

安徽大学 2023—2024 学年第一学期

《数学分析（下）》 参考答案

一、 填空题（每题 4 分，共 20 分）

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \sin \frac{1}{x+y} = \underline{0}$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} (1+xy)^{1/\ln(1+2x)} = \underline{e^{1/2}}$.
2. 已知 $z = z(x, y)$ 是由 $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ 所确定的隐函数, 则 $dz|_{(1,0,-1)} = \underline{dx - \sqrt{2}dy}$.
3. 曲面 $z = 1 - x^2 - y^2$ 上与平面 $x + y - z = 0$ 平行的切平面方程为 $\underline{2x + 2y - 2z + 3 = 0}$.
4. 函数 $u = x^2 + 2yz$ 在 $(1, 1, 1)$ 处方向导数的最大值为 $\underline{2\sqrt{3}}$.
5. 设 $z = f(x, y)$ 二阶可偏导, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$, $f(x, 0) = 1$, $f_y'(x, 0) = x$, 则 $f(x, y) = \underline{y^2 + xy + 1}$.

二、 计算题（共 62 分）

6. (6 分) 写出 $f(x, y) = \frac{e^{x^2+y}}{1-y}$ 在 $(0, 0)$ 处的 3 阶 Taylor 公式(展开至 3 次项).

$$\text{解: } f(x, y) = \frac{e^{x^2+y}}{1-y} = \left(1 + x^2 + y + \frac{(x^2+y)^2}{2} + \frac{(x^2+y)^3}{6} + o(\rho^3) \right) (1 + y + y^2 + y^3 + o(\rho^3)) \quad (3 \text{ 分})$$

$$= 1 + 2y + (x^2 + \frac{5}{2}y^2) + (2x^2y + \frac{8}{3}y^3) + o(\rho^3). \quad (6 \text{ 分})$$

7. (8 分) 设 $f(u, v)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有连续偏导数, $F(\alpha) = \int_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} f(x + \alpha, x - \alpha) dx$. 求 $F'(0)$.

$$\text{解: } F'(\alpha) = \int_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} (f_1'(x + \alpha, x - \alpha) - f_2'(x + \alpha, x - \alpha)) dx + f(\cos \alpha + \alpha, \cos \alpha - \alpha)(-\sin \alpha) - f(\sin \alpha + \alpha, \sin \alpha - \alpha)(\cos \alpha) \quad (5 \text{ 分})$$

$$\text{代入 } \alpha = 0 \text{ 得: } F'(0) = \int_0^1 (f_1'(x, x) - f_2'(x, x)) dx - f(0, 0). \quad (8 \text{ 分})$$

8. (10 分) 求 $z = x^2 + 12xy + 2y^2$ 在区域 $4x^2 + y^2 \leq 25$ 上的最值.

$$\text{解: 先考虑区域 } 4x^2 + y^2 < 25 \text{ 上可能的极值点. 由 } \begin{cases} z'_x = 2x + 12y = 0 \\ z'_y = 12x + 4y = 0 \end{cases} \text{ 得驻点 } (x, y) = (0, 0). \quad (3 \text{ 分})$$

再考虑边界 $4x^2 + y^2 = 25$ 上的极值点. 由 Lagrange 乘子法, 令 $F = x^2 + 12xy + 2y^2 + \lambda(4x^2 + y^2 - 25)$

$$\text{得 } \begin{cases} F'_x = 2x + 12y + 8\lambda x = 0 \\ F'_y = 12x + 4y + 2\lambda y = 0 \\ F'_\lambda = 4x^2 + y^2 - 25 = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } (x, y) = (\pm 2, \mp 3), \left(\pm \frac{3}{2}, \pm 4 \right). \quad (8 \text{ 分})$$

计算这些可能极值点的函数值得:

$$z(0, 0) = 0, z(\pm 2, \mp 3) = -50, z\left(\pm \frac{3}{2}, \pm 4\right) = 106\frac{1}{4}. \text{ 故原函数的最大值为 } 106\frac{1}{4}, \text{ 最小值为 } -50. \quad (10 \text{ 分})$$

注: 求解有条件极值问题时, 可将参数化 $\begin{cases} x = \frac{5}{2} \cos \theta \\ y = 5 \sin \theta \end{cases}$ 代入 z , 再用三角函数知识求解或化为无条件极值也行.

9. (8 分) 计算二重积分 $\int_0^{\sqrt{\pi}} dx \int_x^{\sqrt{\pi}} y^2 \sin(xy) dy$.

