

安徽大学2023-2024学年第一学期《高等代数(上)》 期中考试参考答案与评分标准

一、填空题(每小题5分, 共30分)

$$\begin{array}{llll}
 1. \quad \underline{\frac{n(n-1)}{2} - k} & 2. \quad \underline{\begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} & 3. \quad \underline{3^{2022} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ 3 & 1 & \frac{3}{5} \\ 5 & \frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix}} \\
 4. \quad \underline{-3} & 5. \quad \underline{16} & 6. \quad \underline{-\frac{16}{27}}
 \end{array}$$

二、计算题(每小题10分, 共30分)

$$\begin{aligned}
 7. \text{ 解: } D_n &= \begin{vmatrix} (n-1)x+1 & x & \cdots & x \\ (n-1)x+1 & 1 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n-1)x+1 & x & \cdots & 1 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (5\text{分}) \\
 &= \begin{vmatrix} (n-1)x+1 & x & \cdots & x \\ 0 & 1-x & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-x \end{vmatrix} = ((n-1)x+1)(1-x)^{n-1} \dots\dots\dots (10\text{分})
 \end{aligned}$$

8. 解: 增广矩阵 $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -a-1 & b-3 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3\text{分})$

当 $a = -1, b = 3$ 时, 原方程组有无穷多解, 且解为

$x_1 = 2 - k, x_2 = k - 1, x_3 = k$, 其中 k 是任意常数. $\dots\dots\dots (5\text{分})$

当 $a \neq -1$, 原方程解唯一, 且:

当 $a \neq -1, b \neq 3$ 时

$$x_1 = -\frac{2a+b-1}{a+1}, x_2 = \frac{2-a-b}{a+1}, x_3 = \frac{3-b}{a+1}.$$

当 $a \neq -1, b = 3$ 时, $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 0. \dots\dots\dots (8\text{分})$

当 $a = -1, b \neq 3$ 时, 系数矩阵的秩小于增广矩阵的秩。原方程组无解. $\dots\dots\dots (10\text{分})$

9. 解: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \dots\dots\dots (5\text{分})$

从而,

$$X = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{6} & -\frac{1}{6} & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{7}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{17}{6} & 0 \end{pmatrix}. \dots\dots\dots (10\text{分})$$

四、证明题(前两小题各10分, 最后一小题20分, 共40分)

10. 证: 利用行列式性质, 把 $|A(t)|$ 拆成 2^n 个行列式之和, 又两列相同, 行列式为0, 因此不为0的行列式至多只能有1列含有元素 t .故

$$\begin{aligned}
 |A(t)| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ t & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 &\quad + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & t \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & t \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & t \end{vmatrix} \\
 &= |A| + tA_{11} + tA_{21} + \dots + tA_{n1} + \dots + tA_{1n} + tA_{2n} + \dots + tA_{nn} \\
 &= |A| + t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}.
 \end{aligned}$$

..... (10分)

11. 证: 因为 $|A| \neq 0$, 则 $\begin{pmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$. (5分)

两边同时取行列式, 且 $AC = CA$, 则:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

..... (10分)

12. 证: (1) 设矩阵 $r(A) = r, r(B) = s$, 对 A 做一系列初等行变换 $P = P_1 P_2 \dots P_m$, 使得 $PA = \begin{pmatrix} A'_{r \times n} \\ O \end{pmatrix}$. 同理: 存在初等列变换 Q 使得 $BQ = \begin{pmatrix} B'_{n \times s} & O \end{pmatrix}$.

则, $r(AB) = r(PABQ) = r\left(\begin{pmatrix} A'_{r \times n} \\ O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B'_{n \times s} & O \end{pmatrix}\right) = r\left(\begin{pmatrix} A'_{r \times n} B'_{n \times s} & O \\ O & O \end{pmatrix}\right) \leq \min\{r, s\}.$

因此, $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}.$ (5 分)

(2) 设 $r(A) = r_1, r(B) = r_2$, 则存在可逆矩阵 P_1, Q_1, P_2, Q_2 使得

$$P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} I_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2 A Q_2 = \begin{pmatrix} I_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

从而, $AB = P_1^{-1} \begin{pmatrix} I_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1^{-1} P_2^{-1} \begin{pmatrix} I_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2^{-1} \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$

令 $C = Q_1^{-1} P_2^{-1} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$, 其中 C_1 是 $r_1 \times r_2$ 阶矩阵, $r(C) = n$, 又

$$\begin{pmatrix} I_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1^{-1} P_2^{-1} \begin{pmatrix} I_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D.$$

..... (10分)

故 $r(AB) = r(D) = r(C_1).$

而 C_1 等于在 C 中去掉 $n - r_1$ 行, $n - r_2$ 列后所得的矩阵, 又在矩阵中去掉一行(列), 矩阵的秩最多减少1, 所以

$$r(AB) = r(C_1) \geq n - (n - r_1) - (n - r_2) = r_1 + r_2 - n.$$

所以 $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n.$ (15分)

(3) 直接利用(2)的结论, 知: $0 = r(AB) \geq r(A) + r(B) - n.$ (20 分)

注：第12题有多种证法，例如：

第(1)小题也可如下方法证明：

设矩阵 A 的列向量组是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ，不妨设 $b = (b_{ij})_{n \times n}$ ，则

$$AB = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= (b_{11}\alpha_1 + b_{21}\alpha_2 + \dots + b_{n1}\alpha_n, \dots, b_{1n}\alpha_1 + b_{2n}\alpha_2 + \dots + b_{nn}\alpha_n).$$

即：矩阵 AB 的列向量可以由 A 的列向量组线性表出，因此 $r(AB) \leq r(A)$ 。

利用上述结论及矩阵转置的性质可知： $r(AB) = r((AB)') = r(B'A') \leq r(B') = r(B)$ 。因此， $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ 。

第(2)小题也可以用如下两种证明方法：

方法(I)：直接用等式 $n + r(AB) = r \begin{pmatrix} I_n & O \\ O & AB \end{pmatrix}$ ，然后对 $\begin{pmatrix} I_n & O \\ O & AB \end{pmatrix}$ 用分块矩阵

的初等行变换，变为 $\begin{pmatrix} B & I_n \\ O & A \end{pmatrix}$ ；

方法(II)：将 $BX = 0$ 的基础解系扩充到 $ABX = 0$ 的基础解系的角度来证 $(n - r(AB)) - (n - r(B)) \leq n - r(A)$ 。

第(3)小题也可以如下方法证明：

设 $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ 。由于 $AB = 0$ ，故 B_i 是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解。因此， B 的列秩 $r(B)$ 不超过 $AX = 0$ 解空间的维数 $n - r(A)$ ，即 $r(A) + r(B) \leq n$ 。