

68

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 分)

1. 设 $E = \{x - [x] \mid x \in \mathbb{R}\}$, 则 $\sup E = \underline{\hspace{1cm}}$, $\inf E = \underline{\hspace{1cm}}$;2. 曲线 $y = xe^{-2x}$ 的拐点是 $\underline{\hspace{2cm}}$;3. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{\pi}{x} + x, & x < 0, \\ ax + b, & x \geq 0, \end{cases}$ $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导,则 $a = \underline{\hspace{1cm}}$, $b = \underline{\hspace{1cm}}$.

二、计算题 (本大题有两题, 共 33 分)

1. 计算数列极限 (每小题 5 分, 共 15 分)

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n^2 + 1} - 1) \sin n!$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n-1}\right)^n$;(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}{n^4}$.

2. 计算函数极限: (每小题 6 分, 共 18 分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin 3x}$; (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x\right)^x$; (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{e^x \ln(1+x) - x}$

三、求解题 (本大题有两题, 共 28 分)

1. 求不定积分 (每小题 6 分, 共 18 分)

(1) $\int \frac{x}{4+x^4} dx$; (2) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx (a > 0)$; (3) $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$.2. 设 $x = t(1 - \cos t)$, $y = t \sin t$, 求由此参数方程确定的函数的二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$. (10 分)

四、证明题 (本大题有 3 题, 共 24 分)

1. 证明函数 $\cos x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致连续. (7 分)2. 设 $\{x_n\}$ 为有界数列, $\{x_n\}$ 不收敛, 证明: 存在 $\{x_n\}$ 的两个收敛子列 $\{x_{n_k}^{(1)}\}$ 、 $\{x_{n_k}^{(2)}\}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^{(1)} = a$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^{(2)} = b$, $a \neq b$. (8 分)3. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, $g'(x) \neq 0$, 证明: $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$. (9 分)

(0)

一、填空题（每空 5 分，共 15 分）

1. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+\sin x) - e^x - 1$ 与 ax^2 是等价无穷小量, 则 $a =$ _____;
2. 函数 $y = \frac{1-x}{1+x^2}$ 的极大值点是 _____;
3. 曲线 $y = \sqrt[3]{(x-4)(x+1)^2}$ 的渐近线方程为 _____。

二、计算题（本大题有两题，共 36 分）

1、计算下列数列极限（每小题 6 分，共 18 分）

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n)$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}}$; (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)\ln(n+1) - \ln(n+1)!}{2n+3}$ 。

2、求下列函数极限：（每小题 6 分，共 18 分）

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + 1 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2}) \sin x^2}$

三、求解题（本大题有两题，共 20 分）

1、设 $y = x^2 \cos 2x$, 求 $y^{(40)}$ 。(10 分)

2、求由方程 $y + 2xe^y = 1$ 所确定的隐函数的二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 。(10 分)

四、证明题（本大题有 4 题，共 29 分）

1、证明：当 $x > 0$ 时, $\ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ (10 分)

2、设数列 $\{x_n\}$ 无界, 但不是无穷大量, 证明：存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}^{(1)}\}$ 、 $\{x_{n_k}^{(2)}\}$, 使得 $\{x_{n_k}^{(1)}\}$ 为无穷大量, $\{x_{n_k}^{(2)}\}$ 收敛。(7 分)

3、设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, $f(0) = 0$, $f(x) \neq 0 (0 < x < 1)$, 证明:

$\exists \xi \in (0, 1)$, 使 $\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)} = \frac{2f'(\xi)}{f(\xi)}$ 。(6 分)

4、设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续, $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$, 证明: $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续。(6 分)



12

一、填空题 (每空 3 分, 共 12 分)

得分	
----	--

1. 设 $f(0)=0$, $|f(x)|$ 在 $x=0$ 点可导, 则 $f'(0)=$ _____;2. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt[3]{1+x^2}-1$ 等价于 αx^β ,
则 $\alpha =$ _____, $\beta =$ _____。3. 曲线 $y=(x+2)e^x$ 的拐点是 _____;

二、计算题 (共 40 分)

得分	

1. 计算数列极限 (每小题 5 分)

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2 + 1}{3n^3 - n + 3};$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[3]{n^2 + 1} - \sqrt{n});$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[n]{n^n+1}});$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!}$

二、计算函数极限: (每小题 5 分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 4x}{x^2};$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1});$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{2}{\pi} \arctan \frac{x^2}{x+1})^x$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + e^{-2x^2} - 2\cos x}{x^4}$

三、求解题 (本大题有两题, 共 20 分)

得分	

1. 求函数 $y = [\ln(2e^{\sin x} + 1)]^x$ 的导数 y' ; (10 分)2. 求由方程 $e^{xy} + y + x = 2$ 确定的隐函数的二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 。(10 分)

四、证明题 (本大题有 3 题, 共 28 分)

