

参考答案

一、(6 分) 由数列极限定义证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sin n}{4n^2 + 1} = \frac{1}{4}$$

$$\text{证明: 由于 } \left| \frac{n^2 + \sin n}{4n^2 + 1} - \frac{1}{4} \right| = \left| \frac{4 \sin n - 1}{(4n^2 + 1)4} \right| \leq \frac{4|\sin n| + 1}{4(4n^2 + 1)} < \frac{5}{16n^2},$$

$$\text{故 } \forall \varepsilon > 0, \text{ 要使 } \left| \frac{n^2 + \sin n}{4n^2 + 1} - \frac{1}{4} \right| < \varepsilon, \text{ 只要 } \frac{5}{16n^2} < \varepsilon, \text{ 即 } n > \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{\varepsilon}}. \text{ 取 } N = \left[\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{\varepsilon}} \right] + 1,$$

$$\text{当 } n > N \text{ 时, } \left| \frac{n^2 + \sin n}{4n^2 + 1} - \frac{1}{4} \right| < \varepsilon, \text{ 故由数列极限定义知, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sin n}{4n^2 + 1} = \frac{1}{4}.$$

二、计算题 (共 48 分)

1、计算数列极限 (每小题 6 分)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 2n + 1}{n^3 - 3n^2 - 1};$$

$$\text{解: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 2n + 1}{n^3 - 3n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 - \frac{3}{n} - \frac{1}{n^3}} = 3$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-3});$$

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-3}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-3})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-3})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-3}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \frac{5}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-3}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 - \frac{3}{n}}} \\ &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (|\sin 1| + |\sin 2| + \cdots + |\sin n|)^{\frac{1}{n}};$$

$$\text{解: 因为 } |\sin 1| \leq |\sin 1| + |\sin 2| + \cdots + |\sin n| \leq n,$$

$$|\sin 1|^{\frac{1}{n}} \leq (|\sin 1| + \cdots + |\sin n|)^{\frac{1}{n}} \leq n^{\frac{1}{n}},$$

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} (|\sin 1|)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1,$$

所以由夹逼定理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} (|\sin 1| + |\sin 2| + \cdots + |\sin n|)^{\frac{1}{n}} = 1$ 。

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n}{n \ln n}$$

解：由 Stolz 定理，

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n}{n \ln n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n \ln n - (n-1) \ln(n-1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln n + (n-1) \ln \frac{n}{n-1}}. \end{aligned}$$

因为 $(n-1) \ln \frac{n}{n-1} = \ln(1 + \frac{1}{n-1})^{n-1}$ ，故 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n-1) \ln \frac{n}{n-1} = 1$ 。因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln n + (n-1) \ln \frac{n}{n-1}} = 1, \text{ 所以}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n}{n \ln n} = 1。$$

2. 计算下列函数极限（每小题 6 分）：

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

$$\text{解：} \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2}。 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+2x)} - \frac{1}{2 \sin x} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{解：} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+2x)} - \frac{1}{2 \sin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \ln(1+2x)}{\ln(1+2x) 2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \ln(1+2x)}{4x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[2 \sin x - \ln(1+2x)]'}{(4x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - \frac{2}{1+2x}}{8x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x) \cos x - 1}{4x + 8x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[(1+2x) \cos x - 1]'}{(4x + 8x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - (1+2x) \sin x}{4 + 16x} \\ &= \frac{1}{2}。 \end{aligned}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} (\sin^2 x + \cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

解：首先 $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin^2 x + \cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(\sin^2 x + \cos x)}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + \cos x)}{x^2}}$ 。

$$\begin{aligned} \text{由于 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + \cos x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\ln(\sin^2 x + \cos x)]'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x - \sin x}{2x(\sin^2 x + \cos x)} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sin^2 x + \cos x)} \lim_{x \rightarrow 0} [(2 \cos x - 1) \frac{\sin x}{x}] \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin^2 x + \cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}}$ 。

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + \cos x) - \sqrt[4]{1 + 2x^2} + 1}{x^4}$$

