

24-25-1-01

- 记 $P_3(x)$ 表示实数域上次数不超过 3 的多项式全体按多项式加法和数乘运算构成的实线性空间, 则基 $\{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2)\}$ 到自然基 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 的过渡矩阵为: ____.

24-25-1-01

- 记 $P_3(x)$ 表示实数域上次数不超过 3 的多项式全体按多项式加法和数乘运算构成的实线性空间, 则基 $\{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2)\}$ 到自然基 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 的过渡矩阵为: ____.
- 设从自然基 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 到基 $\{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2)\}$ 的过渡矩阵为 T . 将基 $\{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2)\}$ 中的元素用自然基 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 表示:

$$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$x(x-1) = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$x(x-1)(x-2) = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + (-3) \cdot x^2 + 1 \cdot x^3$$

24-25-1-01(续)

• 因此, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

24-25-1-01(续)

- 因此, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 从而, 从基 $\{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2)\}$ 到自然基 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 的过渡矩阵为
- $$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

24-25-1-02

- 记 A_{ij} 为行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ 的 (i, j) 位置代数余子式. 则 $2A_{14} - A_{24} - 6A_{34} + 4A_{44}$ 的值为: ____.

24-25-1-02

- 记 A_{ij} 为行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ 的 (i, j) 位置代数余子式. 则 $2A_{14} - A_{24} - 6A_{34} + 4A_{44}$ 的值为: ____.
- 解析. 根据行列式按列展开的性质, 设原行列式为 D , 则 $2A_{14} - A_{24} - 6A_{34} + 4A_{44}$ 等于将原行列式的第四列元素替换为 $(2, -1, -6, 4)$ 后的行列式 D' 的值, 即:

24-25-1-02

记 A_{ij} 为行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ 的 (i, j) 位置

代数余子式. 则 $2A_{14} - A_{24} - 6A_{34} + 4A_{44}$ 的值为: ____.

解析. 根据行列式按列展开的性质, 设原行列式为 D , 则 $2A_{14} - A_{24} - 6A_{34} + 4A_{44}$ 等于将原行列式的第四列元素替换为 $(2, -1, -6, 4)$ 后的行列式 D' 的值, 即:

$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -6 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{vmatrix} = 24.$

24-25-1-03

方阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 的逆方阵为: ____.

24-25-1-03

方阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 的逆方阵为: ____.

解析.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

24-25-1-03(续)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

24-25-1-03(续)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

故, 矩阵 A 的逆矩阵为: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ □

24-25-1-04

已知 $\mathbb{R}^4$ 中由向量组 $(0, 1, 2, 3), (1, 2, 3, 4), (3, 2, 5, 4), (4, 3, 6, k)$ 生成的线性子空间维数为 3, 则 k 的值为: ____.

24-25-1-04

- 已知 $\mathbb{R}^4$ 中由向量组 $(0, 1, 2, 3), (1, 2, 3, 4), (3, 2, 5, 4), (4, 3, 6, k)$ 生成的线性子空间维数为 3, 则 k 的值为: ____.
- 解析.** 已知向量组 $\alpha_1 = (0, 1, 2, 3), \alpha_2 = (1, 2, 3, 4), \alpha_3 = (3, 2, 5, 4), \alpha_4 = (4, 3, 6, k)$, 将这些向量作为列向量构成矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 4 & k \end{pmatrix}$, 对 A 进行初等行变换化为行简化阶梯形.

24-25-1-04(续)

•

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & k-5 \end{pmatrix}$$

因为生成的线性子空间维数为 3, 所以 $k-5=0$, 即 $k=5$. □

24-25-1-05

- 5. 求方阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2024} =$ ____.

24-25-1-05

- 5. 求方阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2024} =$ ____.
- 解析.** 首先, 我们计算 A 的前几次幂, 观察规律:
当 $n=1$ 时, $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

24-25-1-05

- 5. 求方阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2024} =$ ____.
- 解析.** 首先, 我们计算 A 的前几次幂, 观察规律:
当 $n=1$ 时, $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
- 当 $n=2$ 时,
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

24-25-1-05(续)

- 当 $n=3$ 时,
$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
- 当 $n=4$ 时,
$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

24-25-1-05(续)

• 当 $n = 3$ 时,

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

当 $n = 4$ 时,

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

• 当 $n = 5$ 时,

$$A^5 = A^4 A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

24-25-1-05(续)

• 当 $n = 6$ 时,

$$A^6 = A^5 A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

24-25-1-05(续)

• 当 $n = 6$ 时,

$$A^6 = A^5 A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

• 显然, 对于 $n \geq 1$, 矩阵 A^n 具有周期性, 周期为 6, 即 $A^n = A^r$, 其中 $r = n \bmod 6$.

