

安徽大学 2024-2025 学年第 1 学期《高等代数 (上)》 期中考试参考答案及评分标准

一、填空题 (每小题 3 分, 共 30 分).

1. $a_1 a_2 \cdots a_n$. 2. -1 . 3. $\begin{pmatrix} 1 & (n+1)a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4^{n+1} \end{pmatrix}$. 4. $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 0 & a_2^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 6. 27. 7. $\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$.

8. $a - b$. 9. $a_{jk}E_{il}$. 10. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

二、计算题 (每小题 10 分, 共 30 分).

11. 解. 原线性方程组的增广矩阵为

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & b \end{pmatrix} \cdots \cdots (2 \text{ 分})$$

通过初等行变换, 可得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix} \cdots \cdots (4 \text{ 分})$$

原方程组有解当且仅当 $r(A) = r(\bar{A})$, 即 $a = 0, b = 2$. $\cdots \cdots (6 \text{ 分})$

当 $a = 0, b = 2$ 时, 原方程组可改写为

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 - 5x_5 = -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3 \end{cases}$$

确定 x_1, x_2 为约束变量, x_3, x_4, x_5 为自由未知量, 可得

$$\begin{cases} x_1 = -2 + x_3 + x_4 + 5x_5 \\ x_2 = 3 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 \end{cases} \cdots \cdots (8 \text{ 分})$$

令 $x_3 = k_3, x_4 = k_4, x_5 = k_5$, 可得方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = -2 + k_3 + k_4 + 5k_5, \\ x_2 = 3 - 2k_3 - 2k_4 - 6k_5, \\ x_3 = k_3, \\ x_4 = k_4, \\ x_5 = k_5. \end{cases} \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

12. 解. 记 $D = \text{diag}(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)$, $\alpha = (1, 1, \dots, 1)^T$,

$\beta = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, 则

原行列式 $= |D + \alpha\beta^T|$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \vdots & -\beta^T \\ \alpha & \vdots & D \end{vmatrix}$$

$$= |D| |1 + \beta^T D^{-1} \alpha|$$

$$= \prod_{i=1}^n (x_i - a_i) \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x_i - a_i}\right).$$

$\dots\dots\dots (10 \text{ 分})$

$$13. \left(\begin{array}{c|c|c} & B & \\ \hline A & & C \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} & & 1 & 0 & 0 & \\ & & -1 & 1 & 0 & \\ & & 0 & 2 & 1 & \\ \hline 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 2 & \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初等变换}} \left(\begin{array}{cc|cc|cc} & & 1 & 0 & 0 & \\ & & 0 & 1 & 0 & \\ & & 0 & 0 & 1 & \\ \hline 1 & 0 & -9 & -7 & 2 & \\ 0 & 1 & 5 & 4 & -1 & \end{array} \right) \quad (\text{注: 此处})$$

对 A 做初等行变换, 对 B 做初等列变换, 并对 C 做相应初等变换).

$$\text{故 } X = \begin{pmatrix} -9 & -7 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\dots\dots\dots (10 \text{ 分})$

三、证明题 (每小题 10 分, 共 40 分).

14. 证法 1. 设 A, B 的秩分别为 r_1, r_2 , 则存在非异阵 P_1, Q_1 和非异阵 P_2, Q_2 , 使

$$P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix}, P_2 B Q_2 = \begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix}. \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

于是

$$\begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_1 A Q_1 & P_1 C Q_2 \\ O & P_2 B Q_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I_{r_1} & O & C_{11} & C_{12} \\ O & O & C_{21} & C_{22} \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix}.$$

$\dots\dots\dots (6 \text{ 分})$

在上面的分块矩阵中实施第三类分块初等变换, 用 I_{r_1} 消去同行的矩阵; 用 I_{r_2} 消去同列的矩阵, 再将 C_{22} 对换到第 (2,2) 位置:

$$\begin{pmatrix} I_{r_1} & O & C_{11} & C_{12} \\ O & O & C_{21} & C_{22} \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I_{r_1} & O & O & O \\ O & O & O & C_{22} \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I_{r_1} & O & O & O \\ O & C_{22} & O & O \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix}. \quad (8 \text{ 分})$$

于是, 可得

$$r \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = r(I_{r_1}) + r(C_{22}) + r(I_{r_2}) \geq r_1 + r_2 = r(A) + r(B). \quad (10 \text{ 分})$$

证法 2. 若 A, B 有一秩为 0, 则结论显然. $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

设 $r(A) = r_1 > 0, r(B) = r_2 > 0$, 则矩阵 A, B 一定分别存在 r_1 阶和 r_2 阶不为 0 的子式 M_1 和 M_2 . $\dots\dots\dots (4 \text{ 分})$

因此, 矩阵 $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ 一定存在 $r_1 + r_2$ 阶不为零的子式 $\begin{pmatrix} M_1 & * \\ O & M_2 \end{pmatrix}$. $\dots\dots (8 \text{ 分})$

于是, $r \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq r_1 + r_2 = r(A) + r(B)$. $\dots\dots\dots (10 \text{ 分})$

15. **证明.** “ $\Leftarrow$ ” 是显然的. $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