解：当 $x \rightarrow 0$ 时， $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$ ，故当 $x \rightarrow 0$ 时，

$$\begin{aligned} \ln(x^2 + \cos x) &= \ln(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)) \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) - \frac{1}{2}[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)]^2 + o([\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)]^2) \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)。 \end{aligned}$$

又当 $x \rightarrow 0$ 时， $\sqrt[4]{1 + 2x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)$ ，

$$\begin{aligned} \text{因此 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + \cos x) - \sqrt[4]{1 + 2x^2} + 1}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4) - [1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)] + 1}{x^4} \\ &= \frac{7}{24}。 \end{aligned}$$

三、求解题（本大题有两题，每题 9 分，共 18 分）

1. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $e^y + xy = 1$ 确定的隐函数，求 $y''(x)$ 。

解：对方程 $e^y + xy = 1$ 两边关于 x 求导，得 $e^y y' + y + xy' = 0$ ，所以

$$y' = -\frac{y}{x + e^y},$$

$$\text{故知 } y'' = -\frac{y'(x + e^y) - y(x + e^y)'}{(x + e^y)^2} = -\frac{y'(x + e^y) - y(1 + e^y y')}{(x + e^y)^2},$$

将 y' 代入上式得

$$y'' = \frac{y(2x + (2-y)e^y)}{(x+e^y)^3} \circ .$$

2. 求曲线 $y = 2x \arctan x - \frac{1}{6x^2}$ 的渐近线及拐点。

解：因为 $\lim_{x \rightarrow 0} y = -\infty$ ，所以直线 $x = 0$ 是该曲线的一条垂直渐近线。

由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2 \arctan x - \frac{1}{6x^3}] = \pi$ ，又

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - \pi x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x \arctan x - \frac{1}{6x^2} - \pi x] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(2 \arctan x - \pi)] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \arctan x - \pi}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 \arctan x - \pi)'}{(\frac{1}{x})'} \\ &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{1+x^2} = -2, \end{aligned}$$

所以直线 $y = \pi x - 2$ 是该曲线的一条斜渐近线。

类似地，因为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = -\pi$ ， $\lim_{x \rightarrow -\infty} (y + \pi x) = -2$ ，故直线 $y = -\pi x - 2$ 是该曲线的另一条斜渐近线。..

$$\text{由于 } y' = 2 \arctan x + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{3x^3}, \quad y'' = \frac{(3x^2+1)(x^2-1)}{x^4(1+x^2)^2},$$

故令 $y'' = \frac{(3x^2+1)(x^2-1)}{x^4(1+x^2)^2} = 0$ ，得 $x = \pm 1$ 。

易见，当 $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 时， $y'' > 0$ ；当 $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ 时 $y'' < 0$ ，

所以点 $(1, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{6})$ 和 $(-1, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{6})$ 为该曲线的拐点

四、分析与证明题（每小题 7 分，共 28 分）

1. 设 $x_1 = 1, x_{n+1} = 2 + \frac{3}{1+x_n}$ ， $n = 1, 2, \dots$ ，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限。

解：易见 $\{x_n\}$ 不单调，下面先考虑数列 $\{x_{2n-1}\}$ 。

由于 $x_{2n+1} = 2 + \frac{3}{1+x_{2n}} = 2 + \frac{1+x_{2n-1}}{2+x_{2n-1}}$ ，从而可知

$$x_{2n+3} - x_{2n+1} = 2 + \frac{1+x_{2n+1}}{2+x_{2n+1}} - (2 + \frac{1+x_{2n-1}}{2+x_{2n-1}}) = \frac{x_{2n+1} - x_{2n-1}}{(2+x_{2n+1})(2+x_{2n-1})},$$

因为 $x_1 < x_3$ ，故由上式易知 $\{x_{2n-1}\}$ 单调增加。又 $2 < x_{2n-1} < 3 (n > 1)$ ，故 $\{x_{2n-1}\}$ 单调有界，所以 $\{x_{2n-1}\}$ 收敛。