24-25-1-05(续)

• 当 $n = 6$ 时,

$$A^6 = A^5 A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

• 显然, 对于 $n \geq 1$, 矩阵 A^n 具有周期性, 周期为 6, 即 $A^n = A^r$, 其中 $r = n \bmod 6$.

• 因为 $2024 \bmod 6 = 2$, 所以
$$A^{2024} = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$
 □

24-25-1-06

• 设非零方阵 A 和 B 满足 $AB = 0$. 则 A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.

24-25-1-06

• 设非零方阵 A 和 B 满足 $AB = 0$. 则 A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.
• 解答. 正确.

24-25-1-06

- 设非零方阵 A 和 B 满足 $AB = 0$. 则 A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.
- **解答.** 正确.
- **理由如下:** 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times p$ 矩阵.

24-25-1-06

- 设非零方阵 A 和 B 满足 $AB = 0$. 则 A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.
- **解答.** 正确.
- **理由如下:** 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times p$ 矩阵.
- 因为 $AB = 0$, 根据矩阵乘法 AB 的每一列都是 A 的列向量的线性组合, 且 $AB = 0$, 所以 B 的列向量都在 A 的零空间中.

24-25-1-06

- 设非零方阵 A 和 B 满足 $AB = 0$. 则 A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.
- **解答.** 正确.
- **理由如下:** 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times p$ 矩阵.
- 因为 $AB = 0$, 根据矩阵乘法 AB 的每一列都是 A 的列向量的线性组合, 且 $AB = 0$, 所以 B 的列向量都在 A 的零空间中.
- 由于 $B \neq 0$, 所以 A 的零空间中存在非零向量, 根据线性相关性的判定, A 的列向量组线性相关.

24-25-1-06

- 设非零方阵 A 和 B 满足 $AB = 0$. 则 A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.
- **解答.** 正确.
- **理由如下:** 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times p$ 矩阵.
- 因为 $AB = 0$, 根据矩阵乘法 AB 的每一列都是 A 的列向量的线性组合, 且 $AB = 0$, 所以 B 的列向量都在 A 的零空间中.
- 由于 $B \neq 0$, 所以 A 的零空间中存在非零向量, 根据线性相关性的判定, A 的列向量组线性相关.
- 因为 $AB = 0$, 所以 $B^T A^T = 0$. 于是 B^T 的列向量组线性相关, 即 B 的行向量组线性相关.

24-25-1-07

- 方阵 A 的所有对角元的和称为 A 的迹, 记作 $\text{tr}(A)$. 则对任意的方阵 A 和 B , 均有 $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

24-25-1-07

- 方阵 A 的所有对角元的和称为 A 的迹, 记作 $\text{tr}(A)$. 则对任意的方阵 A 和 B , 均有 $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
- **解答.** 正确. **理由如下:** 设 $A = (a_{ij})$ 是 $n \times n$ 矩阵, $B = (b_{ij})$ 是 $n \times n$ 矩阵, 那么 $AB = (c_{ij})$, 其中 $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$. 因此, $\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki}$.

24-25-1-07

- 方阵 A 的所有对角元的和称为 A 的迹, 记作 $\text{tr}(A)$. 则对任意的方阵 A 和 B , 均有 $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
- 解答. 正确. 理由如下:** 设 $A = (a_{ij})$ 是 $n \times n$ 矩阵, $B = (b_{ij})$ 是 $n \times n$ 矩阵, 那么 $AB = (c_{ij})$, 其中 $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$. 因此, $\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki}$.
- 而 $BA = (d_{ij})$, 其中 $d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj}$. 于是 $\text{tr}(BA) = \sum_{i=1}^n d_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ki} b_{ik}$.

