

2018-2019 第一学期《数学分析》（下）
B卷答案及评分标准

一、填空题（每题3分，共12分）

1. 紧集; 2. $(yf_1 + \frac{1}{y}f_2)dx + (xf_1 - \frac{x}{y^2}f_2)dy$; 3. $3y - 2z - 1 = 0$. 4.

$$\frac{zf_2}{1 - yf_1 - xf_2}.$$

二、计算题（共60分）

5. (8分) 计算极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2 \sin(x^2 + y^2)}{\ln(1 + (x^2 + y^2)^2)}.$

解:

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2 \sin(x^2 + y^2)}{\ln(1 + (x^2 + y^2)^2)} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

由于 $0 \leq |\frac{xy}{x^2 + y^2}| \leq \frac{1}{2}$, 且 $\lim_{y \rightarrow 0} y = 0$, 所以 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = 0$. 所以 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2 \sin(x^2 + y^2)}{\ln(1 + (x^2 + y^2)^2)} = 0$.

6. (8分) 计算极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y \rightarrow 0^+}} \frac{\ln(x + e^y)}{x + y}.$

解:

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y \rightarrow 0^+}} \frac{\ln(x + e^y)}{x + y} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y \rightarrow 0^+}} \frac{x + e^y - 1}{x + y} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y \rightarrow 0^+}} \frac{x + (1 + y + o(y)) - 1}{x + y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y \rightarrow 0^+}} \left(1 + \frac{o(y)}{x+y} \right) \\
&= 1 + \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y \rightarrow 0^+}} \frac{o(y)}{y} \times \frac{y}{x+y}
\end{aligned}$$

对 $x > 0, y > 0$ 成立 $0 < \frac{y}{x+y} < 1$. 显然 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y \rightarrow 0^+}} \frac{o(y)}{y} = 0$, 所以 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y \rightarrow 0^+}} \frac{o(y)}{y} \times \frac{y}{x+y} = 0$. 因此,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y \rightarrow 0^+}} \frac{\ln(x + e^y)}{x + y} = 1.$$

7. (8分) 计算反常重积分 $\int_{R^4} e^{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$.

解:

$$\begin{aligned}
&\int_{R^4} e^{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2^2} dx_2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_3^2} dx_3 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_4^2} dx_4 \\
&= 2^4 \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^4 \\
&= 2^4 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^4 \\
&= \pi^2
\end{aligned}$$

8. (8分) 计算二重积分 $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$, 其中 D 是由 $x+y=2$, 及 $x=0$ 和 $y=0$ 所围

成的区域.

解: 易知, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2-x\}$. 令 $x+y=u$, $\frac{x-y}{x+y}=v$, 则 $x = \frac{1}{2}u(v+1)$, $y = \frac{1}{2}u(1-v)$, $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -\frac{1}{2}u$, $D' = \{(u, v) | 0 \leq u \leq 2, -1 \leq v \leq 1\}$.

于是有

$$\begin{aligned}
&\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy = \iint_{D'} e^v |J| du dv \\
&= \int_0^2 \frac{1}{2} u du \int_{-1}^1 e^v dv \\
&= e - \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

9. (10分) 计算第一类曲面积分 $\iint_{\Sigma} (xy + 2y^3z \cos(x^2 + y^4) + zx) dS$, 其中 Σ 是由锥

面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2Rx$ 所截的部分.

解: 记 $D = \{(x, y) | (x-R)^2 + y^2 \leq R^2\}$. 由 Σ 的对称性可知 $\iint_{\Sigma} xy dS = \iint_{\Sigma} 2y^3z \cos(x^2 + y^4) dS = 0$. 于是

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} (xy + 2y^3z \cos(x^2 + y^4) + zx) dS \\ &= \iint_{\Sigma} zx dS \\ &= \iint_D x \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\ &= \sqrt{2} \iint_D x \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\ &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2R \cos \theta} (r \cos \theta) r^2 dr \\ &= \frac{64}{15} \sqrt{2} R^4. \end{aligned}$$

10. (10分) 计算曲线积分 $\int_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, 其中 L 是以 $(1, 0)$ 为中心、以 R 为半径的圆

周 ($R > 1$), 逆时针方向.