下证 “ $\Rightarrow$ ”. **方法 1.** 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{n \times n}$. 取 $B = \text{diag}(1, 2, \dots, n)$. 则由 $AB = BA$ 可知

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 2a_{12} & \cdots & na_{1n} \\ a_{21} & 2a_{22} & \cdots & na_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 2a_{n2} & \cdots & na_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & \cdots & 2a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ na_{n1} & na_{n2} & \cdots & na_{nn} \end{pmatrix},$$

即 $ja_{ij} = ia_{ij}$. 因此当 $1 \leq i \neq j \leq n$ 时, $a_{ij} = 0$. 即 $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ 为对角阵. $\dots\dots\dots (6 \text{ 分})$

再取 $B = E_{1j}$, 即 $(1, j)$ 位置元素为 1, 其余元素全为 0 的矩阵, $j = 2, \dots, n$. 则有

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & & & \\ & a_{22} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & a_{nn} & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & & & & & & \\ & a_{22} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & a_{nn} & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{jj} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

由此可知, $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$. 进而 $A = a_{11}I_n$ 为数量阵. $\dots\dots\dots (10 \text{ 分})$

方法 2. 令 E_{ij} (其中 $i \neq j, i, j = 1, \dots, n$) 表示基础矩阵. 假设矩阵 $A = (a_{ij})$ 和 E_{ij} 可交换, 即 $E_{ij}A = AE_{ij}$.

注意到, $E_{ij}A$ 是将 A 的第 j 行元素放到第 i 行, 而其他元素都是零的 n 阶矩阵; 而

AE_{ij} 则是将 A 的第 i 列元素放到第 j 列, 其他元素都是零的 n 阶矩阵. 由于 $E_{ij}A = AE_{ij}$, 我们可以得出以下结论:

1. $a_{ji} = 0$ (当 $i \neq j$ 时), 因为 $E_{ij}A$ 的第 i 行第 i 列元素为 a_{ji} , 而 AE_{ij} 的该位置元素为 0. (5 分)
2. $a_{ii} = a_{jj}$ (对所有 $i \neq j$), 因为 $E_{ij}A$ 的第 i 行第 j 列为 a_{jj} , 而 AE_{ij} 的该位置元素为 a_{ii} .

由上述两点可知, 矩阵 A 的非对角线元素全为零, 且对角线元素都相等. 因此, A 必然是数量矩阵 kI_n 的形式, 其中 k 是某个常数, I_n 是 n 阶单位矩阵. (10 分)

16. 证明. A 可逆 $\Rightarrow |A| = a_{11} \cdots a_{nn} \neq 0 \Rightarrow a_{11}, \dots, a_{nn} \neq 0$ (2 分)

设 $A^{-1} = (b_{ij})$ 为 A 的逆矩阵, 则 $AA^{-1} = I_n$, 即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = I_n.$$

依次考虑上述矩阵等式两边 $(n, 1), (n, 2), \dots, (n, n-1), (n, n)$ 位置的元素相等, 得

$$a_{nn}b_{n1} = a_{nn}b_{n2} = \cdots = a_{nn}b_{n,n-1} = 0, a_{nn}b_{nn} = 1$$

$$\Rightarrow b_{n1} = b_{n2} = \cdots = b_{n,n-1} = 0, b_{nn} = a_{nn}^{-1}.$$

..... (5 分)

在上述信息的基础上, 依次考虑矩阵等式两边 $(n-1, 1), (n-1, 2), \dots, (n-1, n-2), (n-1, n-1)$ 位置的元素相等, 得

$$a_{n-1,n-1}b_{n-1,1} = a_{n-1,n-1}b_{n-1,2} = \cdots = a_{n-1,n-1}b_{n-1,n-2} = 0, a_{n-1,n-1}b_{n-1,n-1} = 1$$

$$\Rightarrow b_{n-1,1} = b_{n-1,2} = \cdots = b_{n-1,n-2} = 0, b_{n-1,n-1} = a_{n-1,n-1}^{-1}.$$

..... (7 分)

从下往上依次进行下去, 我们得到

$$b_{k,k} = \cdots = b_{k,k-1} = 0, b_{k,k} = a_{k,k}^{-1}, k = n, n-1, \dots, 2, 1. \dots (10 分)$$

17. 证明. (1) 因为 $r(A) = r$, 所以存在可逆矩阵 P, Q , 使得

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q = P \begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix} (I_r \ O) Q.$$

令 $B = P \begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}, C = (I_r \ O) Q$, 则 $r(B) = r(C) = r$, 且 $A = BC$ (5 分)

(2) 因为 A 列满秩且可经初等行变换化成等价标准形, 所以存在 m 阶可逆矩阵 P_1 ,

$$\text{使得 } P_1 A = \begin{pmatrix} I_n & \cdots \\ O_{(m-n) \times n} \end{pmatrix}. \text{ 取 } P_1 \text{ 的前 } n \text{ 行构成的子矩阵为 } P, \text{ 则 } PA = I_n.$$

..... (8 分)

显然, $n = r(I_n) \leq r(P) \leq n$. 于是, $r(P) = n$, 即 P 为行满秩矩阵. (10 分)