

安徽大学 2020—2021 学年第 1 学期

《 解析几何 》 考试试卷 (B 卷)

(闭卷 时间 120 分钟)

院/系 _____ 年级 _____ 专业 _____ 姓名 _____ 学号 _____

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						

一、填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

得分	
----	--

1、在右手直角坐标系中, 向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 的坐标分别为 $(1, 2, 4)'$, $(1, -1, 0)'$ 和 $(0, 1, 1)'$, 则 $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times (2\vec{a} + \vec{c}) \cdot (3\vec{b} + \vec{c})$ 的值为_____。

2、在平面仿射坐标系 $[O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}]$ 中, 已知 $|\overrightarrow{OA}| = 2, |\overrightarrow{OB}| = 1$ 且 $\angle AOB = \frac{\pi}{6}, \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, 则点 P 的坐标为_____, $|\overrightarrow{OP}| =$ _____。

3、在右手直角坐标系中, 直线 $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$ 与平面 $x+2y+1=0$ 交点坐标为_____。

4、在右手直角坐标系中, 直线 $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ -2x+y+z=0 \end{cases}$ 在 xoy 平面的射影方程为_____。

5、在右手直角坐标系中, 方程 $x^2 + 2y^2 - xz = 0$ 表示的曲面为_____。

二、判断题 (判断对错并简要说明理由) (每小题 4 分, 共 20 分)

得分	
----	--

6、若 $\vec{c} \neq \vec{0}$, 并且 $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$ 则 $\vec{a} = \vec{b}$

7、如果 $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$ ，那么 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 三个向量共面。

8、在仿射坐标系中，平面 $x - 2y + 3z = 0$ 与平面 $\frac{x}{6} - \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$ 一定平行。

9、在右手直角坐标系中，当非零常数 p, q 取不同值时，方程 $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ 表示的图形是可以不是抛物面。

10、在右手直角坐标系中， $4x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 表示的曲面是旋转面。

三、计算题（每小题 10 分，共 50 分）

得分	
----	--

11、在直角坐标系中，两平面方程分别为 $x - 2y + 2z + 1 = 0$ 和 $2x + 3y - 6z + 2 = 0$ ，求它们构成的二面角的角平分面方程，在此二面角内有点 $P(1, 2, 1)$ 。

12、在右手直角坐标系中，已知椭球面对称轴与坐标轴重合，且通过椭圆 $\begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \\ z = 3 \end{cases}$ 以及点 $M(-1, 2\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ，求这个椭球面的方程。

13、在右手直角坐标系中，求准线方程 $C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x^2 + 2y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$ ，母线方向为 $\vec{v}(1, 1, 1)'$ 的柱面方程。

14、求双曲抛物面 $x^2 - y^2 = 4z$ 的过点 $(4, 2, 3)$ 的直母线方程。

15、求与直线 $l_1: \begin{cases} x = -1 \\ y = -z \end{cases}; l_2: \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}; l_3: \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+2}{5}$ 同时共面的直线所产生的曲面方程。

四、综合题（每小题 10 分，共 10 分）

得分	
----	--

16、在空间直角坐标系中，直线 $l_1: \begin{cases} x-z+2=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$ 和直线 $l_2: \begin{cases} x-y-1=0 \\ y=z \end{cases}$

- (1) 证明直线 l_1, l_2 异面；
- (2) 求直线 l_1, l_2 的距离；
- (3) 求直线 l_1, l_2 的公垂线方程。

五、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

17、已知向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 不共面， k_1, k_2, k_3 是三个常数。设向量 $\vec{x}$ 满足 $\vec{a} \cdot \vec{x} = k_1, \vec{b} \cdot \vec{x} = k_2, \vec{c} \cdot \vec{x} = k_3$ 。

证明： $\vec{x} = \frac{k_1(\vec{b} \times \vec{c}) + k_2(\vec{c} \times \vec{a}) + k_3(\vec{a} \times \vec{b})}{\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}}$

18、取适当的直角坐标系证明平面曲线 $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 1$ 表示的是椭圆。

安徽大学 2020—2021 学年第 一 学期

《解析几何》(B 卷) 考试试题参考答案及评分标准

一、填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

- 1、1 2、 $(1,1)'$, $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$ 3、 $(-1,0,-2)'$ 4、 $\begin{cases} 3x+y=4 \\ z=0 \end{cases}$

