

安徽大学 2021—2022 学年第 1 学期

《高等代数（上）》 考试试卷（A 卷）

（闭卷 满分 100 分 时间 120 分钟）

考场登记表序号_____

题号	一	二	三、1	三、2	三、3	总分
得分						
阅卷人						

一、填空题（每空 4 分，共 32 分）填写不完整或结果没有化简均不得分。

得分

1. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $A^{-1} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$, $A^{10} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$, $A^T A = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$,
行列式 $|A^T + A| = \underline{\hspace{2cm}}$, $\text{rank}(A^T - A) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. 设 V 是数域 F 上的线性空间, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in V$ 线性无关, U 是 $\{\alpha_i - \alpha_j | 1 \leq i < j \leq 4\}$ 生成的子空间, W 是 $\{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1\}$ 生成的子空间, 则
 $\dim(U) = \underline{\hspace{2cm}}$, $\dim(W) = \underline{\hspace{2cm}}$, $\dim(U \cap W) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

二、简答题（每问 5 分，共 20 分）判断叙述是否正确并简要说明理由。

得分

设 A, B 都是数域 F 上的 n 阶方阵, U, V 分别是数域 F 上的 m, n 维线性空间。

1. 若 $A^2 = B^2$, 则 $A = B$ 或 $A = -B$ 。
2. 线性方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 的解集相同当且仅当 A 与 B 相抵
3. 若 V 中两个向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 与 $\beta_1, \dots, \beta_k$ 等价, 则 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 是线性相关的当且仅当 $\beta_1, \dots, \beta_k$ 是线性相关的。
4. 设线性映射 $\varphi: U \rightarrow V$, 则商空间 $V/\text{Im}\varphi$ 与 $\text{Ker}\varphi$ 同构。

三、解答题（每小题 16 分，共 48 分）需给出详细解答过程。禁止使用课本习题结论或其他参考书中的结论。

1. 设 n 阶实方阵 $A = (a_{ij})$, 其中 $n \geq 2$, $a_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ i, & i \neq j \end{cases}, 1 \leq i, j \leq n$ 。

得分

证明 A 可逆, 并求 $|A|$ 和 A^{-1} 。

2. 设数域 F 上的线性空间 $V = \{ax^2 + bx + c | a, b, c \in F\}$, x 是未定元。
设 $f_k = (x - k)^2$, $g_k = (x + k)^2$, $k = 1, 2, 3$ 。

得分

证明 f_1, f_2, f_3 和 g_1, g_2, g_3 都是 V 的基, 并求从 f_1, f_2, f_3 到 g_1, g_2, g_3 的过渡矩阵。

3. 设数域 F 上的线性空间 $V = F^{n \times n}$, $V \rightarrow V$ 的线性映射 $\varphi(X) = X + X^T$ 。
求 $\text{Im}\varphi$ 和 $\text{Ker}\varphi$ 的维数, 并证明 $V = \text{Im}\varphi \oplus \text{Ker}\varphi$ 。

得分