

安徽大学 2021—2022 学年第一学期

《概率论》期末考试试卷 (B 卷)

(闭卷 时间 120 分钟)

院/系_____ 年级_____ 专业_____ 姓名_____ 学号_____

考场登记表序号_____

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

得分	
----	--

一、选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 2 分, 共 10 分)

1. 设 A, B 为随机事件, 且 $P(B) > 0, P(A|B) = 1$, 则必有 ().

- (A) $P(A \cup B) > P(A)$ (B) $P(A \cup B) > P(B)$
 (C) $P(A \cup B) = P(A)$ (D) $P(A \cup B) = P(B)$

2. 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ a + b \arcsin x, & -1 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

则 a, b 的值分别为 ().

- (A) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{\pi}$ (B) $a = 0, b = 0$ (C) $a = 0, b = \frac{1}{\pi}$ (D) $a = \frac{1}{2}, b = 0$

3. 若随机向量 (X, Y) 服从二维正态分布, 则 ① X, Y 一定相互独立; ② 若 $\rho_{XY} = 0$, 则 X, Y 一定相互独立; ③ X 和 Y 都服从一维正态分布; ④ 若 X, Y 相互独立, 则 $\text{cov}(X, Y) = 0$. 几种说法中正确的是 ().

- (A) ① ② ③ ④ (B) ① ③ ④ (C) ② ③ ④ (D) ① ② ④

4. 设随机变量 X 的概率密度为 $p_X(x)$, 令 $Y = -2X$, 则 Y 的概率密度 $p_Y(y)$ 为 ().

- (A) $2p_X(-2y)$ (B) $p_X(-\frac{y}{2})$
 (C) $-\frac{1}{2}p_X(-\frac{y}{2})$ (D) $\frac{1}{2}p_X(-\frac{y}{2})$

5. 设 $X_1, X_2, \dots$ 为相互独立的随机变量序列, 且 $X_i (i=1, 2, \dots)$ 服从参数为 λ 的指数分布, 则必有 ().

$$(A) \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - \lambda}{n\lambda} \leq x \right) = \Phi(x)$$

$$(B) \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{\lambda \sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \leq x \right) = \Phi(x)$$

$$(C) \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - \lambda}{\sqrt{n}} \leq x \right) = \Phi(x)$$

$$(D) \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - \lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x \right) = \Phi(x)$$

得 分	
-----	--

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

6. 设 X 为离散型随机变量，且有概率分布律： $P(X=k) = C\left(\frac{2}{3}\right)^k$ ， $k=0,1,2,3$ ，则常数

$C =$ _____.

7. 已知随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且 $P(X=1) = 2P(X=2)$ ，则 $\lambda =$ _____.

8. 设随机变量 $X \sim N(4,9)$ ，且 $P(X \geq c) = P(X < c)$ ，则 $c =$ _____.

9. 设随机变量 X 和 Y 数学期望分别为 -1 和 1 ，方差分别为 1 和 4 ，而相关系数为 -0.5 ，则利用切比雪夫（Chebyshev）不等式，有 $P\{|X+Y| \geq 6\} \leq$ _____.

10. 设随机变量服从泊松分布 $X \sim P(\lambda)$ ，其中 $\lambda > 0$ ，则 X 的特征函数 $f_X(t) =$ _____.

三、计算题（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

得 分	
-----	--

11. 高射炮向敌机发三发炮弹，每发炮弹击中敌机的概率均为 0.3 ，且假设各炮弹是否击中敌机是相互独立的。又知若敌机中零弹，其坠落的概率为 0 ，若敌机中一弹，其坠落的概率为 0.2 ，若敌机中两弹，其坠落的概率为 0.6 ，若中三弹，则必坠落。

(1) 求敌机被击落的概率；

(2) 若敌机被击落，求它中两弹的概率。

12. 已知随机变量 X 只取 $-1, 1, \sqrt{2}$, 相应的概率为 $\frac{1}{2c}, \frac{1}{4c}, \frac{1}{8c}$, 求:

(1) 常数 c ;

(2) $P(|X| \leq 1 | X \geq 0)$.

13. 设 X 的概率密度为 $p(x) = \begin{cases} \alpha|x|, & |x| \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 试求 (1) 常数 α ; (2) $P(-1/2 \leq X \leq 4)$;

(3) X 的分布函数 $F(x)$.

14. 设二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$p(x, y) = \begin{cases} ke^{-(2x+3y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 求常数 k ;

(2) 求 (X, Y) 关于 X 和 Y 的边际密度函数 $p_X(x)$ 和 $p_Y(y)$.

15. 设 A, B 为两个随机事件, 且 $P(A) = a, P(B) = 0.3, P(\bar{A} \cup B) = 0.7$.

(1) 若事件 A, B 互不相容, 求 a 的值;

(2) 若事件 A, B 独立, 求 a 的值.

16. 已知 $X \sim N(1, 3^2)$, $Y \sim N(0, 4^2)$, $\rho_{XY} = -\frac{1}{2}$, 设随机变量 $Z = \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}$.

求: (1) $E(Z)$ 与 $D(Z)$; (2) X 与 Z 的相关系数 ρ_{XZ} .

四、证明题 (本大题共 2 小题, 每小题 5 分, 共 10 分)

得 分	
-----	--

17. 设 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从 $B(n, p)$, Y 服从 $B(m, p)$, 试证: $X + Y$ 服从 $B(n + m, p)$.

18. 假设 $X_n \xrightarrow{P} X$, $Y_n \xrightarrow{P} Y$. 证明: $2X_n - 3Y_n \xrightarrow{P} 2X - 3Y$.

得 分	
-----	--

五、综合分析题（本大题共 10 分）

19. 设二维离散型随机变量 (X, Y) 联合分布列为

$X \backslash Y$	1	2	3
1	1/6	1/9	1/18
2	1/3	a	b

其中 a, b 为某待定常数.

- (1) 求在 $Y=2$ 的条件下 X 的条件分布;
- (2) 问 a, b 取何值时, X 与 Y 独立?