

《数理统计》期中试卷

(闭卷, 时间 90 分钟)

题 号	一	二	三	四	总分
得 分					

得 分	
-----	--

一、填空题 (每空 2 分, 共 30 分)

1. 设 $(X_1, \dots, X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 设 $EX = \mu$, $DX = \sigma^2$, 则 μ 、 σ^2 的矩估计分别为_____和_____, μ 、 σ^2 的无偏估计分别为_____和_____。

2. 设 (X_1, X_2, X_3, X_4) 为来自正态总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本, 则

(1). $X_1 - 3X_4$ 服从_____分布, $\sum_{i=1}^4 X_i^2$ 服从_____分布, $\frac{\sqrt{2}X_1}{\sqrt{X_2^2 + X_3^2}}$ 服从_____分布 (写出分布中的具体参数);

(2). 若 $Y = a(X_1 + 2X_4)^2 + b(2X_2 - 4X_3)^2$ 服从卡方分布, 则 $a =$ _____, $b =$ _____;

3. 设 $(X_1, \dots, X_n)$ 为来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$,

$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 则 $\bar{X}$ 服从_____分布, $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 服从_____分布, $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ 服从_____分布 (写出分布中的具体参数)。

4. 设 X 服从 $U(a,b)$ 分布, (5.2, 4, 2, 3.8, 4.6) 为一组样本值, 则 a 、 b 的最大似然估计分别为_____和_____。

5. 设 X 服从 $t(n)$ 分布, $P(|X| > \lambda) = \alpha$, 则 $P(X < \lambda) =$ _____。

得 分	
-----	--

二、计算题（共 25 分）

6.（10 分）设总体 X 概率密度函数为

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \theta, & 0 < x < 1; \\ 1 - \theta, & 1 \leq x < 2; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其中 $\theta \in (0, 1)$ 为未知参数。设 $(X_1, \dots, X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本， N 为样本值中小于 1 的个数，求 θ 的最大似然估计和矩估计。

7. (15 分) 设总体 X 服从均匀分布 $U(0, \theta)$, 其中 $\theta > 0$ 为未知参数。设 $(X_1, \dots, X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本, $X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ 。

(1) . 求 $X_{(1)}$ 的分布;

(2) . 验证 $\varphi = (n+1)X_{(1)}$ 为 θ 的无偏估计。

得 分	
-----	--

三、证明题（共 35 分）

8. （12 分）设总体 X 概率密度函数为

$$f(x, \theta) = \begin{cases} e^{\theta-x}, & x > \theta; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其中 $\theta \in (-\infty, \infty)$ 为未知参数。设 $(X_1, \dots, X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本， $X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ 。

- (1) . 证明 $X_{(1)} - \theta$ 的分布与参数 θ 无关，并求此分布；
- (2) . 求 θ 的置信水平为 γ 的置信区间。

9. (9 分) 设 $(X_1, \dots, X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本, n 个正常数 α_i 满足 $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, 试证明在 EX 的所有形如 $\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$ 的无偏估计中, 样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 是最有效的。

10. (14 分) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, 1)$, 其中 $\mu \in (-\infty, \infty)$ 为未知参数, 设 $(X_1, \dots, X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本。

(1). 证明是 X 指数型分布;

(2). 证明 $\sum_{i=1}^n X_i$ 是参数 μ 的充分完全统计量;

(3). 利用 Blackwell-Lehmann-Scheffe 定理求 μ 的最小方差无偏估计。

得 分	
-----	--

四、应用题（共 10 分）

11. （10 分）鱼塘被汞污染后，鱼的组织中汞含量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，现从鱼塘中随机捞出 6 只鱼进行检测，测得 6 只鱼组织的汞含量（ppm）均值为 $\bar{x} = 2.02$ ，方差为 $s^2 = 0.11^2$ 。试求平均汞含量 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间。（设 $t_\alpha(n)$ 表示自由度为 n 的 t 分布的上 α 分位数，即若 $T \sim t(n)$ ，则 $P(T > t_\alpha(n)) = \alpha$ 。已知 $t_{0.025}(5) = 2.57$ ， $t_{0.025}(6) = 2.45$ ， $t_{0.05}(5) = 2.02$ ， $t_{0.05}(6) = 1.94$ ）