

一、由数列极限定义证明：（6 分）

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sin n}{4n^2 + 1} = \frac{1}{4}。$$

二、计算题（每小题 6 分，共 48 分）

1、计算数列极限

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 2n + 1}{n^3 - 3n^2 - 1}；$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-3})；$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (|\sin 1| + |\sin 2| + \cdots + |\sin n|)^{\frac{1}{n}};$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n}{n \ln n}.$$

2、计算函数极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+2x)} - \frac{1}{2 \sin x} \right);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} (\sin^2 x + \cos x)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + \cos x) - \sqrt[4]{1 + 2x^2} + 1}{x^4}.$$

三、求解题（每题 9 分，共 18 分）

1. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $e^y + xy = 1$ 确定的隐函数，求 $y''(x)$ 。

2. 求曲线 $y = 2x \arctan x - \frac{1}{6x^2}$ 的渐近线及拐点。

四、分析与证明题（每小题 7 分，共 28 分）

1. 设 $x_1 = 1, x_{n+1} = 2 + \frac{3}{1+x_n}$, $n = 1, 2, \dots$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限。

2. 证明：函数 $e^{\sin x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, $\sin e^x$ 在 $[0, +\infty)$ 上不一致连续。

3. 证明：当 $x > 0$ 时, $1 + x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) > \sqrt{x^2 + 1}$ 。

4. 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上二阶可导, 且 $|f(x)| \leq 1$, $|f'(0)|^2 - |f(0)|^2 \geq 4$, 证明:

(1) 存在 $\xi \in (-1, 0)$, $\eta \in (0, 1)$, 使得 $|f'(\xi)| \leq 2$, $|f'(\eta)| \leq 2$;

(2) 存在 $\gamma \in (-1, 1)$, 使得 $f''(\gamma) = f(\gamma)$ 。