

《数理统计》期中试卷（A 卷）

（闭卷，时间 95 分钟）

题 号	一	二	三	总分
得 分				

得 分	
-----	--

一、选择题（每题 3 分，共 18 分）

1. 设 (X_1, X_2, X_3) 为来自总体 X 的一个样本， θ 为未知参数，下列函数是统计量的是（ ）

- (A) $X_1 + X_2 - \theta$ (B) θX_1 (C) $\frac{1}{\theta}(X_1 - X_3)$ (D) $\max\{X_1, X_2, X_3\}$

2. 若 $\varphi = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是未知参数 θ 的充分统计量，则下面叙述正确的是（ ）

- (A) φ 的数学期望等于 θ (B) φ 概括了样本中所含未知参数 θ 的全部信息
(C) φ 的分布函数与参数 θ 无关 (D) φ 是 θ 的所有估计量中均方误差最小的

3. 设 $(X_1, \dots, X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本， X 的方差 σ^2 存在，

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \text{ 则 ()}$$

- (A) S^2 是 σ^2 的矩估计 (B) S^2 是 σ^2 的最大似然估计
(C) S^2 是 σ^2 的无偏估计 (D) 以上都不正确

4. 设随机变量 X, Y 都服从标准正态分布，则（ ）

- (A) $X + Y$ 服从正态分布 (B) $X^2 + Y^2$ 服从 χ^2 分布
(C) X^2, Y^2 都服从 χ^2 分布 (D) $\frac{X}{Y}$ 服从 t 分布

5. 设 $(X_1, \dots, X_n)$ 为来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本， $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ，则下列随机变量中服从 $\chi^2(n-1)$ 分布的是（ ）

- (A) $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ (B) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

$$(C) \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

$$(D) \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

6. 设 X 服从 $t(n)$ 分布, $P(|X| > \lambda) = \alpha$, 则 $P(X < \lambda)$ 等于 ()

- (A) α (B) $1 - \alpha$ (C) $1 - \frac{\alpha}{2}$ (D) $\frac{\alpha}{2}$

得 分	
-----	--

二、填空题 (每空 2 分, 共 12 分)

1. 设 $(X_1, \dots, X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 设 $EX = \mu$, $DX = \sigma^2$, 则 μ 、 σ^2 的矩估计分别为_____和_____.
2. 设 X 服从 $U(0, \theta)$ 分布, $(0.5, 0.7, 1.3, 1, 2.5)$ 为一组样本值, 则 θ 的最大似然估计为_____, 矩估计为_____.
3. 设 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 均为未知参数 θ 的无偏估计, 且 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效, 则 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 的数学期望满足的关系为_____, $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 的方差满足的关系为_____.

得 分	
-----	--

三、分析计算题 (共 70 分)

1. (14 分) 设总体 X 概率密度函数为 $f(x; \alpha) = \begin{cases} (\alpha + 1)x^\alpha, & 0 < x < 1; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 其中 $\alpha \in (-\infty, \infty)$ 为未知参数. 设 $(X_1, \dots, X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 求 α 的最大似然估计 $\hat{\alpha}_{MLE}$ 和矩估计 $\hat{\alpha}_M$.

2. (14 分) 验证两点分布 $B(1, p)$ 满足 Cramér-Rao 正则性条件。

3. (14 分) 设总体 X 服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$, 其中 $\sigma^2 \in (0, \infty)$ 为未知参数, 设 $(X_1, \dots, X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本。

(1). 证明 X 是指数型分布;

(2). 证明 $\sum_{i=1}^n X_i^2$ 是参数 σ^2 的充分完全统计量。

学号

姓名

专业

院/系

线

订

装

超

题

答

线

订

装

4. (16 分) 设总体 X 服从均匀分布 $U(0, \theta)$, 其中 $\theta > 0$ 为未知参数。设 $(X_1, \dots, X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 令 $X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, $G = \frac{X_{(n)}}{\theta}$ 。

(1). 求 G 的分布; (2). 试以 G 作为枢轴量求 θ 的置信水平为 γ 的置信区间。

5. (12 分) 鱼塘被汞污染后, 鱼的组织中汞含量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 现从鱼塘中随机捞出 6 只鱼进行检测, 测得 6 只鱼组织中的汞含量 (ppm) 均值为 $\bar{x} = 2.02$ 。若由历史资料知 $\sigma = 0.10$, 试求平均汞含量 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间。(写出置信区间表达式, 代入具体数值, 无需计算出结果。设 $\Phi(x)$ 表示标准正态分布的分布函数, 已知 $\Phi(1.645) = 0.95$, $\Phi(1.96) = 0.975$)