设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n-1} = a$ ，则 $2 \leq a \leq 3$ ，且在 $x_{2n+1} = 2 + \frac{1+x_{2n-1}}{2+x_{2n-1}}$ 两边求极限知， $a = 2 + \frac{1+a}{2+a}$ ，
 可得 $a = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$ ，即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n-1} = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$ 。
 又 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 + \frac{3}{1+x_{2n-1}}) = 2 + \frac{3}{1+a} = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$ ，从而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n} = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$ ，
 所以 $\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$ 。

2. 证明：函数 $e^{\sin x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续， $\sin e^x$ 在 $[0, +\infty)$ 上不一致连续。

证明：设 $f(x) = e^{\sin x}$ ，那么 $f'(x) = e^{\sin x} \cos x$ ， $|f'(x)| \leq e$ 。 $\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ ，由 Lagrange 中值定理得

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)| |x_1 - x_2| \leq e |x_1 - x_2| \quad (\xi \text{ 在 } x_1 \text{ 与 } x_2 \text{ 之间})。$$

于是 $\forall \varepsilon > 0$ ，取 $\delta = \frac{\varepsilon}{e}$ ， $\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ ，当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时， $|f(x_1) - f(x_2)| \leq e |x_1 - x_2| < \varepsilon$ ，

所以 $f(x) = e^{\sin x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续。

下面再证 $\sin e^x$ 在 $[0, +\infty)$ 上不一致连续。

令 $x_n = \ln(2n\pi + \frac{\pi}{2})$ ， $y_n = \ln(2n\pi)$ ，则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \frac{2n\pi + \frac{\pi}{2}}{2n\pi} = 0，\text{ 但是 } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sin e^{x_n} - \sin e^{y_n}) = 1 \neq 0，$$

可见 $\sin e^x$ 在 $[0, +\infty)$ 上不一致连续。

3. 证明：当 $x > 0$ 时， $1 + x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) > \sqrt{x^2 + 1}$ 。

证明：令 $f(x) = 1 + x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1}$ ，那么当 $x > 0$ 时，

$$f'(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) > \ln 1 = 0，$$

则 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上严格单调增加，故当 $x > 0$ 时， $f(x) > f(0) = 0$ ，结论得证。

4. 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上二阶可导，且 $|f(x)| \leq 1$ ， $|f'(0)|^2 - |f(0)|^2 \geq 4$ ，证明：

(1) 存在 $\xi \in (-1, 0)$ ， $\eta \in (0, 1)$ ，使得 $|f'(\xi)| \leq 2$ ， $|f'(\eta)| \leq 2$ ；

(2) 存在 $\gamma \in (-1, 1)$ ，使得 $f''(\gamma) = f(\gamma)$ 。

证明：(1) 在 $[-1, 0]$ 上利用 Lagrange 中值定理， $\exists \xi \in (-1, 0)$ ，使得 $f(0) - f(-1) = f'(\xi)$ ，

所以 $|f'(\xi)| \leq |f(0)| + |f(-1)| \leq 2$ 。类似地, $\exists \eta \in (0,1)$, 使得 $|f'(\eta)| \leq 2$ 。

(2) 令 $F(x) = (f'(x))^2 - f^2(x)$, 则 $F'(x) = 2f'(x)(f''(x) - f(x))$, $F(0) \geq 4$, 结合 (1) 可知,

$$F(\xi) = (f'(\xi))^2 - f^2(\xi) \leq (f'(\xi))^2 \leq 4 \leq F(0),$$

$$F(\eta) = (f'(\eta))^2 - f^2(\eta) \leq (f'(\eta))^2 \leq 4 \leq F(0),$$

由此可知, 存在 $\gamma \in (\xi, \eta) \subset (-1, 1)$, 使得 γ 为 $F(x)$ 在 $[\xi, \eta]$ 上的最大值点, 从而 γ 为 $F(x)$ 的极大值点。故由 Fermat 引理知, $F'(\gamma) = 0$, 即

$$2f'(\gamma)(f''(\gamma) - f(\gamma)) = 0。$$

又 $(f'(\gamma))^2 = F(\gamma) + f^2(\gamma) \geq F(\gamma) \geq F(0) \geq 4$, 故 $f'(\gamma) \neq 0$, 所以 $f''(\gamma) - f(\gamma) = 0$, 即

$$f''(\gamma) = f(\gamma)。$$