

安徽大学 2023—2024 学年第一学期

《高等代数（上）》 考试试卷（A 卷）

（闭卷 满分 100 分 时间 120 分钟）

考场登记表序号_____

题号	一	二	三、1	三、2	三、3	三、4	总分
得分							
阅卷人							

一、填空题（每空 4 分，共 20 分）填写不完整或结果没有化简均不得分。

得分

1. 设 $1, 2, \dots, 6, 7$ 的排列 $621i5j7$ 是偶排列。则 $i =$ _____。

2. 在方阵 $\begin{pmatrix} y+1 & 2 & 1 & 2 \\ y-1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2y & 1 \\ 9 & 4 & 0 & y \end{pmatrix}$ 的行列式中， y^3 的系数为_____。

3. 求方阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆方阵为_____。

4. 考虑 $\mathbb{R}^4$ 中由向量组 $(1, -1, 1, -1), (3, 3, -1, 1), (3, 0, 1, -1), (1, 2, -1, 1)$ 生成的线性子空间 U ，则 U 的维数为_____。

5. 求方阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{2023} =$ _____。

二、简答题（每问 5 分，共 20 分）判断叙述是否正确并简要说明理由。

得分

1. 设 2 阶实方阵 A 和 B 满足 $A^2 = B^2$ ，则总有 $(A + B)(A - B) = 0$ 。

2. 设 3 阶非零实方阵 X 满足 $X = X^*$ ，其中 X^* 为伴随方阵。则总有 $|X| = 1$ 。

3. 考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的线性子空间 X, Y 满足其并 $X \cup Y$ 也是线性子空间。则有 $X \subseteq Y$ 或 $Y \subseteq X$ 。

4. 设 n 阶方阵 A 可逆。则其转置 A^T 也是可逆的。

三、解答题（每小题 15 分，共 60 分）需给出详细解答过程。禁止使用课本习题结论或其他参考书中的结论。

1. 解矩阵方程 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -2 & 11 & 7 \end{pmatrix}$ 。

得分

2. 考虑 n 个非零实数 $b_1, b_2, \dots, b_n$ ，以及 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ ，满足

得分

$$a_{ij} = \begin{cases} b_i, & j = i + 1 \\ b_n, & i = n, j = 1. \\ 0, & \text{其它情况} \end{cases}$$

试计算：行列式 $|A|$ 以及方阵 A^n 。

3. 设 A 和 B 均为 n 阶可逆方阵。证明： $A - B$ 可逆当且仅当 $A^{-1} - B^{-1}$ 可逆。

得分	
----	--

4. 考虑全体2阶实方阵组成的线性空间 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 。

得分	
----	--

令 $U = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A \text{ 对称方阵}\}$, $V = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A \text{ 反对称方阵}\}$ 。

试证明： U 和 V 均为 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 的线性子空间，且满足 $\mathbb{R}^{2 \times 2} = U \oplus V$ 。