

安徽大学 202—202 学年第二学期

《数值分析》期中考试试卷（A 卷）

（闭卷 时间 120 分钟）

院/系_____ 年级_____ 专业_____ 姓名_____ 学号_____

题 号	一	二	三	四	总分
得 分					

一、填空题（每空 3 分，共 18 分）

得 分	
-----	--

1. 求解方程组 $\begin{cases} x_1 + 1.6x_2 = 1 \\ -0.4x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ 的 Gauss-Seidel 迭代法的迭代矩阵为_____，
此迭代法是否收敛_____.
2. 为提供数值计算精度，当正数 x 充分大时，应将 $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ 改写为_____.
3. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ ，则 $\rho(A) = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\text{cond}_\infty(A) = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有足够阶连续导数， $p \in [a, b]$ 为 $f(x)$ 的一个 m 重零点，则迭代公式 $x_{k+1} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 的收敛阶至少是_____.

得 分	
-----	--

二、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

5. 已知方程 $x^3 - 2x - 5 = 0$ 在 $x = 2$ 附近有根，下列迭代中在 $x_0 = 2$ 不收敛的是().
A. $x_{k+1} = \sqrt[3]{2x_k + 5}$ B. $x_{k+1} = \sqrt{2 + \frac{5}{x_k}}$ C. $x_{k+1} = \frac{2x_k^3 + 5}{3x_k^2 - 2}$ D. $x_{k+1} = x_k^3 - x_k - 5$
6. 用数 $\frac{1}{2}(1 + e^{-1})$ 作为计算积分 $I = \int_0^1 e^{-x} dx$ 的近似值，产生的主要误差是() 误差.
A. 截断 B. 模型 C. 观测 D. 舍入
7. -324.7500 是四舍五入得到的近似值，它有() 位有效数字.
A. 5 B. 6 C. 7 D. 8
8. 解线性代数方程组的列主元高斯消去法与顺序高斯消去法相比，其优点是能().

A. 节省存储空间 B. 提高计算精度 C. 减少计算量 D. 提高计算速度

9. 用二分法求方程 $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ 在区间 $[0, 1]$ 内的根, 为了使得其得到的解具有 3 位有效数字, 应该二分 () 次.

A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

10. 给定矩阵 $B, C \in R^{n \times n}$ 和向量 $d \in R^n$, 而且 B 的特征值为负数, 则迭代公式

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k+1)} + Cx^{(k)} + d, k = 0, 1, \dots$$

任选 $x^{(0)} \in R^n$, 产生的向量序列 $\{x_k\}$ 收敛的充分必要条件是 () .

A. $\rho(B) < 1$ B. $\rho((I - B)^{-1}C) < 1$ C. $\rho(B + C) < 1$ D. $\rho((I - B)^{-1}) < 1$

三、计算题 (每小题 11 分, 共 55 分)

得分	
----	--

11. 设 $x_1 = 1.21, x_2 = 3.65, x_3 = 9.71$ 均是具有 3 位有效数字的近似值, 试估算 $x_1x_2 + x_3$ 的有效数字位数.

12. 设序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足下面的递推关系:

$$\begin{cases} x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2} = 0, & n = 2, 3, \dots \\ x_0 = 1, x_1 = \sqrt{2} \end{cases}$$

设 $\tilde{x}_n$ 是 x_n 的近似值, 如果 $\tilde{x}_0 = 1$, $\tilde{x}_1 = 1.414$, 且已知 $\tilde{x}_1$ 具有 4 位有效数字.

(1) 估计 $\tilde{x}_{10}$ 的绝对误差限;

(2) 分析上述算法的数值稳定性.

13. 用平方根法 (Cholesky 分解) 法解线性方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

14. 给定方程 $e^x + 10x - 2 = 0$.

(1) 判断该方程存在几个实根;

(1) 用牛顿-拉夫森方法求出其最小正根 (精确至 3 位有效数字).

15. 用 Gauss-Seidel 迭代法解方程组
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 18 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 22 \end{cases}$$
, 取 $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$, 迭代四次(要求保留 4 位小数).

四、证明题（共计 9 分）

得分	
----	--

16. 已知线性方程组

$$Ax = b, \quad (1)$$

其中 $A \in R^{n \times n}, x \in R^n, b \in R^n$. 其同解线性方程组为

$$x = Bx + f, \quad (2)$$

其中 $\|B\|_{\infty} < 1$.

- (1) 证明：方程组①存在唯一解 x^* ；
- (2) 给出求解方程组②的迭代解法，并证明迭代解法的收敛性.