

参考答案与评分标准

一、填空题（每空 4 分，填写不完整或结果没有化简均不得分）。

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 10 & 55 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, 4, 2, 3, 3, 2.$$

二、简答题（每小题 5 分，判断正误 1 分，说明理由 4 分，可酌情给分）。

1. 错误。例如：\$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\$, \$A^2 = O\$。
2. 错误。例如：\$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\$, \$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\$。\$Ax = 0\$ 的解 \$x = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}\$, \$Bx = 0\$ 的解 \$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}\$。
两个解集不同，\$A\$ 与 \$B\$ 相抵。
3. 正确。由两个向量组等价，得它们有相同的秩 \$r\$。\$\alpha_1, \dots, \alpha_k\$ 是线性相关的 \$\Leftrightarrow r < k \Leftrightarrow \beta_1, \dots, \beta_k\$ 是线性相关的。
4. 错误。例如：设 \$m \neq n\$, \$\varphi\$ 是零映射，则 \$\text{Ker}\varphi\$ 与 \$U\$ 同构，\$V/\text{Im}\varphi\$ 与 \$V\$ 同构。

三、解答题（每小题 16 分，需给出详细解答过程，可酌情给分。禁止使用课本习题结论或其他参考书中的结论。）

1. \$A = \alpha^T \beta - I\$, 其中 \$\alpha = (1, 2, \dots, n)\$, \$\beta = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n})\$。 (3 分)

$$|A| = (-1)^n |I - \alpha^T \beta| = (-1)^n (1 - \beta \alpha^T) = (-1)^n (1 - n) \neq 0. \text{ 故 } A \text{ 可逆。} \quad (5 \text{ 分})$$

$$\text{设 } A^{-1} = \lambda \alpha^T \beta - I, \text{ 由 } A^{-1}A = I \text{ 可解得 } \lambda = \frac{1}{\beta \alpha^T - 1} = \frac{1}{n-1}. \quad (5 \text{ 分})$$

$$\text{故 } A^{-1} = (b_{ij}), \text{ 其中 } b_{ij} = \begin{cases} \frac{2-n}{n-1}, & i = j \\ \frac{i}{j(n-1)}, & i \neq j \end{cases}. \quad (3 \text{ 分})$$

2. \$f_1, f_2, f_3\$ 和 \$g_1, g_2, g_3\$ 在 \$V\$ 的基 \$x^2, x, 1\$ 下的坐标分别构成方阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \text{ 和 } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}. \quad (4 \text{ 分})$$

$$\det(A) = -4, \det(B) = 4. \text{ 故 } f_1, f_2, f_3 \text{ 和 } g_1, g_2, g_3 \text{ 都是 } V \text{ 的基。} \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{从 } f_1, f_2, f_3 \text{ 到 } g_1, g_2, g_3 \text{ 的过渡矩阵 } P = A^{-1}B. \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{经计算 } A^{-1} \text{ 或解线性方程组 } AX = B, \text{ 可得 } P = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 15 \\ -8 & -15 & -24 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}. \quad (5 \text{ 分})$$

3. \$\text{Im}\varphi = \{X \in V | X^T = X\}\$, \$\dim(\text{Im}\varphi) = \frac{n(n+1)}{2}\$. (4 分)

$$\text{Ker}\varphi = \{X \in V | X^T = -X\}, \dim(\text{Ker}\varphi) = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{对于任意 } X \in V, X = Y + Z, \text{ 其中 } Y = \frac{1}{2}(X + X^T) \in \text{Im}\varphi, Z = \frac{1}{2}(X - X^T) \in \text{Ker}\varphi.$$

$$\text{故 } V = \text{Im}\varphi + \text{Ker}\varphi. \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{另外, 若 } X \in \text{Im}\varphi \cap \text{Ker}\varphi, \text{ 则 } X = O. \text{ 综上, } V = \text{Im}\varphi \oplus \text{Ker}\varphi. \quad (4 \text{ 分})$$