24-25-1-07

- 方阵 A 的所有对角元的和称为 A 的迹, 记作 $\text{tr}(A)$. 则对任意的方阵 A 和 B , 均有 $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
- 解答. 正确. 理由如下:** 设 $A = (a_{ij})$ 是 $n \times n$ 矩阵, $B = (b_{ij})$ 是 $n \times n$ 矩阵, 那么 $AB = (c_{ij})$, 其中 $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$. 因此, $\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki}$.
- 而 $BA = (d_{ij})$, 其中 $d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj}$. 于是 $\text{tr}(BA) = \sum_{i=1}^n d_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ki} b_{ik}$.
- 通过交换求和指标可得 $\text{tr}(AB) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ik} = \text{tr}(BA)$. □

24-25-1-08

- 存在 n 阶方阵 A , 满足 $A^2 = I$, 且 $\text{rank}(A + I) + \text{rank}(A - I) > n$.

24-25-1-08

- 存在 n 阶方阵 A , 满足 $A^2 = I$, 且 $\text{rank}(A + I) + \text{rank}(A - I) > n$.
- 解答. 错误.**

24-25-1-08

- 存在 n 阶方阵 A , 满足 $A^2 = I$, 且 $\text{rank}(A + I) + \text{rank}(A - I) > n$.
- 解答. 错误.**
- 理由如下:** 因为 $A^2 = I$, 所以 $(A + I)(A - I) = A^2 - I = O$.

24-25-1-08

- 存在 n 阶方阵 A , 满足 $A^2 = I$, 且 $\text{rank}(A + I) + \text{rank}(A - I) > n$.
- 解答. 错误.**
- 理由如下:** 因为 $A^2 = I$, 所以 $(A + I)(A - I) = A^2 - I = O$.
- 根据秩不等式 $\text{rank}(A - I) + \text{rank}(A + I) - n \leq \text{rank}((A + I)(A - I)) = \text{rank}(O) = 0$,

24-25-1-08

- 存在 n 阶方阵 A , 满足 $A^2 = I$, 且 $\text{rank}(A + I) + \text{rank}(A - I) > n$.
- 解答. 错误.
- 理由如下: 因为 $A^2 = I$, 所以 $(A + I)(A - I) = A^2 - I = O$.
- 根据秩不等式 $\text{rank}(A - I) + \text{rank}(A + I) - n \leq \text{rank}((A + I)(A - I)) = \text{rank}(O) = 0$,
- 即 $\text{rank}(A + I) + \text{rank}(A - I) \leq n$.

24-25-1-08

- 存在 n 阶方阵 A , 满足 $A^2 = I$, 且 $\text{rank}(A + I) + \text{rank}(A - I) > n$.
- 解答. 错误.
- 理由如下: 因为 $A^2 = I$, 所以 $(A + I)(A - I) = A^2 - I = O$.
- 根据秩不等式 $\text{rank}(A - I) + \text{rank}(A + I) - n \leq \text{rank}((A + I)(A - I)) = \text{rank}(O) = 0$,
- 即 $\text{rank}(A + I) + \text{rank}(A - I) \leq n$.
- 因此, 不存在这样的 n 阶方阵 A 满足 $\text{rank}(A + I) + \text{rank}(A - I) > n$. □

24-25-1-09

- 设 A 为非零实方阵, A^* 为 A 的伴随方阵, 若 $A^T = A^*$, 则 A 可逆.

24-25-1-09

- 设 A 为非零实方阵, A^* 为 A 的伴随方阵, 若 $A^T = A^*$, 则 A 可逆.
- 解答. 正确.

24-25-1-09

- 设 A 为非零实方阵, A^* 为 A 的伴随方阵, 若 $A^T = A^*$, 则 A 可逆.
- 解答. 正确.
- 理由如下: 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$. 因 $A^* = A^T$, 故 $a_{ij} = A_{ij}(i, j = 1, 2, \dots, n)$.

24-25-1-09

- 设 A 为非零实方阵, A^* 为 A 的伴随方阵, 若 $A^T = A^*$, 则 A 可逆.
- 解答. 正确.
- 理由如下: 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$. 因 $A^* = A^T$, 故 $a_{ij} = A_{ij}(i, j = 1, 2, \dots, n)$.
- 因 $A \neq 0$, 不妨设 $a_{11} \neq 0$. 于是 $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + \dots + a_{1n}^2 > 0$.

