

**安徽大学2019-2020学年第一学期**  
**《数学分析（下）》考试试卷（A卷）**  
 （闭卷 时间120分钟）

考场登记表序号 \_\_\_\_\_

| 题号  | 一 | 二 | 三 | 四 | 总分 |
|-----|---|---|---|---|----|
| 得分  |   |   |   |   |    |
| 阅卷人 |   |   |   |   |    |

**一、填空题 (每空3分, 共9分)**

|    |  |
|----|--|
| 得分 |  |
|----|--|

1. 设  $z = x^2 - xy + y^2$ , 则它在点  $(0, 1)$  处沿方向  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  的方向导数为\_\_\_\_\_.

2. 设三元函数  $f(x_1, x_2, x_3)$  在原点的某一邻域内连续, 且  $f(0, 0, 0) = 1$ , 则

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^3} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq r^2} f(x_1, x_2, x_3) dV = \underline{\hspace{2cm}}.$$

3. 周期为2函数  $f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in [-1, 0), \\ x^2 & , x \in [0, 1), \end{cases}$ , 则  $f(x)$  的Fourier级数在  $x = 1$  收敛于\_\_\_\_\_.

**二、计算题 (共58分)**

|    |  |
|----|--|
| 得分 |  |
|----|--|

4. (6分) 计算极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ .

5. (6分) 设  $z = (x^2 + y^2)e^{-\arctan \frac{y}{x}}$ , 计算  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

6. (6分) 计算二重积分  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ , 其中  $D$  为直线  $y = x, y = x + a, y = a$  和  $y = 3a$  ( $a > 0$ ) 所围成.

7. (10分) 计算曲线积分  $\int_L (\frac{-y}{4x^2 + y^2} + 3y) dx + (\frac{x}{4x^2 + y^2} + 2x) dy$ , 其中  $L$  是以  $(1, 0)$  为中心, 以  $R$  为半径 ( $R > 1$ ) 的圆周, 取逆时针方向.

8. (10分) 计算第二类曲面积分  $\iint_{\Sigma} \frac{xdydz+yzdx+zxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$ , 其中  $\Sigma$  是下半球面  $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ , 方向取上侧.

9. (10分) 设  $a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ , 求  $n$  元函数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n a_k x_k$  在单位球面  $\sum_{k=1}^n x_k^2 = 1$  上的最大值和最小值.

10. (10分) 计算三重积分  $\iiint_{\Omega} x^2 z dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = xy$ , 平面  $y = x$ ,  $x = 1$  和  $z = 0$  所围成.

三、证明题(共33分)

|    |  |
|----|--|
| 得分 |  |
|----|--|

11. (10分) 设  $I(x) = \int_0^{\infty} e^{-t^2} \sin(2xt) dt$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 证明:

(1)  $I(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续;

(2)  $I''(x) - (4x^2 - 2)I(x) + 2x = 0$ .

12. (9分) 证明: 曲面  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a} (a > 0)$  上任一点的切平面在各坐标轴上的截距之和等于常数.

13. (6分) 设二元函数:  $f(x, y) = \frac{1}{1 - xy}, (x, y) \in D = [0, 1) \times [0, 1)$ , 证明:  $f$  在  $D$  上不一致连续.

14. (8分) 设

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in [-\pi, 0), \\ 0 & , \quad x \in [0, \pi), \end{cases}$$

(1) 求 $f(x)$ 的Fourier级数展式;

(2) 证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ .