

## 安徽大学 2020—2021 学年第一学期

## 《数学分析（三）》期末考试试卷(A 卷)

(闭卷 时间 120 分钟)

考场登记表序号\_\_\_\_\_

| 题 号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 总 分 |
|-----|---|---|---|---|---|-----|
| 得 分 |   |   |   |   |   |     |
| 阅卷人 |   |   |   |   |   |     |

## 一、填空题（每空 2 分，共 10 分）

得分

1. 设  $z = e^{\frac{x}{y}}$ , 则  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$  \_\_\_\_\_;

2. 设函数  $f(x)$  是以  $2\pi$  为周期的函数, 且  $f(x) = x, x \in [-\pi, \pi)$ , 则  $f(x)$  的傅里叶级数在分段点处收敛于\_\_\_\_\_;

3. 曲线  $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$  在点  $(1, 1, 1)$  处切线方程是\_\_\_\_\_;

4. 设  $L: \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases} 0 \leq t \leq \pi$ , 则  $\int_L (x^2 + y^2) ds =$  \_\_\_\_\_;

5. 设  $F(x) = \int_x^{\sin x} f(x^2, y) dy$ ,  $f(x, y)$  有连续偏导数, 则  $F'(x) =$  \_\_\_\_\_。

## 二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

得分

6. 下列说法错误的是 ( )。

(A)  $R^2$  是开集但不是闭集

(B)  $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq r^2\}$  是闭集

(C)  $\{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$  是开集

(D)  $\emptyset$  是既开又闭的点集

7. 设  $u = xe^{2y}$ ,  $l$  由起点  $P(1, 0)$  到终点  $Q(3, 1)$ , 则  $\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_P$  等于 ( )。

(A) 0

(B)  $\frac{2}{\sqrt{5}}$

(C)  $\frac{1}{\sqrt{5}}(6 + 2e^2)$

(D)  $\frac{4}{\sqrt{5}}$

8. 下列论断, 正确的是 ( )。

- (A) 函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处的两个累次极限都不存在, 则该函数在  $(x_0, y_0)$  处重极限必定不存在  
(B) 函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处的两个累次极限都存在且相等, 则该函数在  $(x_0, y_0)$  处重极限必定存在  
(C) 函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处的偏导数都存在, 则该函数在  $(x_0, y_0)$  处可微  
(D) 函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处可微, 则该函数在  $(x_0, y_0)$  处必定连续

9. 对于任意光滑封闭曲线  $L$  中, 以下第二型曲线积分中为零的是 ( )。

- (A)  $\oint_L (x - \sin y)dx + xe^y dy$  (B)  $\oint_L (x - y^2)dx - 2xydy$   
(C)  $\oint_L \sin(xy)dx + \cos(x + y)dy$  (D)  $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$

10. 设  $f(x, y, z) = xy^2 + yz^3$ , 则点  $P_0(2, -1, 1)$  处, 梯度  $\text{grad } f(P_0)$  等于 ( )。

- (A)  $(1, -3, -3)$  (B)  $(0, 0, 0)$   
(C)  $(0, 2, -4)$  (D)  $(-3, 1, -4)$

### 三、计算题 (每小题 7 分, 共 49 分)

|    |  |
|----|--|
| 得分 |  |
|----|--|

11. 设  $u = f(x^y, y^x)$  具有连续的二阶偏导数, 求偏导数  $u_x$  和  $u_{xy}$ 。

12. 利用坐标变换求  $\iint_D \sec^2 \frac{x-y}{x+y} dx dy$ , 其中  $D$  由  $x+y=1$ ,  $x=0$  及  $y=0$  围成。

13. 求函数  $f(x, y) = \begin{cases} y \sin \frac{1}{x}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$  在点  $(0, 0)$  的累次极限和重极限, 并研究  $f(x, y)$  在全平面上的连续性。

14. 求极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left(1 + \frac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}, \quad (a \neq 0)。$

15. 利用含参量积分计算  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx。$

16. 计算  $\iint_{\Sigma} (xy + yz + xz) dS$  , 其中  $\Sigma$  为锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被柱面  $x^2 + y^2 = 2ax$  所割下部分。

17. 计算曲面积分  $\iint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ , 其中  $\Sigma$ :  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ , 方向取外侧。

四、证明题（18 题 7 分，19 题 8 分，共 15 分）

|     |  |
|-----|--|
| 得 分 |  |
|-----|--|

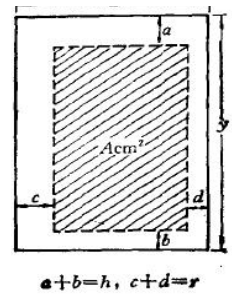
18. 证明：  $(3x + \sin y)dx + (x \cos y)dy$  是二元函数的全微分，并求原函数  $u(x, y)$ 。

19. 证明： 含参变量反常积分在区间  $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$  上  $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin 2x}{x + \alpha} dx$  一致收敛。

五、解答题（每小题 8 分共 16 分）

得 分

20. 一页长方形白纸，要求印刷面积占  $A\text{cm}^2$ ，并使所留页边空白为：上部与下部宽度之和为：  $a+b=h\text{ cm}$ ，左部与右部宽度之和为：  $c+d=r\text{ cm}$  ( $A, r, h$  为已知数)，求页面的长( $y$ )和宽( $x$ )，使它的面积最小。



21. 求曲面  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$  与  $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$  所围成的立体体积。