

2020-2021 第一学期《数学分析》（三）A卷 参考答案及评分标准

一、填空题(每空2分，共10分)

1. 0; 2. 0; 3. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}$;

4. πa^3 ; 5. $f(x^2, \sin x) \cos x - f(x^2, x) + 2x \int_x^{\sin x} f_1(x^2, y) dy$.

二、选择题(每空2分，共10分)

6. A; 7. D; 8. D; 9. B; 10. A.

三、计算题(每小题7分，共49分)

11. 解:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1 y x^{y-1} + f_2 y^x \ln y; \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= (x^{y-1} + y x^{y-1} \ln x) f_1 + y x^{2y-1} \ln x f_{11} \\ &\quad + x y x^{y-1} y^{x-1} f_{12} + (y^{x-1} + x y^{x-1} \ln y) f_2 \\ &\quad + x y^{2x-1} \ln y f_{22} + \ln x \ln y x^y y^x f_{21}. \dots\dots\dots 7 \text{分} \end{aligned}$$

12. 解: 令 $\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{v-u}{2} \end{cases}$ 则有 $|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}| = \frac{1}{2}$, 积分区域

为 $\begin{cases} -v \leq u \leq v, \\ 0 \leq v \leq 1, \end{cases} \dots\dots\dots 4 \text{分}$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{2} \int_0^1 dv \int_{-v}^v \sec^2 \frac{u}{v} du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 v \tan(\frac{u}{v})|_{-v}^v dv \\ &= \tan 1 \int_0^1 v dv = \frac{\tan 1}{2}. \dots\dots\dots 7 \text{分} \end{aligned}$$

13. 解:

$$(1). \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} y \sin \frac{1}{x} = 0;$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{x} \text{ 不存在};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{x} = 0. \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

(2) $x \neq 0$ 时, $f(x, y) = y \sin \frac{1}{x}$ 为连续函数;

$x = 0, y \neq 0$ 时, $f(x, y) = y \sin \frac{1}{x}$ 不连续;

$x = 0, y = 0$ 时, 因为 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} y \sin \frac{1}{x} = f(0, 0) = 0$ 连续.

因此 $f(x, y)$ 在 $x = 0, y \neq 0$ 时不连续, 其余均连续. 7分

14.解:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left(1 + \frac{1}{xy}\right)^{xy \frac{x}{y(x+y)}} \dots\dots\dots 3\text{分} \\ &= e^{\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \frac{x}{y(x+y)}} \\ &= e^{\frac{1}{a}}. \dots\dots\dots 7\text{分} \end{aligned}$$

15.解: $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx = \int_0^{+\infty} dx \int_1^2 e^{-xy} dy. \dots\dots\dots 2\text{分}$

因为二元函数 e^{-xy} 在 $[1, 2] \times [0, +\infty)$ 连续, 且 $\int_0^{+\infty} e^{-xy} dx$ 在区间 $[1, 2]$ 上一致收敛, 因此可以交换积分次序

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} dx \int_1^2 e^{-xy} dy &= \int_1^2 dy \int_0^{+\infty} e^{-xy} dx \\ &= \int_1^2 \frac{e^{-xy}}{-y} \Big|_0^{+\infty} dy \\ &= \int_1^2 \frac{1}{y} dy = \ln 2. \end{aligned}$$

..... 7分

16.解: 由积分区域的对称性可得 $\iint_D (xy + yz) dS = 0$. 因此

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_D xz dS \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 2ax} x \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{2} dx dy. \end{aligned}$$

..... 5分

令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 则有

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq 2ax} x \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{2} dx dy &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} r^3 \cos \theta dr \\ &= \frac{64}{15} \sqrt{2} a^4. \end{aligned}$$

..... 7分

17.解: 将 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 代入被积函数

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{3^3} \sum \iint xdydz + ydzdx + zdxdy && \dots\dots\dots 2\text{分} \\
&= \frac{1}{3^3} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 9} 3dxdydz && \dots\dots\dots 4\text{分} \\
&= 4\pi. && \dots\dots\dots 7\text{分}
\end{aligned}$$

四、证明题(18题7分,19题8分, 共15分)

18.证: $P(x, y) = 3x + \sin y; Q(x, y) = x \cos y$, 因为 $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \cos y$, 所以存在 $u(x, y)$ 使 $du(x, y) = (3x + \sin y)dx + x \cos y dy$. $\dots\dots\dots 4\text{分}$

且有

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (3s + \cos t)ds + s \cos t dt + C \\
&= \int_0^x 3s ds + \int_0^y x \cos t dt + C \\
&= \frac{3x^2}{2} + x \sin y + C.
\end{aligned}$$

$\dots\dots\dots 7\text{分}$

19.证: 因为任意 $A > 0$, $|\int_0^A \sin 2x dx| \leq 2$, 即 $\int_0^A \sin 2x dx$ 关于 $\alpha \in [0, \alpha_0]$ 一致有界;

$\dots\dots\dots 3\text{分}$

又因为 $\frac{e^{-\alpha x}}{x+\alpha}$ 关于 x 单调, 且 $|\frac{e^{-\alpha x}}{x+\alpha}| \leq \frac{1}{x}$, 可知当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{e^{-\alpha x}}{x+\alpha}$ 关于 $\alpha \in [0, \alpha_0]$ 一致趋于零.

$\dots\dots\dots 7\text{分}$

由 Dirichlet 判别法, 可知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x+\alpha} e^{-\alpha x} dx$ 在 $\alpha \in [0, \alpha_0]$ 一致收敛.

$\dots\dots\dots 8\text{分}$

五、解答题(每小题8分,共16分)

20.解: 由题意知 $A = (y - h)(x - r)$, 长方形的面积 $S = xy$. 设 Lagrange 函数为

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda((y - h)(x - r) - A).$$

令

$$\begin{cases} L_x = y + \lambda(y - h) = 0, \\ L_y = x + \lambda(x - r) = 0, \\ L_\lambda = (y - h)(x - r) - A = 0. \end{cases}$$

.....4分

解方程组可得 $\lambda = \pm\sqrt{\frac{rh}{A}} - 1$,由题意取 $\lambda = -\sqrt{\frac{rh}{A}} - 1$.

这时可得

$$\begin{cases} x &= (1 + \sqrt{\frac{A}{rh}})r, \\ y &= (1 + \sqrt{\frac{A}{rh}})h. \end{cases}$$

因此 $\begin{cases} x &= (1 + \sqrt{\frac{A}{rh}})r \\ y &= (1 + \sqrt{\frac{A}{rh}})h \end{cases}$ 时,长方形白纸的面积最小.

.....8分

21.解:球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 与锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的交线为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1. \end{cases}$$

则球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 与锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围立体 Ω 的体积为 $\iiint_{\Omega} dV$.

.....4分

采用柱面坐标系

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta, \\ z &= z. \end{cases}$$

我们有

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} dV &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_r^{\sqrt{2-r^2}} dz \\ &= 2\pi \int_0^1 r(\sqrt{2-r^2} - r) dr \\ &= \frac{4\pi}{3}(\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

.....8分