

安徽大学 2022—2023 学年第 2 学期

《数值分析》考试试卷 (A 卷)

(闭卷 时间 120 分钟)

考场登记表序号_____

院/系_____ 年级_____ 专业_____ 姓名_____ 学号_____

题 号	一	二	三	四	总分
得 分					

一、填空题 (每小题 3 分, 共 18 分)

得 分	
-----	--

1. 用数 $\frac{1}{2}(1+e^{-1})$ 作为计算积分 $I = \int_0^1 e^{-x} dx$ 的近似值, 产生的主要误差是_____.

2. 为使两点的数值求积公式 $\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f(x_0) + f(x_1)$ 具有最高的代数精度, 则其求积节点的值应为_____.

3. 设 A 为 n 阶非奇异矩阵, $\text{cond}(A)$ 为条件数, 则判别方程组 $Ax=b$ 是病态的依据是_____.

4. -324.7500 是通过四舍五入得到的近似值, 它有_____位有效数字.

5. 用列主元消去法解线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ -x_1 \quad \quad -3x_2 = 2 \end{cases}$, 作第 1 次消元后的第 3 个方程为_____.

6. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有足够阶连续导数, $p \in [a, b]$ 为 $f(x)$ 的一个 m 重零点, 则迭代公式 $x_{k+1} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 的收敛阶至少是_____.

二、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

得分

7. 下列说法中不属于数值方法设计中的可靠性分析的是（ ）.

A. 方法收敛性 B. 方法的稳定性 C. 方法的计算量 D. 方法的误差估计

8. 已知 $S(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 2 \\ 2(x-1)^3 + a(x-2) + b & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$ 是三次样条函数，则 a, b 的值为（ ）

A. 6, 6 B. 6, 8 C. 8, 6 D. 8, 8

9. 求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ ，若（ ），则称该公式具有 m 次代数精度.

- A. 对于 m 次多项式该公式精确成立， $m+1$ 次多项式不成立
 B. 对于大于 m 次多项式该公式精确成立， m 次多项式不成立
 C. 对于小于 m 次多项式该公式精确成立，大于 m 次多项式不成立
 D. 对于不超过 m 次多项式该公式精确成立，有 $m+1$ 次多项式不成立

10. 由下列数据

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	2	4	3	-5

确定的唯一插值多项式的次数为（ ）.

A. 4 B. 2 C. 1 D. 3

11. 在区间 $[0,1]$ 上满足 $y(0)=1.5$ ， $y(1)=2.5$ 的 0 次拟合多项式曲线是（ ）.

A. $y=2$ B. $y=1.5$ C. $y=2.5$ D. $y=4$

12. 设求解方程组 $Ax=b$ 的迭代格式为 $x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$ ，其系数矩阵为

$A = \begin{bmatrix} -7 & -1 & -1 \\ -1 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ ，迭代矩阵为 $B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ ，则下列说法正确的是（ ）.

- A. 方程组系数矩阵 A 严格对角占优，故此迭代收敛于方程组的解.
 B. 迭代矩阵 B 严格对角占优，故此迭代收敛于方程组的解.
 C. $\|B\|_1 = \|B\|_\infty = 10 > 1$ ，故此迭代发散.
 D. 迭代矩阵 B 的谱半径 $\rho(B) > 1$ ，故此迭代发散.

三、计算题（每小题 12 分，共 48 分）

得分	
----	--

13. 取 5 个等距节点，分别用复合梯形公式和复合 Simpson 公式计算积分 $\int_0^2 \frac{1}{1+2x^2} dx$ 的近似值(保留 4 位小数).

14. 已知函数 $y = f(x)$ 的一组数据：

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	1	0.5	0.2

求分段线性插值函数，并计算 $f(1.5)$ 的近似值.

15. 用 Gauss-Seidel 迭代法解方程组
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 18 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 22 \end{cases}$$
 , 取 $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$, 迭代四次 (要求保留 4 位小数).

16. 设空间 $\varphi_1 = \text{span}\{1, x\}$, $\varphi_2 = \text{span}\{x^{100}, x^{101}\}$, 分别在 φ_1 、 φ_2 上求出一个元素, 使得其为 $x^2 \in C[0,1]$ 的最佳平方逼近, 并通过误差分析比较其结果.

四、证明题 (每小题 8 分, 共计 16 分)

得分	
----	--

17. 设方程 $f(x) = 0$ 在区间 $[0,1]$ 上有唯一实根, 如果用二分法求该方程的近似根, 要求计算结果保留四位有效数字, 证明至少要二分 14 次.

18. (1) 设初值问题 $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$.

证明 *Euler* 方法是求解上述初值问题的仅有一阶精度的数值方法.

- (2) 用 Heun 方法求下列初值问题 (取步长 $h = 0.5$)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{3y}{1+t} & 0 < t \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$