶矩阵, B 相似于 A , 且 $\det(A + I) = \det(2A + I) = \det(3A + I) = 0$, 则 $\det(6B^* + I) =$ _____.

3. 设 $(1, 1, -1)^T$ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 5 & -3 & b \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量, 则 a, b 的值分别是 _____.

4. 4 阶方阵 A 的特征多项式和极小多项式都等于 $m(\lambda)$, 写出 A 的行列式因子 _____.

5. 求多项式 $f(x) = 3x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x - 2$ 的有理根 _____.

二、简答题 (每小题 5 分, 共 15 分, 先判断对错, 再简要说明理由)

得分	
----	--

6. 设 $\mathbb{F}$ 是数域, $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 且 $\deg(f(x)) = n \geq 1$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的微商. 则 $f'(x) \mid f(x)$ 的充要条件是 $f(x)$ 有 n 重根.

7. 设 $A(\lambda), B(\lambda)$ 都是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶 λ -矩阵. 则 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价的充要条件为 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 有相同的初等因子组.

8. 一个 n 阶 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 可逆的充要条件是 $\text{rank } A(\lambda) = n$.

三、解答题 (每小题 10 分, 共 70 分)

得分	
----	--

9. 设复矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. 求 A 的 Jordan 标准形.

10. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 判断矩阵 A 与 C , B 与 C , A 与 B 是否相似.

11. 证明如下映射是线性映射, 并求其值域与核: $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \rightarrow (x+y, x-y, 2x+3y)$.

12. 已知 $\mathbb{C}$ 上三阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$, 给出 A 可对角化的充要条件.

13. 设 $\mathcal{A}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的非零非恒等的线性变换, 且满足 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$. 求证: $V = V_0 \oplus V_1$, 其中 V_0 是 $\mathcal{A}$ 的属于特征值 0 的特征子空间, V_1 是 $\mathcal{A}$ 的属于特征值 1 的特征子空间.

姓名 _____ 学号 _____

14. 设 A 是 n 阶复方阵, 证明: A 可对角化的充要条件是对 A 的任一特征值 λ_0 , 都有 $\text{r}(A - \lambda_0 I)^2 = \text{r}(A - \lambda_0 I)$, 其中 I 为 n 阶单位阵.

15. (1) 设 $p(x), f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 且 $p(x)$ 不可约, 证明 $p(x) \mid f(x)$, 或 $(p(x), f(x)) = 1$.
(2) 已知多项式 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)$ 两两互素, 记

$$F_i(x) = f_1(x) \cdots f_{i-1}(x) f_{i+1}(x) \cdots f_s(x) (i = 1, 2, \dots, s),$$

证明 $(F_1(x), F_2(x), \dots, F_s(x)) = 1$.