

**安徽大学2023-2024第一学期《数学分析》（下）
期末B卷参考答案及评分标准**

一、填空题(每空5分, 记20分).

1. 0; 2. $\ln \frac{b+1}{a+1}$; 3. $-3\sqrt{2}$; 4. $\pi^{\frac{3}{2}}$;

二、计算题(记50分)

5. 解 $D = \{(x, y) | -1 \leq x + y \leq 1, -1 \leq x - y \leq 1\}$. 令 $x + y = u, x - y = v$, 则 $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$, $D' = \{(u, v) | -1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1\}$, $J = -\frac{1}{2}$. …… 4分
于是

$$\begin{aligned} \iint_D e^{x+y} dx dy &= \iint_{D'} e^u |J| du dv \\ &= \frac{1}{2} \iint_{D'} e^u du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dv \int_{-1}^1 e^u du \\ &= e - e^{-1}. \end{aligned} \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

6. 解 由Stokes公式可知

$$\begin{aligned} I &= \int_L y dx + z dy + x dz \\ &= - \iint_{\Sigma} dy dz + dz dx + dx dy, \end{aligned}$$

其中 Σ 是有界平面 $x + y + z = 0$, 其边界是曲线 L . ……3分

易知平面 Σ 的单位法向量为 $\vec{n} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. ……5分

由第一类曲面积分和第二类曲面积分的关系, 可得

$$\begin{aligned} I &= - \iint_{\Sigma} dy dz + dz dx + dx dy \\ &= - \sqrt{3} \iint_{\Sigma} dS \\ &= - \sqrt{3} \pi a^2. \end{aligned}$$

即 $\int_L ydx + zdy + xdz = -\sqrt{3}\pi a^2 \dots\dots\dots 10$ 分

7. 解 由Gauss公式可得

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{z^2+x^2}} dS \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{z^2+x^2}} \right) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}\sqrt{z^2+x^2}} dV, \dots\dots\dots 6 \text{分} \end{aligned}$$

其中, $\Omega = \{(x, y, z) | 1 \leq y \leq 2, (x, z) \in D_y\}$, $D_y = \{(x, z) | x^2 + z^2 \leq y\}$. 进一步, 有

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}\sqrt{z^2+x^2}} dV \\ &= \int_1^2 dy \iint_{D_y} \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}\sqrt{z^2+x^2}} dV \\ &= 2\pi \int_1^2 e^{\sqrt{y}} dy = 4\pi(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{z^2+x^2}} dS \\ &= 2\pi(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}}. \dots\dots\dots 10 \text{分} \end{aligned}$$

8. 解 易知, 函数 $f(x, y, z) = \ln x + 2 \ln y + 3 \ln z$ 在紧集 $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 6\}$ 上有最大值, 但没有最小值(因为函数 $f(x, y, z)$ 在单位球面上不连续)。作辅助函数

$$L(x, y, z, \lambda) = \ln x + 2 \ln y + 3 \ln z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1), \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

则 f 的最大值点一定满足方程组

$$\begin{aligned} L_x &= \frac{1}{x} - 2x\lambda = 0, \\ L_y &= \frac{2}{y} - 2y\lambda = 0, \\ L_z &= \frac{3}{z} - 2z\lambda = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. \dots\dots\dots 8 \text{分} \end{aligned}$$

解得 $\lambda = 3, x = \frac{\sqrt{6}}{6}, y = \frac{\sqrt{3}}{3}, z = \frac{\sqrt{2}}{2}$. f 唯一可能的极值点一定是最大值点, 所以 $f_{\max} = \ln \frac{\sqrt{3}}{36}$ 10分

9. 记 $u = x^2 - y^2, v = 2xy$, 则 $z = f(u, v)$ 2 分

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf_1 + 2yf_2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2yf_1 + 2xf_2 \dots\dots\dots 6分$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -2y \left[\frac{\partial f_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right] + 2f_2 + 2x \left[\frac{\partial f_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \\ &= -2y[f_{11}2x + 2yf_{12}] + 2f_2 + 2x[2xf_{21} + 2yf_{22}] \\ &= -4xyf_{11} + (4x^2 - 4y^2)f_{12} + 2f_2 + 4xyf_{22} \dots\dots\dots 10分 \end{aligned}$$

三、解析题(记10分)

10. 首先

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| = \left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \dots\dots\dots 3分$$

故对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = 2\varepsilon$, 则当 $\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta$ 时, 恒成立

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| < \varepsilon.$$

因此, 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处是连续的. 5分

易知 $f_x(0, 0) = 0, f_y(0, 0) = 0$. 由于极限

$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)\Delta x - f_y(0, 0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \end{aligned}$$

不存在, 所以函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 不可微. 10分

四、证明题(记20分)

11. 证明记 $u = 2x - 3z, v = 2y - 4z$, 则 $f(u, v) = 0$. 记 $f_1 = \frac{\partial f}{\partial u}, f_2 = \frac{\partial f}{\partial v}$. 于是曲面 Σ 上的任一点 (x, y, z) 处切平面的法向量为 $\vec{n} = (2f_1, 2f_2, -3f_1 - 4f_2)$ 5分

取直线的方向向量为 $\vec{l} = (\frac{3}{2}, 2, 1)$. 易验证 $\vec{n} \cdot \vec{l} = 0$, 即 $\vec{n} \perp \vec{l}$. 所以曲面 $f(2x - 3z, 2y - 4z) = 0$ 的切平面都有一定直线平行. 证毕.....10分

12. 证明

$$I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin 2xt dt,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}(e^{-t^2} \sin 2xt) dt = 2 \int_0^{+\infty} te^{-t^2} \cos 2xt dt.$$

由于

$$|e^{-t^2} \sin 2xt| \leq e^{-t^2},$$

且积分 $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 由威尔斯特拉斯定理可知含参变量的反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin 2xt dt$ 关于 x 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.3分

另一方面

$$|te^{-t^2} \cos 2xt| \leq te^{-t^2}, t \in (0, +\infty),$$

且反常积分 $\int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt$ 收敛, 所以由Weierstrass定理知, 含参变量的积分 $\int_0^{+\infty} te^{-t^2} \cos 2xt dt$ 关于 x 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.6分

由含参变量积分号下求导定理可知

$$\begin{aligned} I'(x) &= \frac{d}{dx} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin 2xt dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}(e^{-t^2} \sin 2xt) dt \\ &= -2 \int_0^{+\infty} te^{-t^2} \cos 2xt dt. \dots\dots\dots 8分 \end{aligned}$$

对 $I'(x)$ 运用分部积分公式可得

$$I'(x) + 2xI(x) + 1 = 0. \dots\dots\dots 10分$$

证毕