

安徽大学 2021—2022 学年第 2 学期

《数值分析》(A 卷) 考试试题参考答案

一、填空题 (每空 3 分, 共 18 分)

1. $\frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)}$, 2. $f(1)f(2) < 0, |\varphi'(x)| > 1, x \in [1, 2]$ 3. $\frac{1}{8}$,

4. 1, 5. $\sum_{i=0}^2 \frac{f(x_i)}{3}$

二、选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

6. A 7. D 8. C 9. B 10. C 11. C

三、计算题 (每小题 11 分, 共 55 分)

12. 用 Newton 插值方法, 构造均差表如下:

100	10		
121	11	0.0476190	
144	12	0.0434783	-0.0000941136

$$\sqrt{115} \approx 10 + 0.0476190(115-100) - 0.0000941136(115-100)(115-121) \\ = 10.7227555$$

由于 $f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$, 所以

$$|R| = \left| \frac{f'''(\xi)}{3!} (115-100)(115-121)(115-144) \right| \\ \leq \frac{1}{6} \frac{3}{8} 100^{-\frac{5}{2}} \times 15 \times 6 \times 29 \approx 0.00163$$

13. 解: 两边取对数, 令 $z = \ln y$, 则有 $z = \ln a + bx$, 数据变换如下

x	1	2	3	4
-----	---	---	---	---

$\ln y$	4.0943	3.4012	2.9957	2.7081
---------	--------	--------	--------	--------

. 取基函数 $\varphi_0(x)=1, \varphi_1(x)=x$, 计算内积

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \sum_{i=1}^4 1 = 4, (\varphi_0, \varphi_1) = \sum_{i=1}^4 x_i = 10, (\varphi_1, \varphi_1) = \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 30$$

$$(\varphi_0, z) = \sum_{i=1}^5 z_i = 13.1993, (\varphi_1, z) = \sum_{j=1}^5 x_i y_i = 30.7162$$

所以, 法方程组为

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.1993 \\ 30.7162 \end{bmatrix},$$

求得

$$A = \ln a \approx 4.4409, \quad b = -0.4564, \quad a = 84.8528$$

所以所求经验公式为

$$S(x) = 84.8528e^{-0.4564x}.$$

14. 解: Euler 公式为

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) = y(t_n) + h(x_n^2 + 100y_n^2), \quad n = 0, 1, 2$$

把 $y_0 = y(0) = 0, \quad h = 0.1$ 代入上式得

$$y(0.1) \approx y_1 = 0.0000, \quad y(0.2) \approx y_2 = 0.0010, \quad y(0.3) \approx y_3 = 0.0050$$

15. 解:

$$T_1 = \frac{1}{2}(e^{0^2} + e^{1^2}) \approx 1.859140914$$

$$T_2 = \frac{1}{4}(e^{0^2} + 2e^{(\frac{1}{2})^2} + e^{1^2}) \approx 1.571583166$$

$$T_2 = \frac{1}{8}(e^{0^2} + 2(e^{(\frac{1}{4})^2} + e^{(\frac{1}{2})^2} + e^{(\frac{3}{4})^2}) + e^{1^2}) \approx 1.490678862$$

误差

$$|I - T_4| \approx \frac{1}{3} |T_4 - T_2| = |-0.0269681013| < 0.05 = \frac{1}{2} \times 10^{0-(2-1)}$$

所以, $T_4 \approx 1.5$ 至少有两位有效数字。

四、证明题 (每小题 8 分, 共 16 分)

16. 证明: 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 经过 Gauss 消元第一步后, 得 $n-1$ 阶矩阵

$A_2 = (b_{ij})_{(n-1) \times (n-1)}$, 其中

$$b_{ij} = a_{i+1,j+1} - \frac{a_{i+1,1}}{a_{11}} a_{1,j+1},$$

因为 A 是对称矩阵, 所以 $a_{i+1,j+1} = a_{j+1,i+1}$, $a_{i+1,1} = a_{1,i+1}$, $a_{1,j+1} = a_{j+1,1}$, 故

$$b_{ji} = a_{j+1,i+1} - \frac{a_{j+1,1}}{a_{11}} a_{1,i+1} = a_{i+1,j+1} - \frac{a_{1,i+1}}{a_{11}} a_{j+1,1} = b_{ij},$$

所以矩阵 A_2 是对称矩阵.

17. 证明: 设 $x_0 = \frac{1}{4}$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{4}$, 故, 以三个零点为求积节点, 构造插值型求积公式的系数

$$A_0 = \int_0^1 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} dx = \frac{2}{3}, \quad A_1 = \int_{-1}^1 \frac{(x-x_1)(x-x_0)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} dx = -\frac{1}{3},$$

$$A_2 = \int_{-1}^1 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} dx = \frac{2}{3},$$

所以, 求积公式

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{3} [2f(\frac{1}{4}) - f(\frac{1}{2}) + 2f(\frac{3}{4})]$$

是插值型的。

又 $f(x)=x^3$ 时，有左=右，又 $f(x)=x^4$ 时，有左= $\frac{1}{5}$ ，右= $\frac{37}{192}$ ，左 $\neq$ 右，所以求积公式具有 3 阶代数精度。