

安徽大学 2022—2023 学年第一学期

《高等代数上 B》期末考试试卷答案详解

一、填空题

1. 4 ; 2. -160 ; 3. $\begin{pmatrix} \lambda^n & C_n^1 \lambda^{n-1} & C_n^2 \lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & C_n^1 \lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$ 4. $(-1, 2, -2, 2)^T$
5. 1;

二、选择题

6. D 7. D 8. B 9. D 10. B

三、计算题

11. 【解】按第一行展开得：

$$D_n = (a+b) \begin{vmatrix} a+b & a & & \\ b & a+b & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ & & b & a+b \end{vmatrix}_{n-1} - a \begin{vmatrix} b & a & & \\ a+b & \ddots & & \\ \ddots & \ddots & & a \\ & b & a+b \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

故有递推公式

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①表明数列 $D_n - aD_{n-1}$ 是以 b 为公比的等比数列。

因为 $D_1 = a+b, D_2 = \begin{vmatrix} a+b & b \\ a & a+b \end{vmatrix} = a^2 + ab + b^2$, 从而

$$D_2 - aD_1 = b^2, \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

所以

$$D_n - aD_{n-1} = b^n. \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

由于原行列式关于 a, b 对称, 故也有

$$D_n - bD_{n-1} = a^n. \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

③ $\times b -$ ④ $\times a$:

$$(b-a)D_n = b^{n+1} - a^{n+1}, \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

当 $b \neq a$ 时, $D_n = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a}$.

12. 【解】

通过对 $(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \beta_1^T, \beta_2^T, \beta_3^T)$ 竖排作行变换得 $\dim(V_1 + V_2) = 3$, 选取一个列向量的极大线性无关组即可, 如 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2$.

13. 【解】对该线性方程组的增广矩阵 $\bar{A}$ 作初等变换得阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a-4 \end{pmatrix}, \text{ 故有解 } \Leftrightarrow a = 4.$$

当 $a = 4$ 时, 导出组的一个基础解系为 $\xi_1 = (2, 1, 0, 0, 0)^T$, $\xi_2 = (-3, 0, -2, 1, 0)^T$,

原方程组的一个特解 $\gamma_0 = (2, 0, 4, 0, -2)^T$, 故通解为 $\gamma_0 + k_1\xi_1 + k_2\xi_2$, 其中 k_1, k_2 为任意常数.

14. 略.

15. 【证明】若 $V = V_1 \cup V_2$, 其中 V_1, V_2 为 V 的真子空间, $V_1 \subsetneq V, V_2 \subsetneq V, V_1 \neq V_2$.

$\exists \alpha_1 \in V_1 \setminus V_2, \alpha_2 \in V_2 \setminus V_1, \alpha_1 + \alpha_2 \in V = V_1 \cup V_2$. 则 $\alpha_1 + \alpha_2 \in V_1$, 或者 $\alpha_1 + \alpha_2 \in V_2$. 若 $\alpha_1 + \alpha_2 \in V_1$, 则有 $\alpha_2 \in V_1$, 矛盾. 若 $\alpha_1 + \alpha_2 \in V_2$, 则有 $\alpha_1 \in V_2$, 矛盾.

16. 【证明】直接证 $A^TAX = 0$ 与 $AX = 0$ 同解. 若 $AX = 0$, 则 $A^TAX = 0$; 反之, 若

$$A^TAX = 0, \text{ 则 } X^TA^TAX = (AX)^T(AX) = 0. \text{ 记 } AX = Y, \text{ 则 } Y^TY = (y_1 \dots y_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$\sum_{i=1}^n y_i^2 = 0$, 则 $Y = 0$. 故 $A^TAX = 0$ 与 $AX = 0$ 同解. 综上有 $r(A^TA) = r(A)$.