24-25-1-09

- 设 A 为非零实方阵, A^* 为 A 的伴随方阵, 若 $A^T = A^*$, 则 A 可逆.
- 解答. 正确.
- 理由如下: 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$. 因 $A^* = A^T$, 故 $a_{ij} = A_{ij}(i, j = 1, 2, \dots, n)$.
- 因 $A \neq 0$, 不妨设 $a_{11} \neq 0$. 于是
$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$$
$$= a_{11}^2 + a_{12}^2 + \dots + a_{1n}^2 > 0.$$
- 故 A 可逆. □

24-25-1-10(2.1 节课后题 8)

- 存在 3 阶实方阵 A 和 B 满足 $AB - BA = I_3$.

24-25-1-10(2.1 节课后题 8)

- 存在 3 阶实方阵 A 和 B 满足 $AB - BA = I_3$.
- 解答. 错误.

24-25-1-10(2.1 节课后题 8)

- 存在 3 阶实方阵 A 和 B 满足 $AB - BA = I_3$.
- 解答. 错误.
- 理由如下: 考虑矩阵的迹, 对于任意两个 n 阶方阵 A 和 B ,
$$\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA),$$
由24-25-1-07可知 $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, 所以
$$\text{tr}(AB - BA) = 0.$$

24-25-1-10(2.1 节课后题 8)

- 存在 3 阶实方阵 A 和 B 满足 $AB - BA = I_3$.
- 解答. 错误.
- 理由如下: 考虑矩阵的迹, 对于任意两个 n 阶方阵 A 和 B ,
$$\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA),$$
由24-25-1-07可知 $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, 所以
$$\text{tr}(AB - BA) = 0.$$
- 而 $\text{tr}(I_3) = 3$, 所以不存在 3 阶实方阵 A 和 B 满足 $AB - BA = I_3$. □

24-25-1-11

- 设 A 和 B 为复方阵, 则
$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A - \sqrt{-1}B| \cdot |A + \sqrt{-1}B|.$$

24-25-1-11

- 设 A 和 B 为复方阵, 则

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A - \sqrt{-1}B| \cdot |A + \sqrt{-1}B|.$$

- 解答. 正确.

24-25-1-11

- 设 A 和 B 为复方阵, 则

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A - \sqrt{-1}B| \cdot |A + \sqrt{-1}B|.$$

- 解答. 正确.

- 理由如下:

$$\begin{pmatrix} I & O \\ -\sqrt{-1}I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ \sqrt{-1}I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - \sqrt{-1}B & -B \\ O & A + \sqrt{-1}B \end{pmatrix}. \quad \square$$

24-25-1-12

- 给定方程组 $\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1, \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1. \end{cases}$

(1) 问 λ 分别取何值时, 方程组无解? 有唯一解? 有无穷多解?

(2) 在方程组有无穷多解时, 给出其通解.

24-25-1-12

- 给定方程组 $\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1, \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1. \end{cases}$

(1) 问 λ 分别取何值时, 方程组无解? 有唯一解? 有无穷多解?

(2) 在方程组有无穷多解时, 给出其通解.

- 解法 1.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(5\lambda + 4).$$

24-25-1-12

- 给定方程组 $\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1, \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1. \end{cases}$

(1) 问 λ 分别取何值时, 方程组无解? 有唯一解? 有无穷多解?

(2) 在方程组有无穷多解时, 给出其通解.

- 解法 1.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(5\lambda + 4).$$

- 当 $\lambda = -\frac{4}{5}$ 时, $r(A) = 2$, $r(\bar{A}) = 3$, 无解.

24-25-1-12

- 给定方程组 $\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1, \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1. \end{cases}$

(1) 问 λ 分别取何值时, 方程组无解? 有唯一解? 有无穷多解?

(2) 在方程组有无穷多解时, 给出其通解.

- 解法 1.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(5\lambda + 4).$$

- 当 $\lambda = -\frac{4}{5}$ 时, $r(A) = 2$, $r(\bar{A}) = 3$, 无解.

