

安徽大学2023-2024学年第一学期

《高等代数（上）》（期中考试）

（闭卷 时间90 分钟）

年级_____ 专业_____ 姓名_____ 学号_____

题号	一	二	三	总分
得分				

一、填空题（每小题5分，共30分）

得分

1. 设排列 $i_1 i_2 \cdots i_{n-1} i_n$ 的逆序数为 k . 求排列 $i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1$ 的逆序数是_____.

2. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 则 $A^n =$ _____.

3. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $B = (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5})$. 设矩阵 $C = AB$, n 为正整数. 则 $C^{2023} =$ _____.

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & a & -1 \\ 4 & 9 & a^2 & 1 \\ 8 & -27 & a^3 & -1 \end{pmatrix}$. 若 A 的秩小于4, 且 $|a| > 2$, 则 $a =$ _____.

5. 设 $A \in \mathbb{F}^{3 \times 3}$, $|A| = 2$, 则 $|(A^*)^*| =$ _____.

6. 设 A 为3阶方阵, 且 $|A| = \frac{1}{2}$, 则 $|(3A)^{-1} - 2A^*| =$ _____.

二、计算题(每小题10分, 共30分)

得分	
----	--

7. 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x \\ x & 1 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

8. 讨论 a, b 取何值时, 下列方程组有无穷多解、有唯一解、无解? 当方程组有解时, 给出解的表达式.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - ax_3 = b. \end{cases}$$

9. 设矩阵方程为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 求矩阵 X .

三、证明题(前两小题各10分，最后一小题20分，共40分)

得分	
----	--

10. 设数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 它的 (i, j) 元的代数余子式记作 A_{ij} . 把 A 的每个元素都加上同一个数 t , 得到的矩阵记作 $A(t) = (a_{ij} + t)_{n \times n}$. 证明: $|A(t)| = |A| + t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}$.

11. 设 A, B, C, D 都是 n 阶方阵, 且 $AC = CA$, 其中 $|A| \neq 0$. 令 $E = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. 证明: $|E| = |AD - CB|$.

12. 设 A, B 均为 n 阶方阵.

(1) (5分) 证明: $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.

(2) (10分) 证明: $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$.

(3) (5分) 若 $AB = 0$, 证明: $r(A) + r(B) \leq n$.