5、锥面

二、判断题 (每小题 4 分, 共 20 分)

6、错 例如: 在直角坐标系中, $\vec{a}(1,0), \vec{b}(2,0), \vec{c}(0,1)$ 满足条件, 但是两者不相等。

7、对, 等式两边和 $\vec{c}$ 做内积, 可得 $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$, 从而三个向量共面。

8、对, 系数对应成比例。

9、错, p, q 同号表示椭圆抛物面, p, q 异号表示双曲抛物面。

10、对, 是曲线 $\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转。

三、计算题 (每小题 10 分, 共 50 分)

11、解: 首先, 两平面的法向量不共线, 从而两平面相交。另一方面, 将 P 坐标

带入两平面方程可得 $\begin{cases} 1-2 \times 1 + 2 \times 1 + 1 > 0 \\ 2 \times 1 + 3 \times 2 - 6 \times 1 + 2 > 0 \end{cases}$ 4 分

设 $M(x, y, z)$ 在所求的角平分面上的充分必要条件是

$$\frac{|x-2y+2z+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = \frac{|2x+3y-6z+2|}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}}, \quad \text{.....7 分}$$

由前面分析, 两边取同号, 从而有

$$\frac{x-2y+2z+1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = \frac{2x+3y-6z+2}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}}, \text{ 即 } x-23y+32z+1=0 \quad \text{.....10 分}$$

12、解: 设所求椭球面方程为 $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{k} = m$ 2 分

当 $z=3$ 时, 可得 $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{3^2}{k} = m$, 从而 $m - \frac{3^2}{k} = 1$ 5 分

将点 M 代入方程可得 $(-1)^2 + \frac{(2\sqrt{2})^2}{4} + \frac{(\sqrt{3})^2}{k} = m$ 8 分

联立方程, 解得 $\begin{cases} k=3 \\ m=4 \end{cases}$, 从而所求椭球面为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{12} = 1$ 10 分

13、解: 设所求曲面上任意一点 M 坐标为 (x, y, z) , 从而存在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 使

得满足如下方程 $C: \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1 \\ 2x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 = 2 \\ \frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{1} = \frac{z-z_0}{1} \end{cases}$ 8 分

消去参数 x_0, y_0, z_0 可得所求曲面方程 $(x-z)^2 + (y-z)^2 = 1$ 10 分

14、解: $x^2 - y^2 = 4z$ 可以变形为 $(x+y)(x-y) - 4z = 0$ 从而两直母线方程为

$\begin{cases} (x+y) + 4\lambda = 0 \\ z + \lambda(x-y) = 0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} \lambda(x+y) + z = 0 \\ 4\lambda + (x-y) = 0 \end{cases}$ 5 分

将 $(4, 2, 3)'$ 代入上面方程组, 解得 $\lambda = -\frac{3}{2}$ 或 $\lambda = -\frac{1}{2}$ 8 分

从而所求的直母线方程为 $\begin{cases} x+y-6=0 \\ 2z-3x+3y=0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} -x-y+2z=0 \\ x-y-2=0 \end{cases}$ 10 分

15、解: 设与三条直线同时共面的直线方程为 $\frac{x-x_0}{k} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ 。

l_1 过点 $(-1, 0, 0)'$, 方向向量为 $(0, 1, -1)'$; l_2 过点 $(1, 0, 0)'$, 方向向量为 $(0, 1, 1)'$

l_3 过点 $(2, -1, -2)'$, 方向向量为 $(-3, 4, 5)'$ 由于所求直线与三条直线同时共面,
.....3 分

$$\text{故有 } \begin{vmatrix} x_0+1 & 0 & k \\ y_0 & 1 & m \\ z_0 & -1 & n \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} x_0-1 & 0 & k \\ y_0 & 1 & m \\ z_0 & 1 & n \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} x_0-2 & -3 & k \\ y_0+1 & 4 & m \\ z_0+2 & 5 & n \end{vmatrix} = 0.$$