- 当 $\lambda = 1$ 时, $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3$, 方程组有无穷多解.

24-25-12(续)

- 当方程组有无穷多解时, 即 $\lambda = 1$ 时,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & -1 & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

24-25-12(续)

- 当方程组有无穷多解时, 即 $\lambda = 1$ 时,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & -1 & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 由此便得通解

$$\begin{cases} x_1 = 0x_3 + 1, \\ x_2 = x_3 - 1, \end{cases} \quad (x_3 \text{ 可取任意取值})$$

24-25-12(续)

- 当方程组有无穷多解时, 即 $\lambda = 1$ 时,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & -1 & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 由此便得通解

$$\begin{cases} x_1 = 0x_3 + 1, \\ x_2 = x_3 - 1, \end{cases} \quad (x_3 \text{ 可取任意取值})$$

- 即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{F}).$

24-25-1-12 解法 2

- (1) 对增广矩阵 $\bar{A}$ 做初等行变换, 有

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & -1 & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & \lambda & -1 & 1 \\ \lambda + 2 & \lambda - 1 & 0 & 3 \\ 5\lambda + 4 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

24-25-1-12 解法 2

- (1) 对增广矩阵 $\bar{A}$ 做初等行变换, 有

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & -1 & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & \lambda & -1 & 1 \\ \lambda + 2 & \lambda - 1 & 0 & 3 \\ 5\lambda + 4 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

- 则 (i) 当 $\lambda = -\frac{4}{5}$ 时, $r(A) = 2$, $r(\bar{A}) = 3$, 方程组无解.

(ii) 当 $\lambda \neq -\frac{4}{5}$ 且 $\lambda \neq 1$ 时,

$r(A) = r(\bar{A}) = 3$, 方程组有唯一解.

(iii) 当 $\lambda = 1$ 时, $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3$, 方程组有无穷多解.

24-25-1-12 解法 2

- (2) 当方程组有无穷多解时, 即 $\lambda = 1$ 时,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & -1 & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

24-25-1-12 解法 2

- (2) 当方程组有无穷多解时, 即 $\lambda = 1$ 时,

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & -1 & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 由此便得通解 $\begin{cases} x_1 = 0x_3 + 1, \\ x_2 = x_3 - 1, \end{cases}$ (x_3 可取任意取值)

24-25-1-12 解法 2

- (2) 当方程组有无穷多解时, 即 $\lambda = 1$ 时,

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & -1 & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 由此便得通解 $\begin{cases} x_1 = 0x_3 + 1, \\ x_2 = x_3 - 1, \end{cases}$ (x_3 可取任意取值)
- 即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{F}).$

24-25-1-13

- 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, 其中 $m, n \geq 1$ 为正整数.
- (1) 证明 $\det(I - AB) = \det(I - BA)$.
 - (2) 设 $I - AB$ 可逆. 试利用 $I - AB$ 的逆来表示 $I - BA$ 逆.
 - (3) 考察方阵

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

求 $\det(X)$ 以及 X^{-1} .

24-25-1-13 (1)

- 解答: 考虑分块矩阵 $M = \begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix}$, 通过两种不同的方式计算其行列式. 一方面, 对 M 进行初等变换, 将第一行左乘 $-B$ 加到第二行, 可得 $\det(M) = \det \begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n - BA \end{pmatrix} = \det(I_n - BA).$

24-25-1-13 (1)

- 解答: 考虑分块矩阵 $M = \begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix}$, 通过两种不同的方式计算其行列式. 一方面, 对 M 进行初等变换, 将第一行左乘 $-B$ 加到第二行, 可得 $\det(M) = \det \begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n - BA \end{pmatrix} = \det(I_n - BA).$
 - 另一方面, 将 M 的第一列右乘 $-A$ 加到第二列, 得到 $\det(M) = \det \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n - AB \end{pmatrix} = \det(I_m - AB).$
- 所以 $\det(I - AB) = \det(I - BA)$.

