

安徽大学 2024-2025 学年第 1 学期

《高等代数（上）》期末模拟考试试卷

（闭卷 时间 120 分钟）

学号 _____ 姓名 _____

题号	一	二	三	四	五	总分
分数						

一、填空题 (每小题 3 分, 共 12 分).

得分

1. 若行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & x \end{vmatrix} = 0$, 则 $x =$ _____.

2. 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 - \alpha_4, \beta_4 = \alpha_4 - \alpha_1$, 则向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 秩为 _____.

3. 设 A 和 B 是三阶矩阵, $|A| = 2, |B| = 3$, 则 $|A^*B^{-1}| =$ _____.

4. 已知 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 且 $|A| = -2$, 则 $A =$ _____.

二、选择题 (每小题 3 分, 共 9 分).

得分

5. 设 A, B 为 n 阶方阵, 则下列各式中成立的是 ().

(A) $|A + B| = |A| + |B|$; (B) $|AB| = |BA|$; (C) $AB = BA$; (D) $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

6. A 是 $m \times n$ 阶矩阵, 若 $r(A) = r$, 则下列说法正确的是 ().

(A) A 的所有 r 阶子式都不为 0; (B) A 中任意 r 个列向量线性无关;

(C) 若 A 存在 $r + 1$ 阶子式, 则 A 的所有 $r + 1$ 阶子式都为 0; (D) $r \geq \min\{m, n\}$.

7. 设线性方程组 $AX = 0$ 的解都是线性方程组 $BX = 0$ 的解, 则 ().

(A) $r(A) < r(B)$; (B) $r(A) > r(B)$; (C) $r(A) \geq r(B)$; (D) $r(A) \leq r(B)$.

三、简答题 (每问 3 分, 共 9 分, 判断叙述是否正确并简要说明理由).

得分

8. 设 V, W 均为 $\mathbb{F}$ -线性空间, φ 为 V 到 W 上的一个线性映射, 若 $\varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2), \dots, \varphi(\alpha_s)$ 在 W 中线性相关, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 在 V 中线性相关.

9. 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上 $n(\geq 2)$ 阶方阵, A^* 为 A 的伴随矩阵. 则 A 的秩为 $n-1$ 当且仅当 A^* 的秩为 1.

10. 已知 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{s \times n}, B = (b_{ij}) \in \mathbb{F}^{m \times n}, \gamma = (d_1, d_2, \dots, d_s)^T \in \mathbb{F}^{s \times 1}, \delta = (c_1, c_2, \dots, c_m)^T \in \mathbb{F}^{m \times 1}, X \in \mathbb{F}^{n \times 1}, \bar{A} = (A : \gamma), \bar{B} = (B : \delta)$, 则线性方程组 $AX = \gamma$ 与 $BX = \delta$ 同解当且仅当 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 的行向量组等价.

四、计算题 (每小题 10 分, 共 40 分).

得分	
----	--

11. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $AX = 2X + A$, 求 X .

12. 求向量组 $\alpha_1 = (6, 4, 1, -1, 2)$, $\alpha_2 = (1, 0, 2, 3, -4)$, $\alpha_3 = (1, 4, -9, -16, 22)$, $\alpha_4 = (7, 1, 0, -1, 3)$ 的秩和全部极大线性无关组.

13. 设 $|A|$ 是 n 阶行列式, $|A|$ 的第 (i, j) 元素 $a_{ij} = \max\{i, j\}$, 求 $|A|$ 的值.

14. 设 $X = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & C \end{pmatrix}$, 且 A^{-1} 、 B^{-1} 存在. 求 X^{-1} .

五、证明题 (每小题 10 分, 共 30 分).

得分	
----	--

15. 设 V_1 、 V_2 分别为齐次线性方程组 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 与 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 的解空间. 证明 $\mathbb{F}^n = V_1 \oplus V_2$.

16. 设 A 是 $n \times n$ 矩阵, 证明: 如果 $A^2 = I$, 那么 $r(A + I) + r(A - I) = n$.

17. 设 φ 为 V 到 W 的线性映射. 证明:

(1) 若 $\dim(V) < \dim(W)$, 则 φ 不可能是满射;

(2) 若 $\dim(V) > \dim(W)$, 则 φ 不可能是单射.