得分	
----	--

1. (1) 证明: 当 $x \neq 0$ 时, $e^x > 1+x$;(2) 证明: 数列 $\{x_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{1^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \right\}$ 收敛。(10 分)2. (1) 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续且有界, 证明: $f(x)g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续;(2) 证明: 函数 $x \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致连续。(10 分)3. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上三阶可导, $f(0)=0, f(1)=1, f'(\frac{1}{2})=0$, 证明: $\exists \xi \in (0, 1)$, 使 $|f'''(\xi)| \geq 24$ 。(8 分)

13

一、填空题 (每空 3 分, 共 12 分)

1. 设函数 $\varphi(x)$ 在点 a 连续, $f(x) = |x-a|\varphi(x)$, 若 $f(x)$ 在点 a 可导, 则 $\varphi(a) = \underline{\hspace{2cm}}$;2. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt[3]{2-\cos x} - 1$ 等价于 αx^β , 则 $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$, $\beta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。3. 曲线 $y = x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}$ 的渐近线方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

二、计算题 (共 35 分)

1、计算数列极限 (每小题 5 分)

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n}{n+1}$;

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$;

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n \ln n}$ 。

2、计算函数极限: (每小题 5 分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin x^2} \right)$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{1-x}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \ln(1+x)}{x^2}$ 。

三、求解题 (本大题有两题, 共 20 分)

1. (10 分) 求由方程 $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$ ($a > 0$) 所确定的隐函数 $y(x)$ 的二阶导数 y'' ;2. (10 分) 求摆线 $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$ 在 $t = \pi$ 处的一阶导数 $\frac{dy}{dx}$ 和二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 的值。

四、证明题 (本大题有 4 题, 共 33 分)

1. (8 分) 证明: 当 $x > 0$ 时, $e^x - 1 > x + \frac{x^2}{2}$;2. (8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 1$ 。求证: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) + f'(\xi) = 1$ 。3. (8 分) 设函数 $f(x)$ 在有限开区间 (a, b) 连续, 证明 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续的充分必要条件是: $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$ 都存在。4. (9 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上二阶可导, 且有 $|f(x)| \leq M_0, |f''(x)| \leq M_2, \forall x \in (-\infty, +\infty)$,(1) 写出 $f(x+h)$ 和 $f(x-h)$ 在 x 处的 Taylor 公式;(2) 求证: $|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{h}{2} M_2, \forall h > 0$;(3) 求 $\frac{M_0}{h} + \frac{h}{2} M_2$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值;(4) 求证: $|f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}$ 。

一、填空题 (每空 3 分, 共 9 分)

1. 函数 $y = \frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$ 的极大值点为 _____;
2. 曲线 $y = \frac{x^2}{1+x}$ 的斜渐近线方程是 _____;
3. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 则 $|f(x)|$ 在 $x=0$ 点的导数为 _____

二、计算题 (共 44 分)

1、计算数列极限 (每小题 5 分)

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+1}{\sqrt{n^4+1}-n+3}$;
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{3}} + \frac{1}{n+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{2n-1}} \right)$;
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{1+\ln n}$;
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{3}+\cdots+n\sqrt[n]{n}}{n^2}$

2、计算函数极限: (每小题 6 分)

- (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+3x-2}{4x^3-2x^2+1}$;
- (2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (\sin x)^{\tan x}$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{\sin x} \right)$;
- (4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{\sqrt[4]{1-x} - \cos \sqrt{\frac{x}{2}}}$

三、求解题 (本大题有两题, 共 23 分)

1. 求函数 $y = (x^2+1)\sin 2x$ 的 50 阶导数; (13 分)
2. 设 $x = t(1+\sin t)$, $y = t \cos t$, 求由此参数方程确定的函数的二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$. (10 分)

四、证明题 (本大题有 3 题, 每题 8 分, 共 24 分)

1. (1) 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在有限, 证明: $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界;
(2) 证明: 函数 $\ln x$ 在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 上一致连续。
2. (1) 证明: 当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$;
(2) 证明: 数列 $\{x_n\} = \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right\}$ 收敛。
3. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 上可导, $f(0) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = 2$, $f(1) = 1$, 证明:
(1) $\exists \xi \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使 $f(\xi) = 2\xi$;
(2) $\exists \eta \in (0, \xi)$, 使得 $f'(\eta) - 2\eta[f(\eta) - 2\eta] = 2$ 。



一、填空题 (每小题 3 分, 共 9 分)

1. 设 $f'(1)=2$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1+2h)}{h} =$ _____;
2. 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{4x^2+x+1}-(ax+b)] = 0$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____;
3. 曲线 $y = e^x - x^2 + 3x - 1$ 的拐点的横坐标 $x =$ _____.