24-25-1-13 (2)

- $\begin{pmatrix} I_m & -A \\ O & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & O \\ -B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m - AB & O \\ O & I_n \end{pmatrix}.$

24-25-1-13 (2)

- $\begin{pmatrix} I_m & -A \\ O & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & O \\ -B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m - AB & O \\ O & I_n \end{pmatrix}.$
- $\begin{pmatrix} I_m & O \\ -B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & -A \\ O & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & O \\ O & I_n - BA \end{pmatrix}.$

24-25-1-13 (2)

- $\begin{pmatrix} I_m & -A \\ O & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & O \\ -B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m - AB & O \\ O & I_n \end{pmatrix}.$
- $\begin{pmatrix} I_m & O \\ -B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & -A \\ O & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & O \\ O & I_n - BA \end{pmatrix}.$
- $\begin{pmatrix} I_m & O \\ O & (I_n - BA)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & -A \\ O & I_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I_m & O \\ -B & I_n \end{pmatrix}^{-1}$

24-25-1-13 (2)

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} I_m & A \\ O & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & O \\ -B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (I_m - AB)^{-1} & O \\ O & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & -A \\ O & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & O \\ B & I_n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} I_m & A \\ O & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & O \\ -B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (I_m - AB)^{-1} & -(I_m - AB)^{-1}A \\ O & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & O \\ B & I_n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} I_m & A \\ O & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (I_m - AB)^{-1} & -(I_m - AB)^{-1}A \\ -B(I_m - AB)^{-1} & I_n + B(I_m - AB)^{-1}A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & O \\ B & I_n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (I_m - AB)^{-1} + AB(I_m - AB)^{-1} & -A(I_n + B(I_m - AB)^{-1}A) \\ -B(I_m - AB)^{-1} & I_n + B(I_m - AB)^{-1}A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & O \\ B & I_n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} I_m & -A(I_n + B(I_m - AB)^{-1}A) \\ O & I_n + B(I_m - AB)^{-1}A \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} I_m & O \\ O & I_n + B(I_m - AB)^{-1}A \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

对比左右两边的右下角分块, 得:

$$(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A.$$

24-25-1-13 (3)

- 令 $B = (1, 2, 3, 4)'$, $A = -\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$, 则 $X = 2(I_4 - BA)$.

24-25-1-13 (3)

- 令 $B = (1, 2, 3, 4)'$, $A = -\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$, 则 $X = 2(I_4 - BA)$.
- 由 (1) 可知 $\det(X) = \det(2(I_4 - BA)) = 2^4 \det(I_4 - BA) = 2^4 \det(I_1 - AB) = 96$.

24-25-1-13 (3)

- 令 $B = (1, 2, 3, 4)'$, $A = -\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$, 则 $X = 2(I_4 - BA)$.
- 由 (1) 可知 $\det(X) = \det(2(I_4 - BA)) = 2^4 \det(I_4 - BA) = 2^4 \det(I_1 - AB) = 96$.
- $X^{-1} = (2(I_4 - BA))^{-1} = \frac{1}{2}(I_4 - BA)^{-1} = \frac{1}{2}(I_4 + B(I_1 - AB)^{-1}A)$

$$B(I_1 - AB)^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{11}{24} & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{24} \\ -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

24-25-1-14

- 对任意正整数 $n \geq 1$, 记 $V_n = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid XN = NX = 0\}$, 其中 N 为所有分量均为 1 的 n 阶方阵.
(1) 计算 V_n 的维数, 并给出 V_n 的一组基.
(2) 证明对任意 $X \in V_n$, X 的伴随阵所有分量相等.

24-25-1-14

- 对任意正整数 $n \geq 1$, 记 $V_n = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid XN = NX = 0\}$, 其中 N 为所有分量均为 1 的 n 阶方阵.
(1) 计算 V_n 的维数, 并给出 V_n 的一组基.
(2) 证明对任意 $X \in V_n$, X 的伴随阵所有分量相等.
- 解题思路.** 首先理解 V_n 的含义. 集合 V_n 包含所有 $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, s.t. $XN = NX = 0$. 这意味着 X 的每一行和每一列的元素之和为零.

