

安徽大学 2022—2023 学年第一学期《数学分析（下）》

参考答案

一、 填空题（每空 3 分，共 21 分）

1. 0, 2.

2. $-2\sin 1$;

3. $2x + z - 2 = 0$;

4. $(1, 0, 1), dx + dz$;

5. 1.

二、 计算题（共 66 分）

6. $I(u) = \int_u^{1+u} \frac{1}{1+x^2+u^2} dx$ 为上连续函数，故

$$\lim_{u \rightarrow 0} I(u) = I(0) = \int_0^{1+0} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$7. e^{x+y} = 1 + x + y + \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+y)^3}{6} + o(\rho^3).$$

8. 由 Lagrange 乘子法，设 $f(\lambda, x, y, z) = \frac{(x+y+2z-9)^2}{6} + \lambda \left(\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 - 1 \right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} \lambda = 2y \lambda = z \lambda, \text{ 其中 } \lambda = 0 \text{ 舍. 故得 } x = 4y = 2z. \text{ 代入}$$

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 - 1 = 0 \text{ 解得最远点为 } -\frac{1}{3}(4, 1, 2); \text{ 最近点为 } \frac{1}{3}(4, 1, 2).$$

9. 解：由对称性， $\iint_D (|x| + |y|) dx dy = 4 \iint_{D_1} (x+y) dx dy$ （其中 D_1 为单位圆盘的第

$$\text{一象限部分}）= 4 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r(\sin \theta + \cos \theta) r dr d\theta = \frac{8}{3}.$$

10. 由对称性知， $\iiint_V \frac{x}{1+x^2+y^2+z^2} dx dy dz = \iiint_V \frac{y}{1+x^2+y^2+z^2} dx dy dz = 0,$

$$\text{故原式} = \iiint_V \frac{z}{1+x^2+y^2+z^2} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{r \cos \theta}{1+r^2} r^2 \sin \theta dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^1 \frac{r^3}{1+r^2} dr = \frac{\pi}{2} (1 - \ln 2).$$

$$11. \quad I = \frac{1}{2} \int_C ((x+y+z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)) ds = \frac{1}{2} \int_C (0^2 - 1^2) ds = -\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 1 = -\pi.$$

$$12. \text{ 由 Green 公式有: } \oint_C (x - y \sin x) dx + (xy + \cos x) dy$$

$$= \iint_D \frac{\partial(xy + \cos x)}{\partial x} - \frac{\partial(x - y \sin x)}{\partial y} dx dy = \iint_D y dx dy = \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} y dy = \frac{\pi}{4}.$$

$$13. \text{ 设 } \Sigma_1: z=2, x^2+y^2 \leq 4, \text{ 正向指向上侧. 由 Gauss 公式得:}$$

$$I = \iiint_{\Sigma_1} (z^2 + x) dy dz - z dx dy = \iiint_V 1 + 0 + (-1) dx dy dz = 0. \text{ 故}$$

$$I = -\iint_{\Sigma_1} (z^2 + x) dy dz - z dx dy = 2 \iint_{\Sigma_1} dx dy = 8\pi.$$

$$14. \text{ 证明: } \frac{\partial z}{\partial x} = f' \cdot \frac{1}{x}, \frac{\partial z}{\partial y} = -f' \cdot \frac{1}{y^2}. \text{ 代入可得 } x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = f' - f' = 0.$$

$$15. \text{ 注意到 } 0 \text{ 不是瑕点. 在 } [1, +\infty) \text{ 上, } \left| \frac{\arctan \alpha x}{x(1+x^2)} \right| < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^3}, \text{ 且 } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx \text{ 收敛, 由}$$

$$\text{Weierstrass 判别法知, } I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x}{x(1+x^2)} dx \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上一致收敛;}$$

$$(2): \int_0^{+\infty} \frac{\partial \left(\frac{\arctan \alpha x}{x(1+x^2)} \right)}{\partial \alpha} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+\alpha^2 x^2)} dx, \text{ 同样由 Weierstrass 判}$$

$$\text{别法知其 } (0, +\infty) \text{ 上一致收敛, 且 } \int_0^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x}{x(1+x^2)} dx \text{ 收敛. 故}$$

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x}{x(1+x^2)} dx \text{ 可导且导函数为 } I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+\alpha^2 x^2)} dx$$

$$= \frac{1}{1-\alpha^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\frac{1}{\alpha^2} + x^2} \right) dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+\alpha}. \text{ 再由 } I(0) = 0 \text{ 得}$$

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^\alpha \frac{1}{1+t} dt = \frac{\pi}{2} \ln(1+\alpha).$$

