

安徽大学 2022—2023 学年第二学期

《数理统计》期末试卷（A 卷）

（闭卷，时间 120 分钟）

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						

得 分

一、填空题（每空 2 分，共 24 分）

1. 设 $(X_1, \dots, X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本，设 $EX = \mu$ ， $DX = \sigma^2$ ，则 μ 、 σ^2 的矩估计分别为_____和_____， μ 、 σ^2 的无偏估计分别为_____和_____。
2. 设 X 服从 $U(0, \theta)$ 分布， $(0.5, 0.7, 1.3, 1, 2.5)$ 为一组样本值，则 θ 的最大似然估计为_____，矩估计为_____。
3. 设 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 均为未知参数 θ 的无偏估计，且 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效，则 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 的数学期望满足的关系为_____， $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 的方差满足的关系为_____。
4. 设总体 X 服从 $N(\mu, 1)$ 分布， n 为样本容量， $\bar{X}$ 为样本均值，若 μ 的置信水平为 γ 的置信区间为 $(\bar{X} - \lambda, \bar{X} + \lambda)$ ，则 λ 的值为_____。
5. 进行假设检验时，可能犯的两类错误是_____和_____，检验水平 α 是用来控制犯_____错误的概率。

得 分

二、选择题（每题 3 分，共 12 分）

6. 设 (X_1, X_2, X_3) 为来自总体 X 的一个样本， θ 为未知参数，下列函数是统计量的是（ ）

(A) $X_1 + X_2 - \theta$ (B) θX_1 (C) $\frac{1}{\theta}(X_1 - X_3)$ (D) $\max\{X_1, X_2, X_3\}$

7. 设随机变量 X 、 Y 都服从标准正态分布，则 ()

- (A) $X+Y$ 服从正态分布 (B) X^2+Y^2 服从 χ^2 分布
(C) X^2 、 Y^2 都服从 χ^2 分布 (D) $\frac{X}{Y}$ 服从 t 分布

8. 设 $(X_1, \dots, X_n)$ 为来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本， $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ，则下列随机变量

中服从 $\chi^2(n-1)$ 分布的是 ()

- (A) $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ (B) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$
(C) $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ (D) $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

9. 对正态总体的数学期望 μ 进行假设检验，如果当检验水平为 0.05 时，接受零假设 $H_0: \mu = \mu_0$ ，则当检验水平为 0.1 时，下列结论正确的是 ()

- (A) 必接受 H_0 (B) 必拒绝 H_0
(C) 可能接受也可能拒绝 H_0 (D) 不接受也不拒绝 H_0

得 分	
-----	--

三、计算题 (共 33 分)

10. (11 分) 设总体 X 概率密度函数为 $f(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ ，其中 α 为未知参数。

设 $(X_1, \dots, X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本，求：(1) α 的最大似然估计；(2) α 的矩估计。

学号

姓名

专业

院/系

答题勿超装订线

线

订

装

11. (9 分) 设 (X_1, X_2, X_3) 是来自两点分布 $B(1, p)$ 的简单随机样本, 检验问题

$$H_0: p = \frac{1}{2} \leftrightarrow H_a: p = \frac{3}{4}$$

的一个否定域为 $W = \{(x_1, x_2, x_3): x_1 + x_2 + x_3 \geq 2\}$ 。求:

(1) 该否定域的功效函数 $\rho_W(p)$; (2) 犯第一、二类错误的概率。

12. (13 分) 设总体 X 概率密度函数为 $f(x, \mu) = \begin{cases} e^{-(x-\mu)}, & x \geq \mu; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$, 其中 $\mu \in (-\infty, +\infty)$ 为未知参数。设 $(X_1, \dots, X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本。试利用广义似然比检验法建立检验问题

$$H_0: \mu = 0 \leftrightarrow H_a: \mu \neq 0$$

的否定域 (设检验水平为 α) 。

得	分	
---	---	--

四、证明题（共 23 分）

13. （15 分）设总体 X 服从指数分布 $E(\lambda)$ ，其中 $\lambda \in (0, \infty)$ 为未知参数，设 $(X_1, \cdots, X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本， $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 为样本均值。

- (1) 证明 X 是指数型分布；
- (2) 证明 $\sum_{i=1}^n X_i$ 是 λ 的充分完全统计量；
- (3) 若已知 $E(\bar{X}^{-1}) = \frac{n}{n-1} \lambda$ ，试利用 Blackwell-Lehmann-Scheffe 定理求 λ 的最小方差无偏估计。

14. (8 分) 设 $\hat{\theta}$ 是未知参数 θ 的无偏估计, 证明: 若 $D(\hat{\theta}) \neq 0$, 则 $(\hat{\theta})^2$ 不是 θ^2 的无偏估计。

五、应用题 (共 8 分)

得 分	
-----	--

15. (8 分) 设某次考试的学生成绩服从正态分布, 从中随机抽取 36 位考生的成绩, 算得平均成绩为 66.5 分, 样本标准差为 15 分, 问在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下, 是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分? (若 $X \sim t(35)$, 则 $P(X > 2.03) \approx 0.025$)