整理可得关于 k, m, n 的三元一次方程组

$$\begin{cases} (-y_0 - z_0)k + (x_0 + 1)m + (x_0 + 1)n = 0 \\ (y_0 - z_0)k - (x_0 - 1)m + (x_0 + 1)n = 0 \\ (5y_0 + 5 - 4z_0 - 8)k - (5x_0 - 10 + 3z_0 + 6)m + (4x_0 - 8 + 3z_0 + 3)n = 0 \end{cases} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

由于 k, m, n 不全为零, 从而上面的齐次线性方程组有非零解, 从而系数行列式为

$$\text{零, 故有 } \begin{vmatrix} -y_0 - z_0 & (x_0 + 1) & (x_0 + 1) \\ y_0 - z_0 & -(x_0 - 1) & (x_0 + 1) \\ (5y_0 - 4z_0 - 3) & -(5x_0 - 4 + 3z_0) & 4x_0 - 5 + 3z_0 \end{vmatrix} = 0$$

整理可得 $6(x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 - 1) = 0$, 从而所求方程为 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 。……10 分

四、综合题 (每小题 10 分, 共 10 分)

16、解: (1) 首先将两条直线的方程化为点向式方程。

$$\text{直线 } l_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}, \text{ 直线 } l_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$$

故直线 l_1 过 $P_1(-1, 0, 1)'$, 方向向量为 $\vec{v}_1 = (1, -1, 1)'$; 直线 l_2 过 $P_2(1, 0, 0)'$, 方向向量为 $\vec{v}_2 = (1, 1, 1)'$ 。

$$\text{则 } \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (-2, 0, 2)', \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \cdot \overrightarrow{P_1 P_2} = -4.$$

因为 $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \cdot \overrightarrow{P_1 P_2} \neq 0$, 故直线 l_1, l_2 异面。

……4 分

$$(2) \text{ 直线 } l_1, l_2 \text{ 的距离为: } d = \frac{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \cdot \overrightarrow{P_1 P_2}|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

(3) 直线 l_1, l_2 的公垂线的方向向量 $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (-2, 0, 2)'$, 取方向向量 $\vec{v}(-1, 0, 1)'$ 。

点 P_1 和 $\vec{v}_1, \vec{v}$ 确定一个平面 π_1 。平面 π_1 的法向量 $\vec{n}_1 = \vec{v}_1 \times \vec{v} = (-1, -2, -1)'$, 故平面 π_1 的方程为: $x + 2y + z = 0$ 。

点 P_2 和 $\vec{v}_2, \vec{v}$ 确定一个平面 π_2 。平面 π_2 的法向量 $\vec{n}_2 = \vec{v}_2 \times \vec{v} = (1, -2, 1)'$, 故平面 π_2

的方程为: $x - 2y + z - 1 = 0$ 。

则直线 l_1, l_2 的公垂线方程为: $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$ 10 分

五、证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

17、证明: 由于向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 不共面, 故向量 $\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}$ 不共面。从而由空间

向量基本定理, 对于向量 $\vec{x}$ 存在实数 k, m, l 使得 $\vec{x} = k\vec{a} \times \vec{b} + m\vec{b} \times \vec{c} + l\vec{c} \times \vec{a}$ 2 分

根据已知条件, 上式两边同时与 $\vec{a}$ 做内积可得

$$k_1 = \vec{x} \cdot \vec{a} = (k\vec{a} \times \vec{b} + m\vec{b} \times \vec{c} + l\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{a} = m\vec{b} \times \vec{c} \cdot \vec{a} = m\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$\text{从而 } m = \frac{k_1}{\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}} \quad \text{.....4 分}$$

$$\text{同理 } k = \frac{k_3}{\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}}, \quad l = \frac{k_2}{\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}}$$

$$\text{综上所述 } \vec{x} = \frac{k_1(\vec{b} \times \vec{c}) + k_2(\vec{c} \times \vec{a}) + k_3(\vec{a} \times \vec{b})}{\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}} \quad \text{.....5 分}$$

18、证明: $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 1$ 令 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, 代入式子整理可得

$$3x'^2 + 3y'^2 - 2\sin \alpha \cos \alpha (x'^2 - y'^2) - 2x'y'(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 1 \quad \text{.....3 分}$$

取 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, 整理可得: $2(x')^2 + 4(y')^2 = 1$, 从而为椭圆。5 分