

安徽大学2018-2019学年第一学期
《数学分析（下）》考试试卷（A卷）
 （闭卷 时间120分钟）

考场登记表序号 _____

题号	一	二	三	四	总分
得分					
阅卷人					

一、填空题（每空2分，共8分）

得分	
----	--

- 曲线 $\begin{cases} x + y + z = \frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 + z^2 = \frac{17}{4} \end{cases}$ 在点 $(1, 1, -\frac{3}{2})$ 处的法平面方程为_____.
- 函数 $z = x^2 + xy + y^2$ 在 $(1, 1)$ 处的方向导数的最小值为_____.
- 抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $z = 2$ 所割下的有界部分的面积为_____.
- 方程 $\sin y + e^{x^2} - 2y = 0$ 确定函数 $y = f(x)$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

二、计算题（共54分）

得分	
----	--

- (6分) 计算极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{2+xy} - \sqrt{2}}{\sin xy}$.

6. (6分) 计算极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left[(x+y) \cos \frac{x}{x^2+y^2} + (x-y) \sin \frac{y}{x^2+y^2} \right]$.

7. (6分) 计算极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (\ln x^3 + \ln y^3) e^{-(x+y)}$.

8. (6分) 计算二重积分 $\iint_D [x^3 \sin(x^4+y^2) + x^2+y^2] dx dy$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 所围成的闭区域.

9. (6分) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (z+1) dx dy dz$, 其中 Ω 是由 $z = xy$, 平面 $x + y = 1$ 和 $z = 0$ 所围成的区域.

10. (8分) 设 $f(t)$ 具有连续偏导数, $u = f(x + 2y + 3z)$, 求 $d^n u$, 其中 n 为自然数.

11. (8分) 计算极限 $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{1}{x^2 \cos \alpha x + 4x + 8} dx$.

12. (8分) 计算反常重积分 $\iiint_{\Omega} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz$ 的值, 其中 $\Omega = \{(x, y, z) | z \geq 0, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.

三、应用题(共28分)

得分	
----	--

13. (10分) 设有一质点在外力 $\vec{F} = (x^2 - y + \cos x)\vec{i} + (x + \sin^2 y + 2y)\vec{j}$ 的作用下从原点 $(0, 0)$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 的上半部分移动到点 $(2, 0)$, 求力 $\vec{F}$ 所做的功.

14. (10分)一不可压缩流体(密度为1)的流速为 $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + 2z\vec{k}$, 求单位时间内通过上半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 上侧的流量.

15. (8分) 求曲线 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ 上的点到原点的最长距离和最短距离.

四、证明题(10分)

得分	
----	--

16. (10分) 设 $I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2} dx$, 证明:

(1) $I(\alpha)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续;

(2) 当 $\alpha > 0$ 时, $I(\alpha)$ 满足方程 $I''(\alpha) + I(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$.