二、计算题 (共 48 分)

1、计算数列极限 (每小题 6 分)

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n + 4}{3n^3 - 2n^2 + 2}$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n \sin \frac{\pi}{n}$;
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+2a^2+\cdots+na^n}{na^{n+2}} (a>1)$; (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}})$;

2、计算函数极限: (每小题 6 分)

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x - \cos x}{\ln(1+x^2)}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x})$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (e^{\frac{1}{2x}} - \sqrt{1+\frac{1}{x}})$; (4) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x})^x$;

三、求解题 (本大题有两题, 共 17 分)

1. 已知函数 $y = x^4 e^{-x}$, 求 $d^4 y$; (9 分)

2. 求由方程 $e^{xy} + x^2 y - 2 = 0$ 所确定的隐函数 y 的二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$. (8 分)

四、分析与证明题 (本大题有四题, 共 26 分)

1. 证明: 当 $x > 0$ 时, $\ln x \leq \sqrt{x} + 2 \ln 2 - 2$; (6 分)

2. 设 $\{x_n\}$ 是一个单调数列, 且 $\{x_n\}$ 存在收敛的子列, 证明 $\{x_n\}$ 收敛. (6 分)

3. (1) 证明: $\sin x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 上不一致连续; (4 分)

(2) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \sin x^2] = A$ (A 为有限数), 试问 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是否一致连续? 为什么? (4 分)

4. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 证明:

存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $\frac{1}{e^b - e^a} \begin{vmatrix} e^a & e^b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f'(\xi) - f(\xi)$. (6 分)



18

一、填空题（每空 2 分，共 10 分）

1. 设 $y = xe^{-2x}$ ，则 $dy =$ _____；
2. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & x < 0, \\ a+b\ln(x+1), & x \geq 0, \end{cases}$ $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导，则 $a =$ _____， $b =$ _____；
3. 设 $E = \{\frac{2^n}{n!} | n = 2, 3, \dots\}$ ，则 $\sup E =$ _____， $\inf E =$ _____。

二、计算题（共 48 分）

1、计算数列极限（每小题 6 分）

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2\sqrt{n} + 3}{4n^2 - n - 1}$ ；
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+n})$ ；
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \sin n$ ；
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3^3+5^3+\dots+(2n-1)^3}{n^4+1}$

2、计算函数极限：（每小题 6 分）

- (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 1}{x^3 + 4x + 3}$ ；
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 3x}{\ln \tan 5x}$ ；
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$
- (4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) \right)$

三、求解题（本大题有两题，21 共分）

1. 设 $x = t - \sin t, y = t \cos t$ ，求由此参数方程确定的函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$ ；（10 分）
2. 确定曲线 $y = \ln(x^2 + 1)$ 上凸区间和下凸区间，并求其拐点。（11 分）

四、分析与证明题（每小题 7 分，共 21 分）

1. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2^n} (n = 1, 2, \dots)$ ，证明： $\{a_n\}$ 收敛。
2. 证明：
 - (1) 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}] = 0$ ；
 - (2) 函数 x^3 在 $[0, +\infty)$ 上不一致连续。
3. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导、有界，并且满足 $|2f(x) + f'(x)| \leq 1 (\forall x \in (-\infty, +\infty))$ ，证明：
 - (1) 对于 $a < b$ ，有 $|e^{2b}f(b) - f(a)e^{2a}| \leq \frac{1}{2}(e^{2b} - e^{2a})$ ；
 - (2) $\forall x \in (-\infty, +\infty), |f(x)| \leq \frac{1}{2}$ 。





一、(6分) 由数列极限定义证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sin n}{4n^2 + 1} = \frac{1}{4}.$$

二、计算题 (共 48 分)

1、计算数列极限 (每小题 6 分)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 2n + 1}{n^3 - 3n^2 - 1}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-3});$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin 1 + |\sin 2| + \cdots + |\sin n|)^n;$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n}{n \ln n}.$$

2、计算函数极限: (每小题 6 分)

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x); \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+2x)} - \frac{1}{2 \sin x} \right);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} (\sin^2 x + \cos x)^{\frac{1}{x^2}}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + \cos x) - \sqrt[4]{1+2x^2} + 1}{x^4}.$$

三、求解题 (本大题有两题, 每题 9 分, 共 18 分)

得分	
----	--

1. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $e^y + xy = 1$ 确定的隐函数, 求 $y''(x)$ 。

2. 求曲线 $y = 2x \arctan x - \frac{1}{6x^2}$ 的渐近线及拐点。

四、分析与证明题 (每小题 7 分, 共 28 分)

得分	
----	--

1. 设 $x_1 = 1, x_{n+1} = 2 + \frac{3}{1+x_n}, n = 1, 2, \dots$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限。

2. 证明: 函数 $e^{\sin x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, $\sin e^x$ 在 $[0, +\infty)$ 上不一致连续。

3. 证明: 当 $x > 0$ 时, $1 + x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) > \sqrt{x^2 + 1}$ 。

4. 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上二阶可导, 且 $|f(x)| \leq 1, |f'(0)|^2 - |f(0)|^2 \geq 4$, 证明:

(1) 存在 $\xi \in (-1, 0), \eta \in (0, 1)$, 使得 $|f'(\xi)| \leq 2, |f'(\eta)| \leq 2$;

(2) 存在 $\gamma \in (-1, 1)$, 使得 $f''(\gamma) = f(\gamma)$ 。