解: 原式 $= \int_0^{\sqrt{\pi}} dy \int_0^y y^2 \sin(xy) dx$ (2 分)

$$= -\int_0^{\sqrt{\pi}} y \cos(xy) \Big|_0^y dy = \int_0^{\sqrt{\pi}} y(1 - \cos y^2) dy = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos t dt = \frac{\pi}{2}. \quad (8 \text{ 分})$$

10. (10 分) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (|x| + z) e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz$, 其中 $\Omega = \{(x, y, z) | 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

解: 首先由对称性知 $\iiint_{\Omega} z e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz = 0$, $\iiint_{\Omega} |x| e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz = 2 \iiint_{\Omega_1} z e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz$. 其中

$$\Omega_1 = \{(x, y, z) | 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}. \quad (2 \text{ 分})$$

作球坐标变换 $\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$ 得:

$$\text{原式} = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^2 r \cos \theta \cdot e^{-r^2} \cdot r^2 \cdot \sin \theta dr \quad (6 \text{ 分})$$

$$= 4\pi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \cdot \sin \theta d\theta \int_1^2 r^3 e^{-r^2} dr = \pi(2e^{-1} - 5e^{-4}). \quad (10 \text{ 分})$$

11. (10 分) 设 $u(x, y)$ 在圆盘 $D: x^2 + y^2 \leq \pi$ 上有二阶连续偏导, 且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin(x^2 + y^2)$, n 为边界圆周

∂D 的单位外法向, 计算曲线积分 $\oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} ds$.

解: 设 $n = (n_1, n_2)$, 则 ∂D 上逆时针指向的单位切向量为 $(-n_2, n_1)$.

$$\oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \oint_{\partial D} \text{grad}(u) \cdot n ds = \oint_{\partial D} \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot (n_1, n_2) ds = \oint_{\partial D} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot (-n_2, n_1) ds = \oint_{\partial D} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot dr \quad (4 \text{ 分})$$

$$\xrightarrow{\text{Green 公式}} \iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = \iint_D \sin(x^2 + y^2) dx dy \quad (7 \text{ 分})$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(r^2) \cdot r dr = 2\pi. \quad (10 \text{ 分})$$

12. (10 分) 计算第二型曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{2}{y} f(xy^2) dy dz - \frac{1}{x} f(xy^2) dz dx + (x^2 z + y^2 z + \frac{z^3}{3}) dx dy$, 其中

$f(u)$ 具有连续导数, Σ 为曲面 $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 上侧.

解: 令 $\Sigma_0: z = 0 (x^2 + y^2 \leq 1)$, 正向指向下侧. 由 Gauss 公式,

$$\begin{aligned} & \oiint_{\Sigma + \Sigma_0} \frac{2}{y} f(xy^2) dy dz - \frac{1}{x} f(xy^2) dz dx + \left(x^2 z + y^2 z + \frac{z^3}{3} \right) dx dy = - \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV \\ & = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 r^4 \sin \theta dr = -\frac{2\pi}{5}. \end{aligned} \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{而: } \iint_{\Sigma_0} \frac{2}{y} f(xy^2) dy dz - \frac{1}{x} f(xy^2) dz dx + \left(x^2 z + y^2 z + \frac{z^3}{3} \right) dx dy = 0, \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{故 } \iint_{\Sigma} \frac{2}{y} f(xy^2) dy dz - \frac{1}{x} f(xy^2) dz dx + \left(x^2 z + y^2 z + \frac{z^3}{3} \right) dx dy = -\frac{2\pi}{5}. \quad (10 \text{ 分})$$

三、 分析证明题 (共 18 分)

13. (10 分) 设 $f(x, y)$ 在 $D: x^2 + y^2 \leq 1$ 上有连续偏导, 且在 $\partial D: x^2 + y^2 = 1$ 上有 $f(x, y) \equiv 0$. 证明:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \iint_{D_r} \frac{x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}}{x^2 + y^2} dx dy = -2\pi f(0, 0), \text{ 其中 } D_r: r^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1.$$

$$\text{证明: 令 } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \text{ 由 } \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin \theta \text{ 得 } r \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot r \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot r \sin \theta = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{于是 } I_r = \iint_{D_r} \frac{x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}}{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_r^1 \frac{r \frac{\partial f}{\partial r}}{r^2} \cdot r dr = \int_0^{2\pi} [f(\cos \theta, \sin \theta) - f(r \cos \theta, r \sin \theta)] d\theta \quad (6 \text{ 分})$$

$$= -\int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta = -2\pi f(r \cos \xi, r \sin \xi). \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{故 } \lim_{r \rightarrow 0^+} I_r = \lim_{r \rightarrow 0^+} [-2\pi f(r \cos \xi, r \sin \xi)] = -2\pi f(0, 0). \quad (10 \text{ 分})$$

$$14. (8 \text{ 分}) \text{ 证明: } f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上可导且满足微分方程 } f(x) - f'(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$\text{证明: 首先, } \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} dt \text{ 在 } [\delta, +\infty) (\delta > 0) \text{ 上一致收敛: } \left| \frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} \right| < e^{-\delta t^2} \text{ 且 } \int_0^{+\infty} e^{-\delta t^2} dt \text{ 收敛,}$$

由 Weierstrass 判别法即知成立. (2 分)

$$\text{又显然 } \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上逐点收敛 (甚至由 Weierstrass 判别法知一致收敛), } \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \text{ 关于 } x \text{ 可导,}$$

$$\text{于是 } f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt \text{ 在 } [\delta, +\infty) \text{ 上可导, 且 } f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} dt. \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{由 } \delta \text{ 的任意性和可导的点态性知, } f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上可导且 } f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} dt. \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{于是 } f(x) - f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt + \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}. \quad (8 \text{ 分})$$