解: 以原点为圆心作半径为 ϵ (ϵ 充分小) 的圆, 记圆周为 l , 取顺时针方向. 记圆周 L 和 l 围成有界闭区域 D . 记 $P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, 则 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在 D 中具有连续偏导数. 运用 Green 公式, 并注意到 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 得

$$\begin{aligned} \int_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} &= \oint_{L \cup l} P(x, y) dx + Q(x, y) dy - \int_l P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \int_{l^-} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \\ &= \int_{l^-} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy. \end{aligned}$$

注意到 l^- 的参数方程为: $\begin{cases} x = \epsilon \cos \theta \\ y = \epsilon \sin \theta \end{cases} \quad \theta: 0 \rightarrow 2\pi$. 因此有

$$\begin{aligned} & \int_{l^-} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta = 2\pi \end{aligned}$$

所以 $\int_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 2\pi$.

11. (8分) 计算极限 $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + (1 + \frac{x}{y})^y}$.

解: 记 $f(x, y) = \frac{1}{1 + (1 + \frac{x}{y})^y}$. 易知, $f(x, y)$ 在 $[0, 1] \times [1, +\infty)$ 上连续. 由连续性

定理知 $I(y) = \int_0^1 \frac{dx}{1 + (1 + \frac{x}{y})^y}$ 在 $y \in [1, +\infty)$ 上连续. 所以

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +\infty} I(y) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + (1 + \frac{x}{y})^y} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x}{y})^y} = \int_0^1 \frac{1}{1 + e^x} dx = \ln \frac{2e}{1 + e}. \end{aligned}$$

12. (10分) 设 Ω 为抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = h$ ($h > 0$) 所围成的闭区域, 求 Ω 的体积.

解: Ω 在 xoy 面上的投影 $\Omega_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq h\}$. 于是

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iint_{\Omega_{xy}} dx dy \int_{x^2+y^2}^h dz \\ &= \iint_{\Omega_{xy}} [h - (x^2 + y^2)] dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{h}} (h - r^2) r dr \\ &= \frac{\pi h^2}{2}. \end{aligned}$$

13. (10分) 计算球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ ($a > 0$) 包含在锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 内部分 Σ 的面积.

解：先求球面与锥面的交线. 联立方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2, \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

得交线为 $x^2 + y^2 = a^2, z = a$. 进一步知 Σ 在 xOy 面内的投影为 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

$$\begin{aligned} S &= \iint_{\Sigma} dS = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\ &= \iint_D \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2a^2 - (x^2 + y^2)}} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2a^2 - r^2}} r dr \\ &= (4 - 2\sqrt{2})\pi a. \end{aligned}$$

14. (8分) 设 $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx$, 证明:

(1) $I(\alpha)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续;

(2) 当 $\alpha > 0$ 时, $I'(\alpha)$ 存在且 $I'(\alpha) = -\frac{1}{1 + \alpha^2}$.

证明: (1) 定义 $f(x, \alpha) = \begin{cases} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$ 易知, $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} f(x, \alpha) dx$.

显然 $f(x, \alpha)$ 与 $\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) = -e^{-\alpha x} \sin x$ 在 $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ 上连续. 由 Abel 判别法知 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx$ 关于 α 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛. 由连续性定理知 $I(\alpha)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续.

(2) 对任意 $\alpha_0 > 0$, $|\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha)| = |e^{-\alpha x} \sin x| \leq e^{-\alpha_0 x}$. 又 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x} dx$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法知 $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx$ 关于 α 在 $[\alpha_0, +\infty)$ 上一致收敛. 由积分号下可导性定理知

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) dx = - \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx.$$

由 α_0 的任意性知, 对一切 $\alpha > 0$ 成立

$$I'(\alpha) = - \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx.$$

由分部积分法易知 $I'(\alpha) = -\frac{1}{1 + \alpha^2}$.