

安徽大学 2021—2022 学年第一学期

《数学分析（下）》 考试试卷（A 卷）

（闭卷 满分 100 分 时间 120 分钟）

考场登记表序号 _____

题号	一	二	三	总分
得分				
阅卷人				

一、 填空题（每小题 3 分，共 9 分）

得分

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{e^{xy} - 1}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 曲面 $z = \arctan(xy)$ 在 $(1, 1, \frac{\pi}{4})$ 处的切平面方程为 _____.

3. $\left(\int_a^{a^2} \frac{\sin ux}{x} dx \right)' = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、 计算题（共 58 分）

得分

4. (6 分) 写出 $f(x, y) = e^x \ln(1 + y)$ 在 $(0, 0)$ 处的 3 阶 Taylor 公式.

5. (6 分) 计算二重积分 $\iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy$, 其中 D 由 $x = 0, y = x, y = \frac{\pi}{2}$ 围成的平面区域.

6. (6 分) 计算三重积分 $\iiint_V xyz dV$, 其中 V 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 的第一卦限部分.

7. (10 分) 求函数 $f(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z$ 在 3 个坐标平面与 $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ 围成闭区域上的最小值与最大值.

8. (10 分) 计算第一型曲线积分 $\int_C (x+y+z)ds$, 其中 C 由直线段 $AB: A(1,1,0), B(1,0,0)$ 和螺线 $x = \cos t, y = \sin t, z = t (0 \leq t \leq 2\pi)$ 组成.

9. (10 分) 计算第二型曲线积分 $\oint_C (2z+3)dx + (3x+1)dy + (y+2)dz$, 其中 C 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $x+2y+3z=0$ 的交线, 正向规定为: 从 z 轴负半轴看为顺时针方向.

10. (10 分) 计算第二型曲面积分 $\iint_S yzdzdx + (x^2+y^2)zdx dy$, 其中 S 为椭圆抛物面 $x^2+y^2=z (0 \leq z \leq 1)$, 正向指向下侧.

三、证明题 (共 33 分)

得分	
----	--

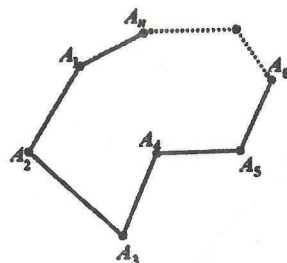
11. (10 分) 证明: 变换 $\begin{cases} u = x-2y \\ v = x+3y \end{cases}$ 可把方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 简化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$ (设二阶偏导都连续).

12. (7 分) 平面 $Ax + By + Cz + D = 0 (C \neq 0)$ 上的一个有界区域 G 在 XOY 平面上的投影为 G_1 .

记 G 和 G_1 的面积分别为 S_G, S_{G_1} . 证明: $\frac{S_G}{S_{G_1}} = \sqrt{\frac{A^2+B^2+C^2}{C^2}}$.

13. (8 分) 证明: 如图, 平面上以 $A_i(x_i, y_i) (1 \leq i \leq n)$ 为顶点的 n 边形的面积为

$S = \frac{1}{2} \left| \sum_{1 \leq i \leq n} (y_{i+1}x_i - x_{i+1}y_i) \right|$. 其中 $x_{n+1} = x_1, y_{n+1} = y_1$.



14. (8 分) $p > 0$ 为常数. 证明: (1) $I(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x^p} dx$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛;

(2) $p = 1$ 时, $I(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 可导, 并求 $I'(t)$.