24-25-1-14

- 对任意正整数 $n \geq 1$, 记 $V_n = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid XN = NX = 0\}$, 其中 N 为所有分量均为 1 的 n 阶方阵.
(1) 计算 V_n 的维数, 并给出 V_n 的一组基.
(2) 证明对任意 $X \in V_n$, X 的伴随阵所有分量相等.
- 解题思路.** 首先理解 V_n 的含义. 集合 V_n 包含所有 $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, s.t. $XN = NX = 0$. 这意味着 X 的每一行和每一列的元素之和为零.
- 其次, 确定 X 的形式. “矩阵 X 每一行和每一列的元素之和为零” 等价于说 “ X 中每个元素可以自由选择, 除了最后一行和最后一列, 它们由前 $n-1$ 行和前 $n-1$ 列确定”.

24-25-1-14 (1)

- 解.** (1) 考虑 V_n 的一组矩阵 $B_{ij} = E_{ij} - E_{in} - E_{nj} + E_{nn}$, $1 \leq i, j \leq n-1$.

24-25-1-14 (1)

- 解.** (1) 考虑 V_n 的一组矩阵 $B_{ij} = E_{ij} - E_{in} - E_{nj} + E_{nn}$, $1 \leq i, j \leq n-1$.
- 显然它们线性无关.

24-25-1-14 (1)

- 解.** (1) 考虑 V_n 的一组矩阵 $B_{ij} = E_{ij} - E_{in} - E_{nj} + E_{nn}$, $1 \leq i, j \leq n-1$.
- 显然它们线性无关.
- 另外, 对于任意 $A = (x_{ij}) \in V_n$, $X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} x_{ij} B_{ij}$.

24-25-1-14 (1)

- 解. (1) 考虑 V_n 的一组矩阵
 $B_{ij} = E_{ij} - E_{in} - E_{nj} + E_{nn}, 1 \leq i, j \leq n-1.$
- 显然它们线性无关.
- 另外, 对于任意 $A = (x_{ij}) \in V_n,$
 $X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} x_{ij} B_{ij}.$
- 因此, $B_{ij}, 1 \leq i < j \leq n$ 为 V_n 的一组基. 因而, $\dim V_n = (n-1)^2.$

24-25-1-14 (1)

- 解. (1) 考虑 V_n 的一组矩阵
 $B_{ij} = E_{ij} - E_{in} - E_{nj} + E_{nn}, 1 \leq i, j \leq n-1.$
- 显然它们线性无关.
- 另外, 对于任意 $A = (x_{ij}) \in V_n,$
 $X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} x_{ij} B_{ij}.$
- 因此, $B_{ij}, 1 \leq i < j \leq n$ 为 V_n 的一组基. 因而, $\dim V_n = (n-1)^2.$
- 其他形式的基还有 $B_{ij} = E_{ij} - E_{ik} - E_{kj} + E_{kk},$
其中 k 固定, $k \in \{1, 2, \dots, n\},$
 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ 且 i, j, k 互不相等.

24-25-1-14 (2)

- 证明. 设 $X(i|j)$ 表示通过删除矩阵 X 的第 i 行和第 j 列得到的矩阵. 对于 $X(1|1),$ 将所有列加到第一列. 那么鉴于 X 的行和为零这一事实, $X(1|1)$ 的第一列变成了 $(x_{21}, \dots, x_{n1})'$ 的负值. 因此, 我们得出 $\det X(1|1) = -\det X(1|2).$ 换句话说, x_{11} 和 x_{12} 的代数余子式相等. 类似的论证表明, 对于任意的 i, j, k, x_{ij} 的代数余子式等于 x_{ik} 的代数余子式.

24-25-1-14 (2)

- 证明. 设 $X(i|j)$ 表示通过删除矩阵 X 的第 i 行和第 j 列得到的矩阵. 对于 $X(1|1),$ 将所有列加到第一列. 那么鉴于 X 的行和为零这一事实, $X(1|1)$ 的第一列变成了 $(x_{21}, \dots, x_{n1})'$ 的负值. 因此, 我们得出 $\det X(1|1) = -\det X(1|2).$ 换句话说, x_{11} 和 x_{12} 的代数余子式相等. 类似的论证表明, 对于任意的 i, j, k, x_{ij} 的代数余子式等于 x_{ik} 的代数余子式.
- 再利用 X 的列和为零这一事实, 我们得出对于任意的 i, j, k, x_{ij} 的代数余子式等于 x_{kj} 的代数余子式. 由此可知, X 的任意两个元素的代数余子式相等. □